Libro del estudiante

# Matemáticas

# 10

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

# Matemáticas 10

## Libro del estudiante

**MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL**

**PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA**
Juan Manuel Santos Calderón

**MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL**
Yaneth Cristina Giha Tovar

**VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA**
Víctor Javier Saavedra Mercado

**DIRECTORA DE CALIDAD DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA**
Paola Andrea Trujillo Pulido

**SUBDIRECTOR DE FOMENTO DE COMPETENCIAS**
Alfredo Olaya Toro (E)

**SUBDIRECTORA DE REFERENTES Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA**
María Claudia Sarta Herrera

**EQUIPO DE MATERIALES PEDAGÓGICOS**
COORDINADORA: Angélica Ortega Santacruz
PROFESIONALES: Deyanira Alfonso Sanabria, Edna Maritza Corredor Suárez, Diana Patricia Tobón Maldonado, Andrés Alberto Andrade Ceballos

**EQUIPO TÉCNICO DE MATEMÁTICAS**
ASESORA: Yadira Sanabria Mejía
PROFESIONALES: Jenny Andrea Blanco Guerrero, Guillermo Andrés Salas Rodríguez, Jairo Anibal Rey Monroy

**EQUIPO TÉCNICO EVALUADOR DE MATERIALES MATEMÁTICAS**
Ricardo Cañón Moreno, María Isabel Noreña, Diana Velásquez Rojas, Ana Celia Castiblanco Paiba, María Beatriz Rocha

**EQUIPO PROGRAMAS TRANSVERSALES Y COMPETENCIAS CIUDADANAS**
COORDINADORA: Olga Lucía Zárate Mantilla
PROFESIONALES: Francine Botero Garnica, Sandra Patricia Mora Varela, Juan Camilo Caro Daza

**EQUIPO LAROUSSE**

**DIRECTOR DE LA SERIE**
Carlos Arturo Riaño Forero

**EDITORES**
Equipo Editorial SM

**CORRECCIÓN DE ESTILO**
Angélica María Martín Rincón, Claudia Martínez Suárez, Gustavo Patiño

**DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN**
Equipo de Diseño SM

**FOTOGRAFÍA**
Ángel Camacho Linares / Rafael Niebles / Wikimedia Commons / Shutterstock.com / A.RICARDO / Andrey Khrolenok / Radu Razvan / Giuseppe Costantino /Kaliva /Teddy Leung / Zeynep Demir /Anthony Hall / rmnoa357 / Luckies /Chones /

© Difusora Larousse de Colombia Ltda., 2017
Calle 117 No. 11 A – 65
Bogotá, D. C., Colombia

© Ediciones SM S.A., 2017
Carrera 85 K N° 46 A - 66
Bogotá, D. C., Colombia
ISBN 978-958-689-082-3

**IMPRESIÓN**

Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
Impreso en Quad/Graphics

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier otro medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros medios, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA | MINEDUCACIÓN | LAROUSSE

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

# Presentación

Aceptar el reto de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el 2025 es una decisión que genera una gran responsabilidad. La necesidad de no perder ni un segundo en el camino hacia la calidad es un llamado urgente a rectores, docentes y padres de familia que se levantan cada mañana comprometidos con el futuro de miles de estudiantes.

Lograr una educación de calidad es el objetivo que nos hemos trazado para construir un país con igualdad de oportunidades para todos y en paz. Una igualdad que no sólo contempla el derecho que cada uno de los colombianos tiene a la educación, sino que se refuerza en la idea de equilibrar la cancha de juego y hacer que todos nuestros niños, niñas y adolescentes tengan las mejores condiciones en los colegios, incluyendo materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento de su proceso de aprendizaje.

Como Ministerio sabemos que la excelencia educativa se gesta en el aula, y es allí donde se deben concentrar todos los esfuerzos de transformación. Por esto, dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clase, es la forma en la que se hará visible el esfuerzo de un equipo de rectores y docentes pioneros comprometidos con el mejoramiento de la calidad en la educación.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional presenta el siguiente material de apoyo para el proceso pedagógico de enseñanza de lenguaje y matemáticas, de alta calidad. Este material ha sido seleccionado de manera juiciosa por expertos, para que docentes y estudiantes lo incorporen a la práctica de aula, los trabajen, los disfruten con su familia, aprendan con ellos y descubran un mundo de narraciones mágicas y problemas matemáticos que les dará paso a un nuevo universo de posibilidades.

Estos libros, cuadernos de trabajo y guías llegarán a los colegios y cobrarán vida en el aula gracias al compromiso y dedicación de cada uno de ustedes. Por esto es importante explorarlos, conocerlos y apropiarlos; con seguridad este será un paso más hacia nuestra meta de hacer de Colombia la más educada con ustedes como los protagonistas en este nuevo capítulo de su historia.

Sin lugar a duda, esta es una de las apuestas más importantes por el futuro del país.

# Estructura de tu libro

Este libro está organizado en seis divisiones o unidades. Cada una de ellas se compone de subdivisiones o temas. Las unidades presentan la siguiente estructura:

## Apertura de unidad

En esta doble página recordarás **aquello que ya sabes** y **conocerás lo que vas a aprender** y su aplicación en tu vida cotidiana.


## Ruta didáctica

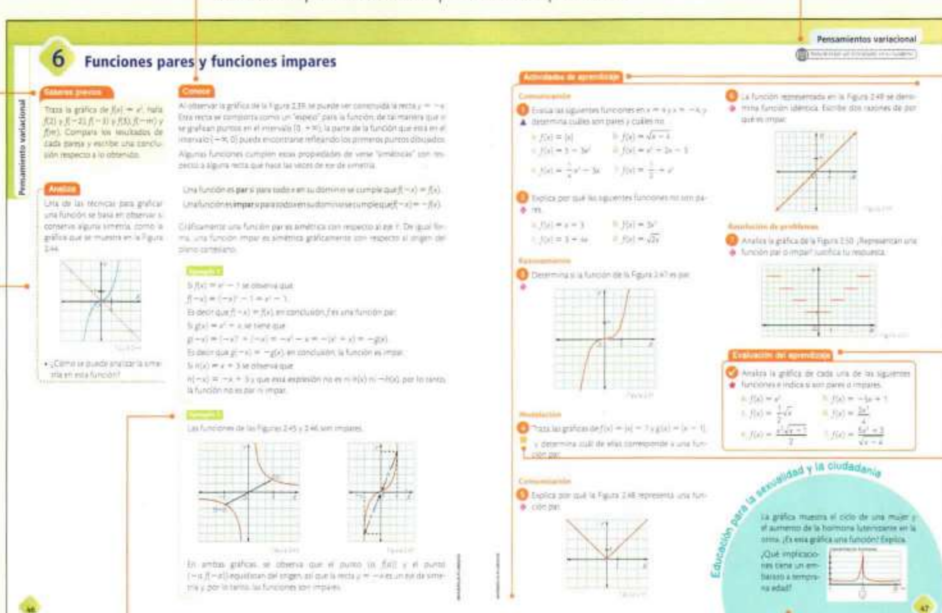
El desarrollo de todos los contenidos presenta la siguiente **ruta didáctica**.

**Conoce**
Desarrolla los contenidos del tema. Sintetiza los conceptos básicos que debes aprender.

Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

**Saberes previos**
Explora lo que ya sabes.

**Analiza**
Establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.




**Actividades de aprendizaje**
Aplica y refuerza lo que has aprendido.

**Evaluación del aprendizaje**
Evalúa tus conocimientos.

**Procesos cognitivos**
- Memoria
- Comprensión
- Análisis
- Aplicación
- Síntesis
- Evaluación

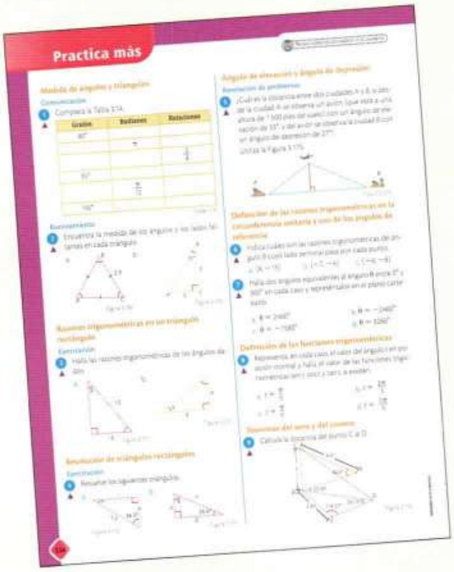
**Ejemplos**
Aplicación inmediata de los conceptos explicados.

Temas transversales

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

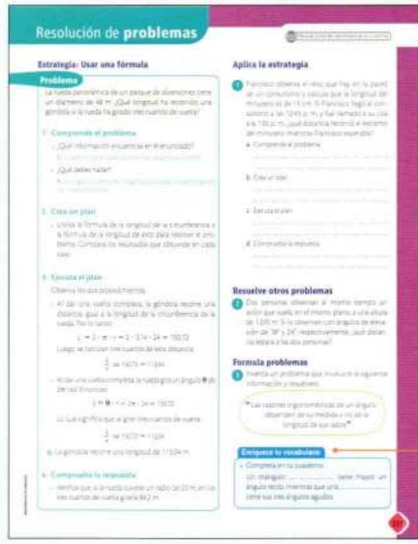
## Practica más

Resuelve **más actividades** relacionadas con los temas de la unidad y **desarrolla las habilidades** propias de la actividad matemática.




## Resolución de problemas

**Resuelve problemas** con el uso de diferentes estrategias. Sigue el **ejemplo resuelto** como guía y pon en práctica la estrategia estudiada.

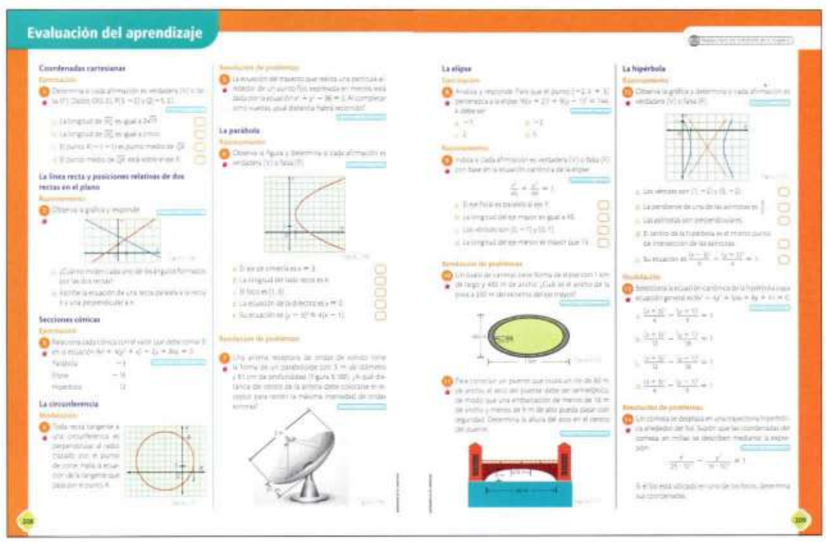



**Enriquece tu vocabulario**

Amplía tu vocabulario matemático.

## Evaluación del aprendizaje

En esta sección tendrás la oportunidad de **aplicar los temas vistos** y **reforzar tus conocimientos**.




### Temas transversales

**Educación para la sexualidad y la ciudadanía**

Con este tema desarrollarás competencias para **ejercer, respetar y promover los derechos humanos**, los cuales están presentes en tus relaciones cotidianas.

**Educación ambiental**

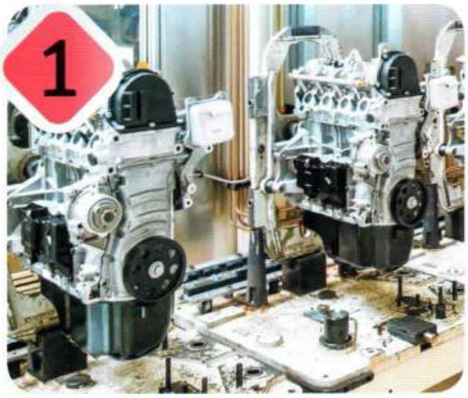
Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las **relaciones entre el individuo y su entorno natural**, como proceso interactivo, y **la protección y el cuidado** de los recursos naturales y los seres vivos.

**Estilos de vida saludable**

Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a **tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar** físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Contenido Matemáticas 10





MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 4

Pensamiento espacial y variacional

### Funciones e identidades trigonométricas — Pág. 120



## 5

Pensamiento espacial

### Geometría analítica — Pág. 158



## 6

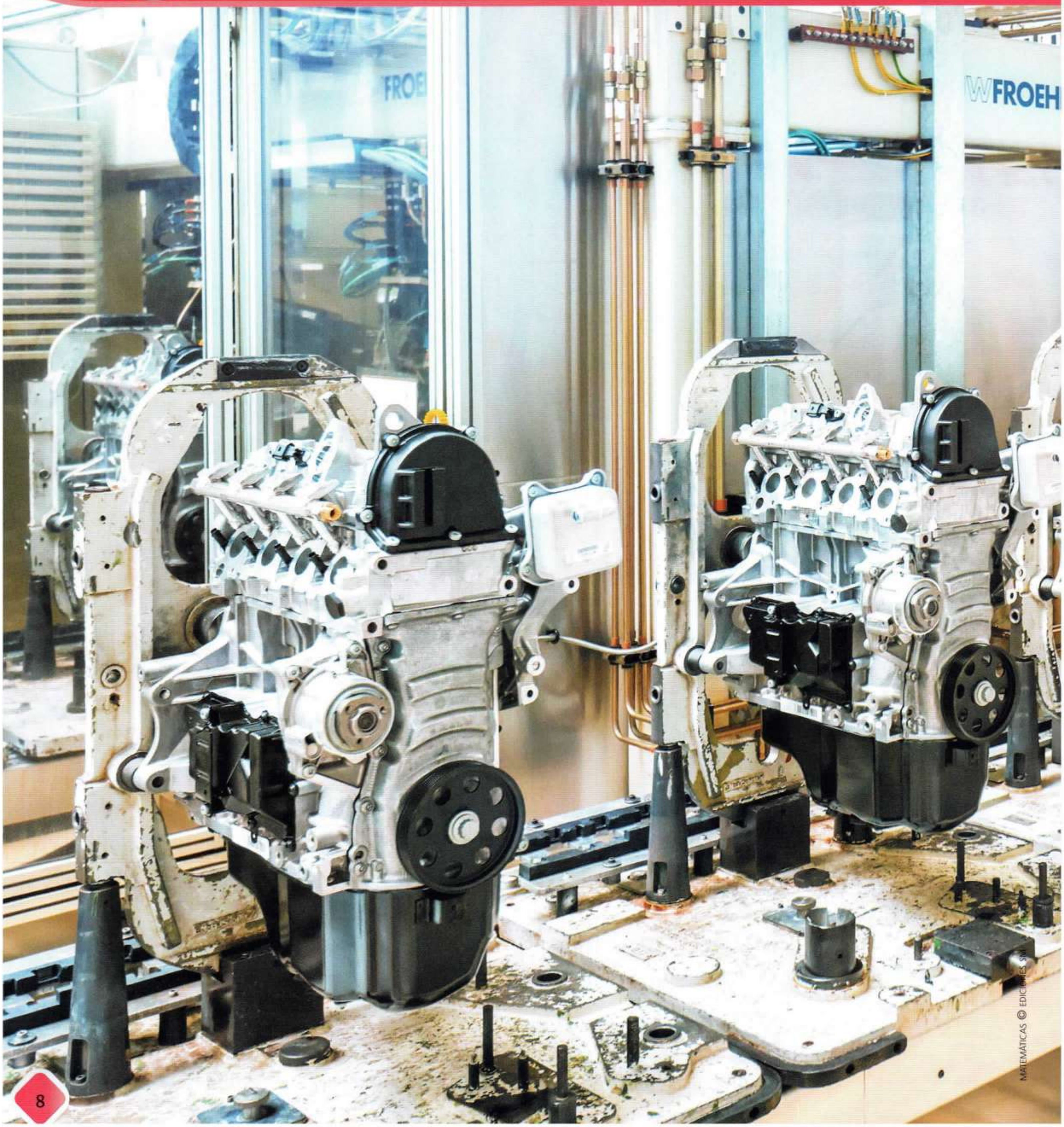
Pensamiento aleatorio

### Estadística y probabilidad — Pág. 210



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Números reales




MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

## Ya sabemos

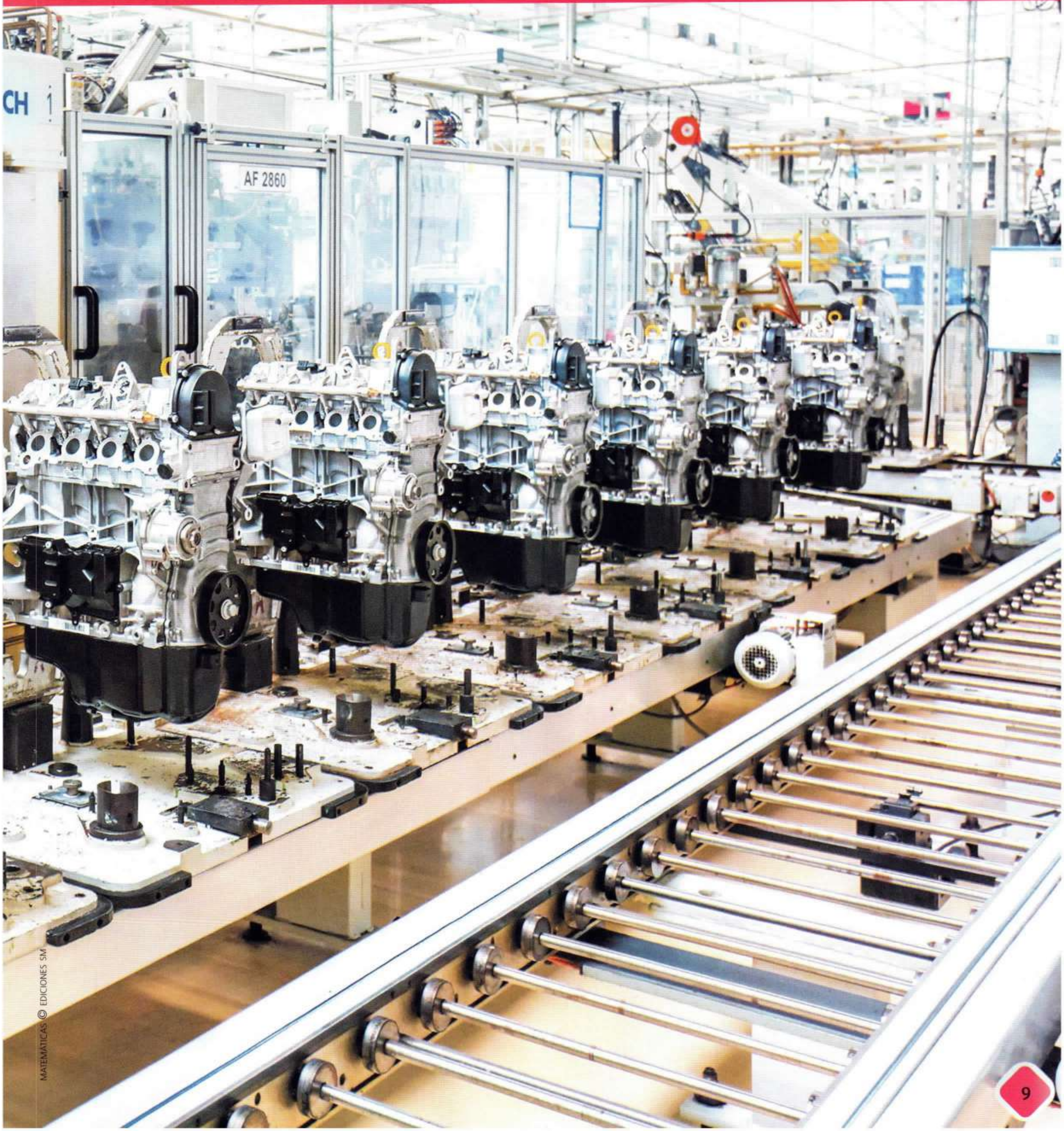
- Simplificar expresiones algebraicas.
- Resolver operaciones en los diferentes conjuntos numéricos.

## Vamos a aprender

- A representar números irracionales en la recta numérica.
- A identificar cuándo un número es racional o irracional.

## Nos sirve para

- Resolver situaciones, en contexto, en las cuales se usa el concepto de número real.




MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

# 1 Números racionales

## Saberes previos

Encuentra dos pares de números cuyos cocientes sean: 0,5 ; 0,333... y 1,3525. Explica qué relación tuviste en cuenta entre cada par para lograrlo.

## Analiza

Las medidas usadas en demografía generalmente se refieren a la proporción o porcentaje en que un evento se presenta en una población.

| Lugar | Población en millones |
|---|---|
| América | 992 |
| Europa | 738 |
| África | 1 186 |
| Asia | 4 393 |
| Oceanía | 39 |
| **Total** | **7 348** |

Tabla 1.1

Fuente: Naciones Unidas (2015). Revision of World Population Prospects.

- Los datos de la Tabla 1.1 muestran las cifras aproximadas de la población al 2015, con base en ellos, ¿a qué porcentaje de la población mundial corresponde la población de cada región?

## Conoce

La relación entre la población de cada región y el total de la población mundial se puede expresar mediante **números racionales**. Estos números pueden escribirse como una fracción o un número decimal y esta última facilita el proceso para identificar cantidades porcentuales como se muestra en la Tabla 1.2.

| Región | Población | Porcentaje |
|---|---|---|
| África | $\frac{1\,186}{7\,348} \approx 0{,}16$ | 16% |
| Asia | $\frac{4\,393}{7\,348} \approx 0{,}60$ | 60% |
| Europa | $\frac{738}{7\,348} \approx 0{,}10$ | 10% |
| América | $\frac{320}{7\,348} \approx 0{,}13$ | 13% |
| Oceanía | $\frac{39}{7\,348} \approx 0{,}005$ | 0,5% |

Tabla 1.2

En el sentido amplio, los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) se definen como el cociente de dos números enteros con denominador diferente de 0.

En sentido estricto, un número racional es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada; de todas ellas, se toma como representante de dicho número racional a la fracción irreducible, es decir, la que está simplificada al máximo.

**Ejemplo 1**

El número racional $\frac{2}{3} = \left\{ \dots \frac{-8}{-12}, \frac{-6}{-9}, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots \right\}$ es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a la fracción $\frac{2}{3}$ la cual es usada como representante del conjunto por ser la que está simplificada al máximo.

**Ejemplo 2**

Como el cociente de dos números enteros puede dar un decimal exacto o periódico éstos también son números racionales.

- El número 7,45 es un número racional puesto que $\frac{149}{20} = 7{,}45$. En este caso, la expresión decimal tiene un número finito de cifras decimales.
- El número $2{,}4\overset{\frown}{78}$ es racional porque es el cociente de la fracción $\frac{409}{165}$. El número decimal tiene un número infinito de cifras decimales en el que se repite una secuencia fija de cifras llamada **periodo**. En este caso, el periodo es 78 y se denota con un arco sobre él.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

A partir de un número decimal exacto o periódico se puede calcular la fracción equivalente a él, llamada **fracción generatriz**.

**Ejemplo 3**

La fracción generatriz de un decimal exacto tiene como numerador el número sin decimales y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal. Una vez obtenida la fracción generatriz, se simplifica si es posible. Observa el ejemplo.

$$7{,}45 = \frac{745}{100} = \frac{149}{20}$$

**Ejemplo 4**

Observa cómo hallar la fracción generatriz correspondiente a un número decimal periódico.

$$10{,}1\widehat{23} = \frac{\text{Cifras del número sin coma ni periodo} - \text{Cifras situadas antes del periodo}}{\text{Tantos nueves como cifras tenga el periodo y ceros como cifras haya entre la coma y el periodo}}$$

$$= \frac{10\,123 - 101}{990} = \frac{10\,022}{990} = \frac{5\,011}{495}$$

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1. Escribe 10 fracciones que se encuentren en el conjunto de fracciones equivalentes de cada uno de los siguientes números racionales.

   a. $\frac{4}{5}$  b. $-\frac{4}{5}$  c. $2$

   d. $-5$  e. $\frac{-4}{-5}$  f. $\frac{7}{9}$

2. Identifica los números que no deben estar en el conjunto de las fracciones equivalentes cuyo representante es el número racional que se indica en cada caso.

   a. $\frac{3}{8} = \left\{\ldots\frac{-12}{-32}, \frac{-9}{24}, \frac{-6}{16}, \frac{-3}{-8}, \frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{9}{24}, \frac{12}{32}, \ldots\right\}$

   b. $\frac{-4}{7} = \left\{\ldots\frac{-8}{-14}, \frac{-4}{-7}, \frac{4}{-7}, \frac{-8}{14}, \frac{-12}{21}, \frac{16}{28}, \frac{-20}{-35}, \ldots\right\}$

3. Halla la fracción irreducible que corresponde a los siguientes números racionales.

   a. $25{,}25$  b. $25{,}\widehat{25}$  c. $25{,}2\widehat{5}$

4. Responde.

   a. ¿Todos los números enteros son racionales?

   b. ¿Todos los números racionales son enteros?

### Resolución de problemas

5. Según el censo de 1993, en Colombia por cada 100 hombres había aproximadamente 103 mujeres. Suponiendo que dicha proporción se conserva y que la cantidad de hombres hoy es de 20 000 000. ¿Cuál es la cantidad total de habitantes?

### Evaluación del aprendizaje

✓ Escribe cinco números racionales expresados como un número decimal y luego expresa cada uno como una fracción irreducible.

### Educación ambiental

La capa de hielo de los lagos de Alaska tenía aproximadamente 173 cm de espesor, pero en el año 2011 este espesor se redujo a 135 cm por causa del calentamiento global.

- ¿En qué porcentaje se redujo la capa de hielo de los lagos de Alaska en el año 2011?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Números irracionales

**Saberes previos**

Dibuja un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 8 cm cada uno. Mide con una regla la hipotenusa. Compara tu respuesta con la de otros cinco compañeros. ¿Alguno obtuvo una medida entera o un número racional?

**Analiza**

Los geómetras y artistas han encontrado que la medida de cierto tipo de armonía en la naturaleza puede expresarse mediante una cantidad llamada "Número áureo".

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

¿A qué conjunto pertenece el número áureo?

**Conoce**

La expresión decimal correspondiente al número áureo es:

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \approx 1{,}618033\ldots$$

El anterior número decimal tiene una cantidad ilimitada de cifras decimales, pero no tiene periodo. A este tipo de números se les denomina **números irracionales.**

El **conjunto de números irracionales** ($\mathbb{I}$) está conformado por los números que no se pueden escribir en forma de fracción $\frac{a}{b}$, donde $a$ y $b$ son números enteros y $b \neq 0$. La expresión decimal de un número irracional es infinita no periódica.

**Ejemplo 1**

Algunos ejemplos de números irracionales son los siguientes:

- Raíces no exactas de números enteros: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$
- Expresiones decimales infinitas cuyas cifras no son periódicas aunque puedan presentar algún otro tipo de regularidad:

  23,110100100010000… 0,1122334455… 1,212212221…
- Números importantes en matemáticas como:

  $\pi = 3{,}14159265\ldots$ $e = 2{,}71828182\ldots$ $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$

## 2.1 Los irracionales en la recta numérica

A cada número irracional le corresponde un punto en la recta numérica.

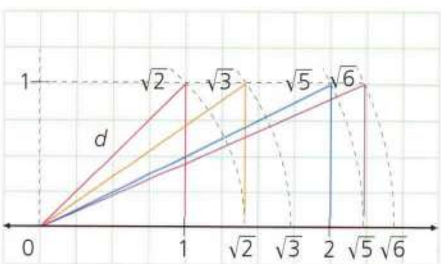



Figura 1.1

**Ejemplo 2**

Para ubicar en la recta numérica números irracionales como las raíces inexactas, se llevan a cabo los siguientes pasos.

1. Se traza una recta y se ubican los números 0 y 1. Se construye un cuadrado de lado 1 sobre la recta numérica y se traza su diagonal $d$, $d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
2. Con un compás se traza un arco con centro en 0 y radio igual a la diagonal. El arco corta a la recta numérica en el punto $\sqrt{2}$.

Para construir las siguientes raíces cuadradas se aplica un proceso similar. En la Figura 1.1 se observa la representación de los números irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 3**

El número $\pi$ se puede representar haciendo rotar sobre la recta numérica un círculo de radio $\frac{1}{2}$ (Figura 1.2), pues la medida de su circunferencia es exactamente dicho valor, $L = 2\pi r = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$.

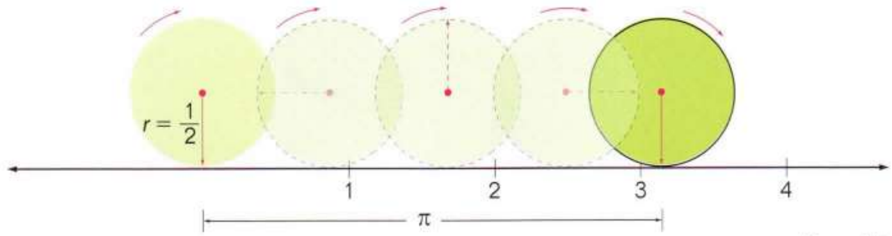



Figura 1.2

## Actividades de aprendizaje

### Razonamiento

**1** Ubica en la recta numérica los siguientes números irracionales. Usa el compás cuando sea posible.

a. $\sqrt{2}$
b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c. $\sqrt{3}$
d. $\frac{\pi}{2}$
e. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
f. $\sqrt{7}$
g. $\pi$
h. $\sqrt{5} - 2$

### Ejercitación

**2** Encuentra el resultado de cada operación. Luego, determina si corresponde a un número racional o irracional.

a. $13\sqrt{6} - 7\sqrt{6} + \sqrt{6}$

b. $5\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

c. $\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$

d. $-4\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{2}$

e. $2\sqrt{7} + 16\sqrt{7} - 24\sqrt{7}$

f. $\frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$

g. $5\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}$

h. $\frac{20\sqrt{3}}{5}$

### Resolución de problemas

**3** Lorenzo sabe que para construir las ventanas de las figuras 1.3 y 1.4 se necesita que la relación entre el largo ($l$) y el ancho ($a$) de cada una sea igual al número áureo: $\frac{l}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

¿Cuál es la medida exacta del largo de cada ventana?

a.

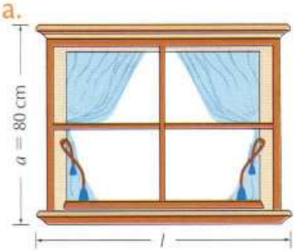



Figura 1.3

b.

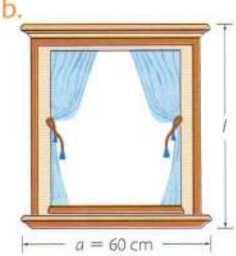



Figura 1.4

## Evaluación del aprendizaje

Encuentra el área de cada figura, explica si dichos valores son o no irracionales y representa cada uno en la recta numérica.

a.

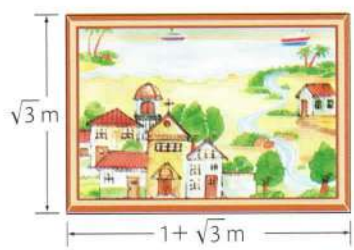



Figura 1.5

b.


Figura 1.6

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Números reales

## Saberes previos

Dos atletas llegan a la meta con una mínima diferencia. Uno de ellos hizo un tiempo de veinticinco segundos y 2 décimas y el otro veinticinco y 2 milésimas. ¿Cuál de ellos ganó?

## Analiza

¿A qué conjunto numérico pertenece cada uno de los siguientes números?

- $\sqrt{2}$
- $-3$
- $\frac{1}{2}$
- $-0{,}565656\ldots$

## Conoce

El número $-3$ es entero y racional, $\frac{1}{2}$ y $-0,\widehat{56}$ son números racionales y $\sqrt{2}$ es un número irracional; sin embargo, todos los números pertenecen al **conjunto de los números** reales ($\mathbb{R}$). En la Figura 1.7 se representa la inclusión de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ y algunos números que pertenecen a ellos.

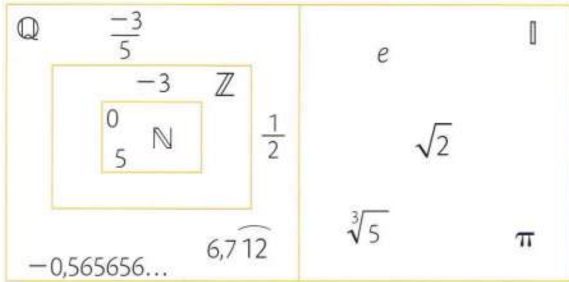



Figura 1.7

El **conjunto de los números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

**Ejemplo 1**

En la tabla 1.3 se marcó con X el conjunto numérico al que pertenece cada número.

| Número | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{I}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-5{,}06$ | | | X | | X |
| $\sqrt{5}$ | | | | X | X |
| 4 | X | X | X | | X |
| $-\frac{14}{3}$ | | | X | | X |
| 0,3333… | | | X | | X |

Tabla 1.3

## 3.1 Representación de los números reales en la recta real

La recta numérica en la que se representan los números reales se denomina **recta real**; en ella se verifica que:

- Cada punto de la recta se corresponde con un número real.
- A cada número real le corresponde uno y solo uno de los puntos de la recta.

**Ejemplo 2**

En la Figura 1.8 se representan algunos números reales.

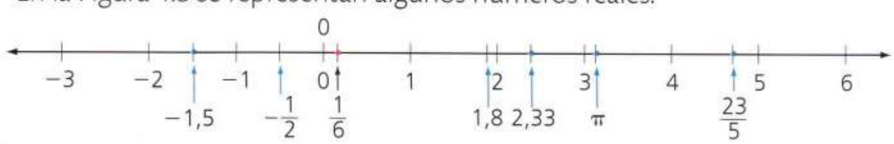



Figura 1.8



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 3.2 Operaciones con números reales

La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números reales es siempre otro número real. Para realizar estas operaciones se pueden utilizar aproximaciones tomando el número de cifras decimales que se considere adecuado. El resultado no será exacto y tendrá un error cuya magnitud dependerá del número de cifras decimales utilizadas.

Para *a*, *b* y *c*, números reales, la adición y el producto de números reales cumplen las propiedades que se muestran en la Tabla 1.4.

| Propiedad | Adición | Multiplicación |
|---|---|---|
| Conmutativa | $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| Asociativa | $a + (b + c) = (a + b) + c$ | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |
| Elemento neutro | $a + 0 = a$ | $a \cdot 1 = a$ |
| Elemento inverso (aditivo o multiplicativo) | $a + (-a) = 0$ | $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ con $a \neq 0$ |
| Distributiva del producto con respecto a la suma | | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |

Tabla 1.4

### Actividades de aprendizaje

**Ejercitación**

1. Ubica en la recta numérica cada grupo de números reales.

a. $2; -\frac{5}{3}; 1{,}8; \frac{7}{11}; \sqrt{7}$

b. $3\sqrt{2}; -4; \pi; 2{,}7; -\frac{3}{4}$

c. $\frac{\pi}{2}\ \sqrt{11}; 1; \frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{3}$

2. Calcula el resultado de las operaciones. Redondea el resultado a las décimas.

a. $\frac{1}{2} + 2 + \sqrt{2}$

b. $0 - 1 + 1 - 1$

c. $2{,}5 + 3{,}14 - \sqrt{3}$

d. $\pi + \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

e. $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) \cdot 0{,}5$

f. $\left(\frac{3}{4} - 6\right) \cdot \sqrt{2}$

**Resolución de problemas**

3. Se quiere cercar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro. Además, la diagonal mide 30 m.

Calcula el precio que se deberá pagar por hacer la cerca si cada metro cuesta $ 75 000 y se desperdicia un 10 % del material empleado.

### Evaluación del aprendizaje

i. Clasifica los siguientes números indicando a cuál conjunto pertenecen.

a. 2 b. $-12$ c. $\frac{3}{5}$ d. 53,1232323…

ii. Calcula la longitud del $\overline{AB}$ en cada figura.

a.

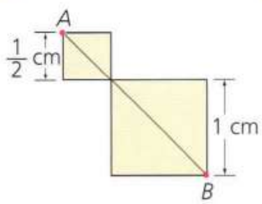



Figura 1.9

b.

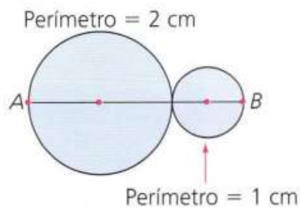



Figura 1.10

# 4 Propiedades de los números reales y expresiones decimales

## Saberes previos

Al dividir 2 entre 7 se obtiene 0,28571428571... ¿Qué se obtendrá si se divide 4 entre 7? ¿Y al dividir 6 entre 7?

## Analiza

La densidad de población se define como el cociente obtenido al dividir la cantidad de población entre el área de una región. ¿Cuál de los países de la Tabla 1.5 tiene mayor densidad de población que los demás?

| País | Extensión (miles de km²) | Población (en miles) 2016 |
|---|---|---|
| España | 500 | 46 397 |
| Dinamarca | 40 | 5 721 |
| Japón | 370 | 126 675 |
| Colombia | 1 100 | 48 782 |

Tabla 1.5

Fuente: Naciones Unidas (2016). *Revision of World Population Prospects.*

## Conoce

La densidad de población de cada país se muestra en la Tabla 1.6.

| País | Miles de habitantes por km² |
|---|---|
| España | $\frac{46\,397}{500} = 92{,}794$ |
| Dinamarca | $\frac{5\,721}{40} = 143{,}025$ |
| Japón | $\frac{126\,675}{370} = 342{,}36486486...$ |
| Colombia | $\frac{48\,782}{1\,100} = 44{,}347272727...$ |

Tabla 1.6

El conjunto de los números reales satisface las siguientes propiedades:

1. **Densidad:** Entre dos números reales, sin importar lo cercano que se encuentren, hay una infinidad de números reales.

   Así, entre 0,5 y 0,6 está 0,55 que está justo en la mitad de estos y en la mitad entre 0,55 y 0,6 se halla 0,575. Se puede seguir el proceso de manera indefinida y siempre se hallarán más y más números reales.
2. **Completitud:** A cada punto de la recta le corresponde un número real y de manera recíproca, cada número real puede representarse mediante un punto en la recta numérica. Por ejemplo 3,5 se puede ubicar en la mitad entre 3 y 4 y no habrá otro número real que ocupe ese lugar.
3. **Orden.** En los números reales se puede establecer la relación de orden entre sus elementos.

Si $a$ y $b$ son dos números reales, se dice que $a < b$, si $b$ está a la derecha de $a$ en la recta real. De acuerdo con esto, las densidades de población de la Tabla 1.6, se pueden ordenar de la menor a la mayor así:

$$44{,}347272727... < 92{,}794 < 143{,}025 < 342{,}36486486$$

De esa forma, el país cuya densidad es mayor que la de los demás países de la tabla es Japón.

Observa que al efectuar los cocientes en la Tabla 1.6 se obtuvieron diferentes números decimales los cuales pueden clasificarse así:

- Decimales finitos: son aquellos en los que la cantidad de cifras decimales es finita. Las densidades de población España y Dinamarca son ejemplos decimales finitos.
- Decimales infinitos periódicos: aquellos en los que se repite de manera ilimitada un grupo de cifras decimales llamado **periodo**. Los decimales que corresponden a las densidades de población de Colombia y Japón son infinitos periódicos y sus periodos son 72 y 648, respectivamente.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Halla la expresión decimal de cada número y determina si es finita o infinita.

a. $\frac{5}{4} = \square$ b. $\frac{1}{6} = \square$ c. $\frac{2}{5} = \square$

d. $\frac{6}{3} = \square$ e. $\frac{35}{16} = \square$ f. $\frac{3}{11} = \square$

g. $\frac{17}{8} = \square$ h. $\frac{12}{10} = \square$ i. $\frac{30}{13} = \square$

**2** Identifica el periodo de cada uno de los siguientes números.

a. 4,01818181818... b. 12,34123412...

c. 77,99979979... d. 3,333333...

e. 0,0437004370... f. 345,543543543...

g. 2,013101310... h. 2,5999....

### Razonamiento

**3** Representa los siguientes números decimales en la recta numérica.

a. 5,1 b. 3,15 c. 0,5012

d. 3,4 e. 0,312 f. 1,6436

g. 1,68 h. 2,715 i. 4,005

**4** Clasifica como racional o irracional los números en cada una de las siguientes listas. Ubícalos en forma aproximada en la recta correspondiente y ordénalos del mayor al menor.

a. $-8; \frac{3}{5}; 0; -\frac{17}{2}; 3; -2; \frac{1}{2}; 1.$

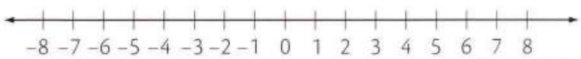



Figura 1.11

b. $\sqrt{25}; \frac{12}{5}; -4; \sqrt{15}; -\frac{10}{3}.$

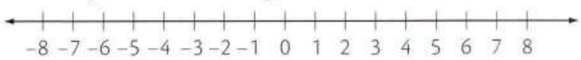



Figura 1.12

c. $\sqrt{3}; -\frac{3}{2}; \sqrt[3]{8}; \frac{5}{3}; 0; -1; \sqrt{7}.$

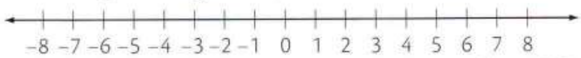



Figura 1.13

d. $2; -\frac{6}{7}; 0; \sqrt{2}; 2; \pi; 3; \sqrt{36}; \sqrt{11}.$

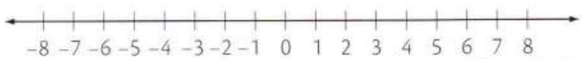



Figura 1.14

### Resolución de problemas

**5** El diagrama de la Figura 1.15 muestra la cantidad de habitantes afrocolombianos en algunos departamentos. Teniendo en cuenta el total de habitantes en las cuatro regiones, ¿cuál expresión decimal corresponde a la proporción de población afrocolombiana en cada departamento?

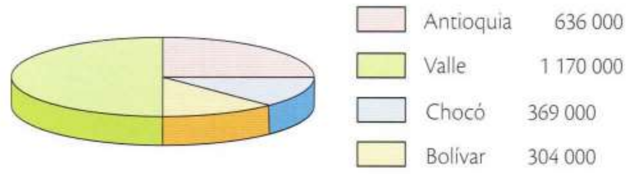



Figura 1.15

## Evaluación del aprendizaje

**i** Completa cada frase.

a. Un número irracional entre 4,2 y 4,5 es $\square$.

b. Dos números racionales comprendidos entre 6,2 y 6,3 son $\square$ y $\square$.

c. Un número racional y uno irracional ubicados en la recta real entre 5,21 y 5,22 son $\square$ y $\square$, respectivamente..

**ii** Determina si cada enunciado es falso o verdadero.

a. Entre dos números reales cualesquiera siempre hay otro número real.

b. El número 3,45 es mayor que $3,\overline{45}$.

c. Los números $\frac{1}{2}$ y 0,5 están ubicados en el mismo punto sobre la recta real.

## Estilos de vida saludable

| Nutrientes por cada 100 gramos | | | |
|---|---|---|---|
| Fruta | Calorías | Proteínas | Grasas |
| Cereza | 58 | 1,2 | 0,3 |
| Ciruela | 47 | 0,619 | 0,209 |
| Coco | 296 | 3,5 | 27,2 |

¿Cuál fruta tiene menos cantidad de grasa por cada 100 gramos?, ¿qué ventajas tiene para la salud comer porciones de fruta al día?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Orden en el conjunto de los números reales y desigualdades

## Saberes previos

Escribe tres números mayores que $-1$ pero menores que 1? ¿Existe más de un número que cumpla esa condición?

## Analiza

Las edades de Mariana y Juan suman un número menor que 86 años. Si Mariana tiene 20 años menos que Juan, ¿qué edad puede tener Mariana?

## Conoce

En la situación planteada se propone establecer relaciones de orden entre las edades. Como la edad de las dos personas es menor que 86 años; se tiene:

$$\text{Edad de Mariana} + \text{Edad de Juan} < 86 \text{ años}$$

También se sabe que Mariana es 20 años menor que Juan, esta relación se puede plantear así:

$$\text{Edad de Mariana} + 20 \text{ años} = \text{Edad de Juan}$$

Si se escribe la edad de Juan en términos de la edad de Mariana, es posible plantear la siguiente expresión:

$$2\,(\text{Edad de Mariana}) + 20 \text{ años} < 86 \text{ años}$$

$$2\,(\text{Edad de Mariana}) < 86 \text{ años} - 20 \text{ años}$$

$$\text{Edad de Mariana} < 33 \text{ años}$$

Así, se puede afirmar que la edad de Mariana puede ser cualquier número menor que 33 y se cumple que la edad de Juan se encuentra a la derecha de la de Mariana, en la recta numérica.

De manera general, los números reales satisfacen la **propiedad de la tricotomía** que indica que dados dos números reales, se satisface una y solamente una de las siguientes condiciones:

$a < b$ (es decir, $b$ está a la derecha de $a$).

$a > b$ (es decir, $a$ está a la derecha de $b$)

$a = b$ (que indica que $a$ y $b$ se ubican en el mismo punto de la recta real).

Otra propiedad de orden que cumplen los números reales establece que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Esta se conoce como **propiedad transitiva**.

Todas las anteriores relaciones entre números reales están determinadas por **desigualdades** las cuales expresan que dos expresiones no son iguales.

Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se llaman **desigualdades estrictas.**

Existen otras desigualdades como $a \leqslant b$ que significa que $a$ es menor o igual que $b$ y $a \geqslant b$ que significa que $a$ es mayor o igual que $b$.

Cada una de estas últimas desigualdades constituyen una **relación de orden** por ser:

- Reflexiva: $a \leqslant a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- Antisimétrica: si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$.
- Transitiva: si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## 5.1 Propiedades de las desigualdades

- Si se adiciona o se sustrae en ambos miembros de una desigualdad el mismo número real, no varía el sentido de la misma.
  Esto es si $a < b$ y $c$ es cualquier número real: $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.
- Si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por cualquier número real positivo, no cambia su sentido.
  Simbólicamente: si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por cualquier número negativo, cambia el sentido de la misma.
  Simbólicamente, si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

**Ejemplo 1**

Como $3 < 4$, entonces al adicionar 5 a ambos lados de la desigualdad, se tiene que $3 + 5 < 4 + 5$.

Si se sustrae 5 a ambos lados de la desigualdad inicial, se cumple que $3 - 5 < 4 - 5$.

Si se multiplica y se divide a ambos lados de la desigualdad $3 < 4$ por y entre 7, su sentido se mantiene:

$$3 \cdot 7 < 4 \cdot 7 \text{ y } \frac{3}{7} < \frac{4}{7}.$$

Si se multiplica y se divide a ambos lados de la desigualdad $3 < 4$ por y entre $-5$, su sentido cambia

$$3 \cdot (-5) > 4 \cdot (-5) \text{ y } -\frac{3}{5} > -\frac{4}{5}.$$

### Actividades de aprendizaje

**Ejercitación**

1. Si $0 < m < n$, asigna valores a $m$ y $n$ para verificar las desigualdades.

   a. $(m + n)^2 > m^2 + n^2$ b. $(m - n)^2 < (m + n)^2$

**Razonamiento**

2. Si $a > b$, indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las desigualdades.

   a. $1 - b > 1 - a + b$ b. $a > -ab > b$

   c. $-a + 0 > -b + 0$

3. 1. Escribe el signo $<$, $>$, $\leqslant$ o $\geqslant$, según corresponda.

   a. Si $a < b$, entonces $a - 5 \,\square\, b - 5$.

   b. Si $\frac{3}{5} \,\square\, t$, entonces $-\frac{6}{5} \leqslant -2t$.

   c. Si $h > 0$, entonces $h + 3{,}6 \,\square\, 3{,}6$.

   d. Si $n - 1 \geqslant 3$, entonces $-n + 1 \,\square\, -3$.

### Evaluación del aprendizaje

i. Para $m = \frac{3}{2}$ y $n = 5$ verifica si se cumplen las desigualdades dadas.

   a. $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ b. $\frac{m}{n} - n < 0$ c. $\frac{m + n}{2} > 3$

ii. En cada caso, determina si $a > b$, $a < b$ o $a = b$. Adiciona $-3$ a cada una de las desigualdades y explica si se conserva el sentido de las nuevas desigualdades. Luego, divide cada desigualdad entre $-1$ y decide el sentido de las nuevas desigualdades.

   a. $a = \frac{3}{5}$; $b = \frac{12}{20}$ b. $a = \frac{2}{3\sqrt{5}}$; $b = \frac{5}{3\sqrt{5}}$

   c. $a = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ d. $a = \frac{1}{8}$; $b = \frac{3}{5}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Valor absoluto



## Saberes previos

¿Cuáles números sobre la recta real se encuentran a 8 unidades de distancia del número $-11$? ¿Cuántos se encuentran a menos de esa distancia de $-11$?

## Analiza

Dos automóviles parten de un mismo punto en sentidos opuestos y hacen un recorrido en línea recta.

- Si los dos van a una velocidad de 60 km/h, ¿qué distancia separa a cada automóvil del punto de partida al cabo de una hora de recorrido?

## Conoce

Después de una hora de recorrido, cada uno de los automóviles se encuentra a 60 km del punto de partida pero en sentidos contrarios.

Se usan los números $-60$ y $+60$ para diferenciar la posición de cada automóvil. Sin embargo la distancia que los separa del punto de partida es 60 km y corresponde al valor absoluto de sus posiciones.

El **valor absoluto** de un número representa la distancia que hay entre ese número y el origen. El valor absoluto de cualquier número real $x$, se denota $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

## 6.1 Propiedades del valor absoluto

En la Tabla 1.7 se muestran algunas propiedades del valor absoluto, dados $x$ y $y$ números reales.

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| $\|x\| \geqslant 0$ | $\|-12\| = 12 \geqslant 0$ |
| $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ | $\|-3 \cdot 2\| = \|-3\| \cdot \|2\| = 3 \cdot 2 = 6$ |
| $\|x\|^n = \|x\|^n$ con $n \in \mathbb{N}$ | $\|-5\|^3 = \|(-5)^3\| = \|-125\| = 125$ |
| $\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ con $y \neq 0$ | $\left\|-\frac{3}{2}\right\| = \frac{\|-3\|}{\|2\|} = \frac{3}{2}$ |
| $\|x\| = \|-x\|$ | $\|0,8\| = \|-0,8\| = 0,8$ |
| $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ | $\|-3 + 5\| < \|-3\| + \|5\|$ |

Tabla 1.7

## 6.2 Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A$ y $B$ de la recta numérica, es el número $d(A, B) = |B - A|$ o también $d(B, A) = |A - B|$.

**Ejemplo 1**

La distancia entre los puntos $A = -0,8$ y $B = 2,8$ es 3,6 puesto que:

$$d(A, B) = |2,8 - (-0,8)| = |3,6| = 3,6$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Calcula.

a. $|-3\pi - 5\pi|$  b. $|7| - |-8|$

c. $|-13 + 2|$  d. $|-9 + 3| - |11|$

e. $|2{,}5 + (-8{,}3)|$  f. $(-2) \cdot |6 - 7|$

g. $|-4 - 12| \div 8$  h. $4 \cdot |-15 + 13|$

i. $\left|-\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right|$  j. $\left|-\frac{3}{4}\right| + \left|\frac{5}{2}\right|$

### Razonamiento

**2** Completa la Tabla 1.8.

| $A$ | $B$ | $C$ | $d(A, B)$ | $d(B, C)$ | $d(A, C)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-7$ | $-4$ | $2$ | | | |
| $0{,}2$ | $-2{,}1$ | $-3{,}5$ | | | |
| $-\frac{27}{10}$ | $3$ | $-2$ | | | |
| $\pi$ | $-3\pi$ | $5\pi$ | | | |
| $\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{2}{9}$ | | | |

Tabla 1.8

**3** Si $a = -\frac{1}{2}$ , $b = 0$, $c = \sqrt{2}$ 2 y $d = \sqrt{3}$, verifica cada igualdad.

a. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$  b. $|c| = |-c|$

c. $|b^7| = |b|^7$  d. $\left|\frac{c}{d}\right| = \frac{|c|}{|d|}$

e. $|c|^{-2} = |c^{-2}|$  f. $\left|\frac{a \cdot d}{c}\right| = \frac{|a| \cdot |d|}{|c|}$

g. $3\,|c \cdot d| = 3\,|c|\,|d|$

### Comunicación

**4** Diego y Marcela caminaron sobre una carretera en forma de línea recta. Ellos iniciaron su caminata en el mismo punto, pero en sentidos opuestos. Diego avanzó 750 m al occidente y Marcela avanzó 380 m al oriente.

a. ¿A qué distancia del punto de partida está cada uno? Representa en la recta numérica sus posiciones.

b. ¿Qué distancia separa a los dos caminantes?

**5** Ubica en cada recta los números $M$ que cumplan la igualdad.

a. $d(-3, M) = 4$

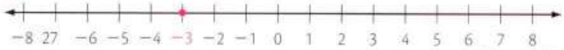



Figura 1.16

b. $d(-1, M) = 5$

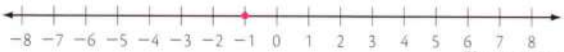



Figura 1.17

## Evaluación del aprendizaje

**i** Calcula.

a. $\left|\frac{2}{3} + 4\right|$

b. $|8 - 15 + 4|$

c. $\left|\frac{4 - \sqrt{81}}{\sqrt{36}}\right|$

**ii** Asocia cada distancia con un valor de $x$ que satisfaga la igualdad.

| | |
|---|---|
| a. $d(x, -7) = 10$ | $-2$ |
| b. $d(8, x) = 12$ | $-13$ |
| c. $d(-10, x) = 3$ | $-2{,}2$ |
| d. $d(x, 5) = 7$ | $-4$ |
| e. $d(x; 3{,}8) = 6$ | $3$ |

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Un juego *suma cero* es aquel en que todo lo que gana un jugador A lo pierde un jugador B, y viceversa. La estrategia que permite a ambos jugadores minimizar la pérdida, se considera óptima sólo cuando el valor absoluto del menor de los valores máximos de un jugador sea igual y contrario al del otro. ¿Cómo puedes aplicar esta estrategia para solucionar cualquier conflicto?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Números racionales

### Ejercitación

**1** Ubica en cada recta los números racionales dados.

a. 0,5; −1,25; 2,3; 1,35

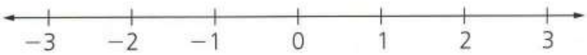



Figura 1.18

b. $\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{3}; -\frac{7}{3}$

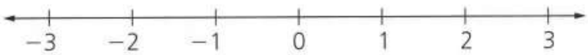



Figura 1.19

### Razonamiento

**2** Completa la Tabla 1.9.

| Fracción | Decimal | Clasificación |
|---|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | | |
| | 1,2323.... | |
| $\frac{-15}{4}$ | | |

Tabla 1.9

## Números irracionales

### Razonamiento

**3** Escribe entre que pares de números enteros está cada uno de los siguientes números irracionales.

a. $\sqrt{7}$ está entre ☐ y ☐.

b. $e^1$ está entre ☐ y ☐.

c. $\sqrt{2} + 1$ está entre ☐ y ☐.

d. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ está entre ☐ y ☐.

### Comunicación

**4** Completa cada una de las siguientes oraciones para que sean verdaderas.

a. Una diferencia entre los números racionales y los números irracionales es ☐.

b. Los decimales periódicos no son ☐.

c. El número $\sqrt{3}$ no es ☐.

## Números reales

### Ejercitación

**5** Ubica de manera conveniente los siguientes números en el diagrama de la Figura 1.20 Luego, construye una recta numérica y ubícalos en ella.

$-2 \quad \sqrt{5} \quad \frac{1}{3} \quad 4 \quad \sqrt{16} \quad -3{,}333\ldots \quad e$

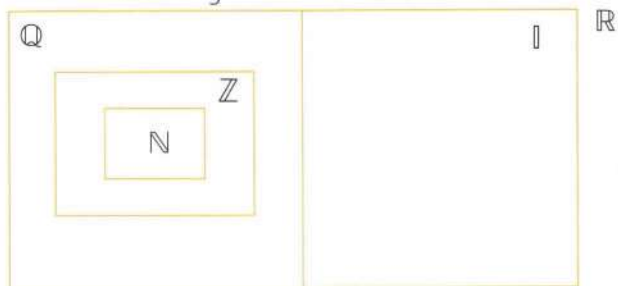



Figura 1.20

### Comunicación

**6** Escribe tres ejemplos de cada uno de los tipos de números decimales nombrados.

a. Decimal periódico cuyo periodo comience inmediatamente después de la coma decimal.

b. Decimal periódico cuyo periodo no comience. inmediatamente después de la coma decimal.

c. Decimal finito.

d. Decimal no periódico infinito.

### Razonamiento

**7** Escribe números en cada recuadro para que la relación de orden sea verdadera.

a. ☐ $< \frac{3}{7} <$ ☐

b. $\sqrt[3]{28} <$ ☐ $<$ ☐

c. ☐ $< \frac{\sqrt{7}-1}{2} <$ ☐

d. ☐ $<$ ☐ $< e$

## Valor absoluto

### Ejercitación

**8** Calcula.

a. $|-0{,}054 + 1{,}25 - 3{,}2|$

b. $|5 - (-(1{,}25 + 3{,}57))|$

c. $|-(-(3{,}4 + 4{,}5))|$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Estrategia: Ensayo y error

### Problema

Aunque $\pi$ es un número irracional, a algunos matemáticos se les ocurrió intentar aproximarlo con una fracción. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene la expresión más aproximada de $\pi$?

$$\frac{355}{113}, \frac{208\,341}{66\,317}, \frac{104\,348}{33\,215}$$

### 1. Comprende el problema

- ¿Cuál es el valor aproximado del número $\pi$?

  3,141592654

- ¿Qué fracciones se propusieron para aproximar el valor de $\pi$?

  $\frac{355}{113}, \frac{208\,341}{66\,317}, \frac{104\,348}{33\,215}$

### 2. Crea un plan

- Se halla la expresión decimal de cada fracción y se compara con el valor aproximado de $\pi$.

### 3. Ejecuta el plan

- Las expresiones decimales correspondientes a cada fracción (con nueve cifras decimales) son:

$$\frac{355}{113} \approx 3{,}141592920$$

$$\frac{208\,341}{66\,317} \approx 3{,}141592653$$

$$\frac{104\,348}{33\,215} \approx 3{,}141592654$$

- Al comparar cada expresión decimal con el valor dado de $\pi$, se comprueba que el valor más aproximado es 3,141592654.

  R: La fracción con la expresión más aproximada al valor de $\pi$ es: $\frac{104\,348}{33\,215}$.

### 4. Comprueba la respuesta

- Con ayuda de la calculadora, verifica las expresiones decimales obtenidas y compáralas con el valor de $\pi$.

## Aplica la estrategia

1 El valor aproximado del número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es 1,618033989. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene la expresión decimal más aproximada al número áureo?

$$\frac{233}{144}, \frac{987}{610}, \frac{1597}{987}, \frac{144}{89}$$

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

## Resuelve otros problemas

2 Otra aproximación del número $\pi$ se puede hallar realizando la operación:

$$2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9...}$$

¿Cuáles factores se deben tomar, tanto en el numerador como en el denominador, para obtener una buena aproximación de $\pi$?

## Formula problemas

3 Plantea y resuelve un problema que involucre la Figura 1.21.

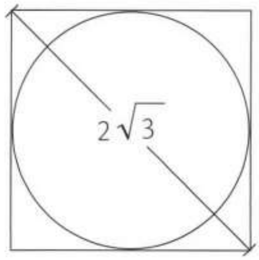



Figura 1.21

### Enriquece tu vocabulario

- Escribe la diferencia entre números racionales y números irracionales.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Evaluación del aprendizaje

## Números racionales

### Ejercitación

**1** Escribe como número decimal la parte que representa cada región sombreada con respecto a la flor correspondiente. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

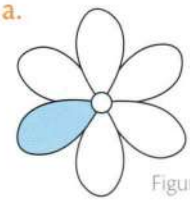


Figura 1.22

b.

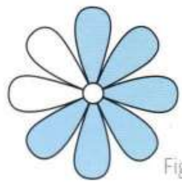


Figura 1.23

c.

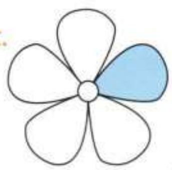


Figura 1.24

d.

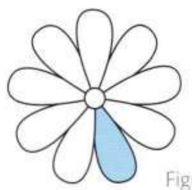


Figura 1.25

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

**2** Completa la Tabla 1.10.

| Expresión decimal | Fracción |
|---|---|
| 0,04 | |
| | $\frac{3}{5}$ |
| 5,16666... | |
| | $\frac{1}{3}$ |
| 0,1333... | |
| | $\frac{25}{4}$ |
| 1,6 | |

Tabla 1.10

### Resolución de problemas

**3** Lina compró en el mercado $\frac{5}{3}$ kilos de maracuyá a \$ 3 500 el kilo. Pablo compró en otro lugar 1,7 kilos de maracuyá a \$ 3 500 el kilo. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. ¿Cuánto pagó cada uno?

b. ¿Quién compró más maracuyá?

c. ¿Es posible afirmar que uno de los precios es menor que el otro? Explica tu respuesta.

## Números irracionales

### Razonamiento

**4** Resuelve. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Representa en la recta numérica un número racional que esté entre 3 y 4. Explica cómo encontraste el número y cómo hiciste la representación.

b. ¿Puedes encontrar otros números irracionales entre 3 y 4?

**5** Extrae las raíces cuadradas de los números que se muestran en la Tabla 1.11. Luego, determina cuáles de esas raíces son o no son números irracionales. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

| Número | La raíz es irracional | La raíz no es irracional |
|---|---|---|
| 121 | | |
| 15 | | |
| 625 | | |
| 124 | | |
| 1 000 | | |

Tabla 1.11

## Números reales

### Modelación

**6** Representa en la recta numérica cada número, según las condiciones planteadas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Un número entero entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$.

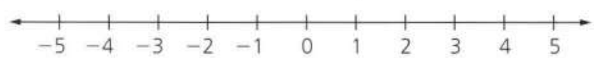



Figura 1.26

b. Un número racional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$.

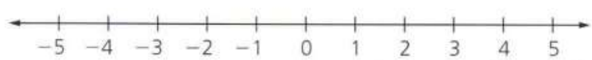



Figura 1.27

c. Un número irracional entre −2 y 0.

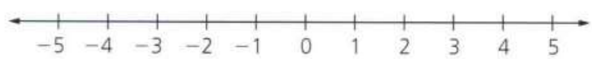



Figura 1.28

d. Un número natural entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

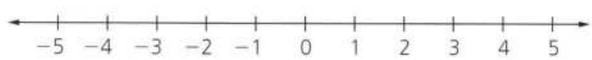



Figura 1.29



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### Razonamiento

**7** Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. VERDADERO / FALSO

a. Un número racional es el representante más simplificado de un conjunto de fracciones equivalentes con este.

b. Todos los números reales son números racionales.

c. Algunos números naturales son números reales.

d. Todos los números irracionales son reales.

### Comunicación

**8** Responde las siguientes preguntas. Justifica. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. ¿Existen infinitos números irracionales?

b. ¿El cero es un número racional?

c. ¿Por qué el conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales?

d. ¿Ningún número racional es irracional?

## Expresiones decimales de los números reales

### Razonamiento

**9** Marca frente a cada número qué tipo de número decimal es la expresión decimal correspondiente. SELECCIÓN MÚLTIPLE

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $\frac{3}{8}$ | Finito | Periódico | Infinito |
| b. $\frac{1}{6}$ | Finito | Periódico | Infinito |
| c. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ | Finito | Periódico | Infinito |
| d. $\frac{12}{4}$ | Finito | Periódico | Infinito |

### Ejercitación

**10** Escribe tres ejemplos de cada uno de los decimales pedidos. En cada caso escribe también su expresión como fracción. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Periódico cuyo periodo empiece inmediatamente después de la coma decimal

b. Infinito

c. Periódico cuyo periodo no empiece inmediatamente después de la coma decimal

d. Finito

## Desigualdades en los números reales

### Resolución de problemas

**11** Observa la Tabla 1.12 en la que se registra las millas que recorrió cada deportista. Recuerda que una milla son aproximadamente 1 600 metros. PREGUNTA ABIERTA

| Deportista | Millas recorridas |
|---|---|
| Patricia | 3,5 |
| Adriana | $\frac{16}{3}$ |
| Marisol | $\frac{34}{12}$ |

Tabla 1.12

a. ¿Cuál de las deportistas hizo el mayor recorrido?

b. ¿Cuál de las deportistas hizo el menor recorrido?

c. Ordena los nombres de las deportistas de mayor a menor recorrido.

**12** Un padre y su hijo se llevan 22 años. Determina en qué periodo de sus vidas, la edad del padre excede en más de 6 años al doble de la edad del hijo. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**13** Un automóvil se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 100 km/h y 150 km/h.

¿Entre qué valores oscila la distancia del automóvil al punto de partida luego de 3 horas? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## Valor absoluto

**14** Realiza las siguientes operaciones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $|-7+2|$

b. $|(|-5|-|-8|)|$

c. $|(|-9|+|2|\cdot|-5|)|$

d. $|(|-4|+(-4))|$

e. $|-9|\cdot|5-3|-|-4|\div|-2|$

f. $|-8+(-3)|\cdot|-5|$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Funciones

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ya sabemos

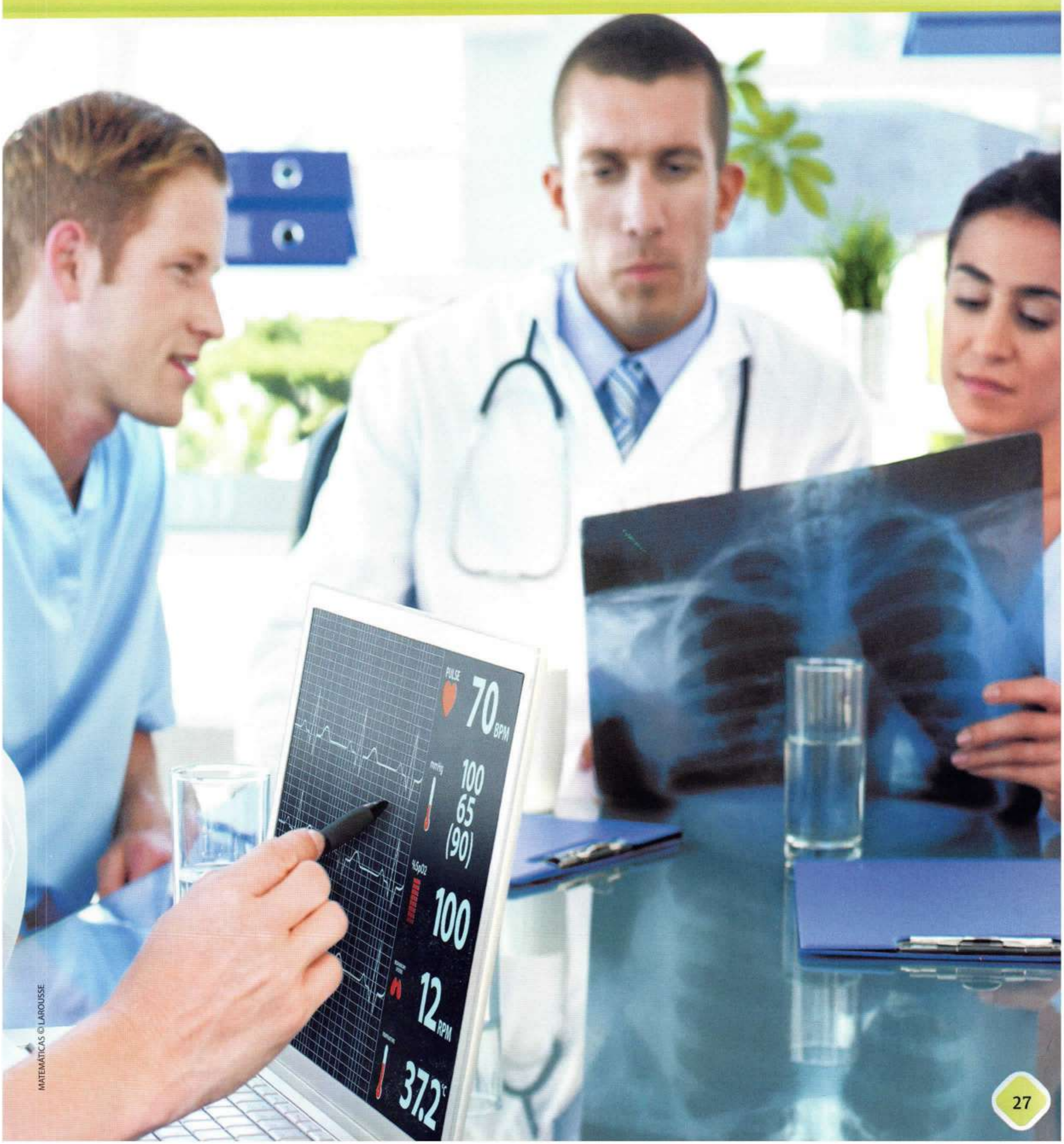
- Identificar cómo pueden variar dos magnitudes.

## Vamos a aprender

- A reconocer y caracterizar funciones.

## Nos sirve para

- Interpretar el mundo mediante expresiones matemáticas.



# 1 Concepto de función. Dominio y recorrido

**Saberes previos**

¿De qué depende el valor que se paga por la compra de las unidades de cierto producto?

**Analiza**

Algunas situaciones de la vida cotidiana pueden expresarse como funciones.

- ¿Cómo puede expresarse la relación entre el consumo de gasolina de un auto y los kilómetros que recorre?

**Conoce**

## 1.1 Función real

Para el caso del consumo de gasolina de un auto se puede plantear la siguiente relación:

$$y = f(x)$$

En la cual $y$ es la gasolina usada y $x$, los kilómetros recorridos e indicaría que la gasolina usada depende del número de kilómetros recorridos por el auto.

Una **función real $f$ de variable real** es una regla que asigna a cada número $x$ de un subconjunto de $\mathbb{R}$ un único número real $y$. Se escribe $y = f(x)$, y se dice que $y$ es la imagen de $x$ bajo $f$.

El subconjunto de números reales para los que la función está definida se conoce como **dominio de $f$**, y se denota **$D(f)$**. Los valores que toma la imagen forman un subconjunto denominado **imagen**, **rango** o **recorrido de $f$**, y se denota **$R(f)$**.

$$f: D(f) \longrightarrow R(f)$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

El número real $x$ que pertenece al dominio de una función $f$ recibe el nombre de **variable independiente**. El número $y$ asociado por $f$ al valor $x$ se denomina **variable dependiente** . Las funciones se pueden representar en el plano cartesiano y en él el eje $X$ corresponde a la variable independiente y el eje $Y$ a la dependiente.

**Ejemplo 1**

La función con la que a cada número real $x$ se le asigna su cuadrado se puede representar matemáticamente en una tabla de valores (Tabla 2.1), una gráfica (Figura 2.1) o a través de la expresión algebraica $y = f(x) = x^2$, donde $x$ es la variable independiente y $y$ es la variable dependiente.

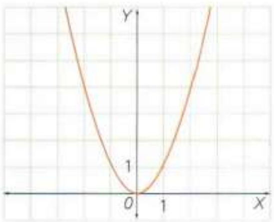


Figura 2.1

| $x$ | ... | $-2$ | $-1$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 10 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | ... | 4 | 1 | 0 | 0,25 | 1 | 4 | 100 | ... |

Tabla 2.1

La función anterior se puede evaluar para cualquier valor real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$ y, como la imagen siempre es un número no negativo, $R(f) = [0, +\infty)$.

No todas las funciones se pueden evaluar para cualquier valor real, entre éstas están las funciones radicales con índice radical par y las racionales . Para ellas, es necesario analizar el dominio teniendo en cuenta las restricciones que tienen sus estructuras algebraicas. En las primeras, al evaluar el radicando éste debe dar un número mayor o igual que cero y para las segundas, el denominador no se puede anular. Otro motivo para restringir un dominio puede ser el contexto real en que se encuentra la función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

Observa cómo se determina el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 + 3x$

Como $f$ puede evaluarse para cualquier número real $D(f) = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$

**La función** $g$ solo se puede evaluar para valores de $x$ tales que $x - 3 \geq 0$. Luego, $D(g) = [3, +\infty)$.

c. $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 2}$

La función $h$ no se puede evaluar en los valores de $x$ que anulan el denominador. Por tanto, $D(h) = \mathbb{R} - \{2\}$.

## 1.2 Criterio de la recta vertical

Una manera para determinar si una gráfica representa una función, consiste en trazar una recta vertical (perpendicular al eje $X$) y verificar que corte dicha gráfica en exactamente un punto.

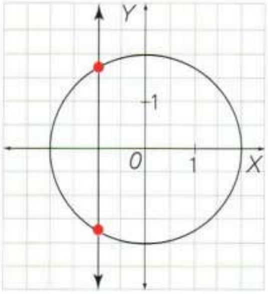


Figura 2.2

En la gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 4$, la recta vertical $x = -1$ (Figura 2.2) corta la circunferencia en dos puntos distintos; por consiguiente, la gráfica corresponde a una relación que no es función.

**Ejemplo 3**

Determina si la gráfica de la Figura 2.3 representa una función.

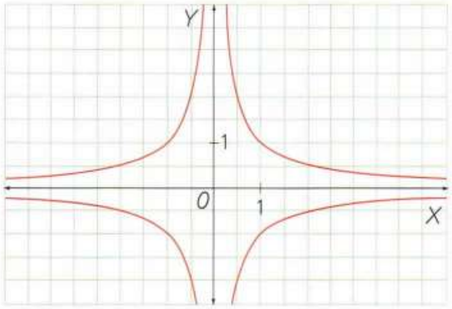


Figura 2.3

- Si se traza la recta $x = -2$, esta interseca la gráfica en dos puntos distintos. Por tanto, la gráfica no representa una función.

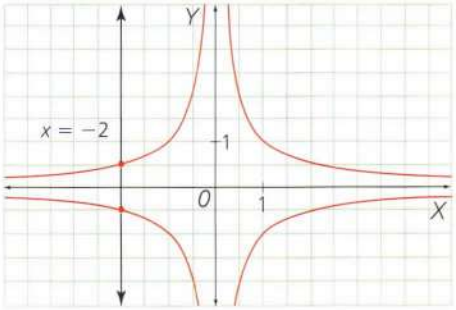


Figura 2.4

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Concepto de función. Dominio y recorrido

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Determina si cada afirmación es verdadera o falsa.

a. Una recta vertical corta la gráfica de una función en al menos un punto.

b. Si se define la función $y = f(x)$ la variable dependiente es $x$.

c. La Tabla 2.2 corresponde a una función:

| $x$ | $-1$ | 3 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 7 | 9 | 9 | 11 |

Tabla 2.2

d. Otra forma de escribir $y = x$ es $f(x) = x$.

e. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)}$ es el conjunto de todos los números reales.

### Modelación

**2** Dibuja una posible gráfica para la función $y = f(x)$ con las siguientes restricciones en su dominio y recorrido.

a. $D(f) = [0, 1] \cup [5, 7]$ y $R(f) = [0, 2]$

b. $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ y $R(f) = \mathbb{R}$

### Razonamiento

**3** Halla el dominio y el recorrido de las funciones representadas en la Figura 2.5 y en la Figura 2.6.

a.

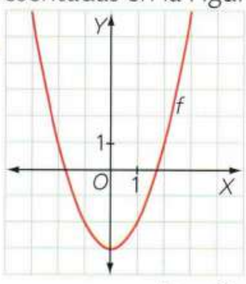



Figura 2.5

b.

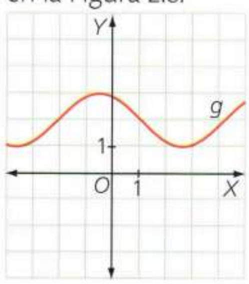



Figura 2.6

### Ejercitación

**4** Encuentra, si existen, los valores que no pertenecen al dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

c. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$

d. $f(x) = \dfrac{x}{3x-4}$

### Modelación

**5** Escribe la función que representa cada enunciado. En cada caso, determina cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.

a. El área ($A$) de un círculo es igual al producto del número $\pi$ por el cuadrado del radio ($r$).

b. El perímetro ($P$) de un cuadrado es cuatro veces la longitud del lado ($l$).

c. El costo mensual de un plan de celular ($C$) es de \$ 41 900 fijos más 1,70 por cada segundo adicional.

d. El valor de $y$ es igual a la mitad del valor de $x$ disminuido en tres octavos.

### Ejercitación

**6** Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

c. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$

e. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

f. $f(x) = \dfrac{x-2}{2x-4}$

g. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

h. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2x^2-3}$

### Razonamiento

**7** Halla el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \sqrt{(x-1)(2x+3)}$

b. $f(x) = 1 + \sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

c. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(3-x)+2}{5-x}}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

e. $f(x) = 3x^2 - 5x$

f. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

g. $f(x) = \dfrac{4x-2}{x-1}$

h. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2}}$

### Modelación

**8** Dibuja en tu cuaderno dos gráficas de relaciones que sean funciones y dos de relaciones que no lo sean.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

### Resolución de problemas

**9** Un arquitecto diseña la fachada de un local construyendo un cuadrado con medio círculo montado sobre uno de sus lados, como se muestra en la Figura 2.7.


Figura 2.7

a. Si $x$ es la longitud del lado del cuadrado, expresa el perímetro de la fachada del local $P(x)$ como una función de $x$.

b. Toma como valor aproximado de $\pi$ el número decimal 3,14 y utiliza una calculadora para completar la tabla.

| **x** | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **P(x)** | | | 24,56 | | | |

Tabla 2.3

c. Traza el bosquejo de la gráfica de la función $P(x)$.

### Resolución de problemas

**10** Observa este acuario y sus dimensiones.

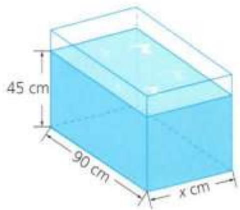



Figura 2.8

a. Escribe una expresión para determinar el volumen $V(x)$ del acuario.

b. ¿Es la expresión que escribiste en el literal a. una función? Explica.

c. Determina el volumen del acuario para las siguientes medidas de $x$.

| **x** | **V(x)** |
|---|---|
| 15 cm | |
| 25 cm | |
| 30 cm | |
| 40 cm | |

Tabla 2.4

d. Traza el bosquejo de la gráfica de $V(x)$.

e. ¿Qué ocurre con el valor de $V(x)$ a medida que x aumenta?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Usa el criterio de la recta vertical para determinar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones.

a.

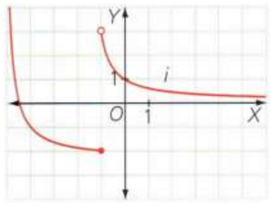



Figura 2.9

b.

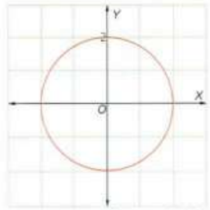



Figura 2.10

c.

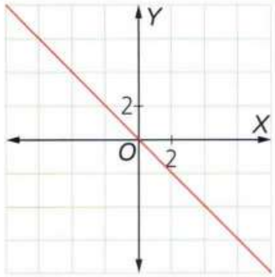



Figura 2.11

d.

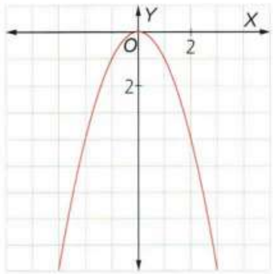



Figura 2.12

Determina el dominio y el recorrido de las funciones que identificaste en el ejercicio.

**ii** Escribe la función tal que a cada número real le hace corresponder:

a. el mismo número.

b. su inverso aditivo.

c. su valor absoluto.

d. el número 3.

e. su cuadrado aumentado en tres unidades.

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

La autoestima influye en tu forma de pensar, sentir y actuar. Una baja autoestima por lo general, trae inseguridad, depresión, ansiedad, etc. y por tanto, reduce la calidad de vida. ¿Cómo representarías mediante una función la relación entre la autoestima y la calidad de vida? Justifica.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Operaciones con funciones

## Saberes previos

Si $f(x) = 3x$, halla $f(1)$, $f(2)$ y $f(1+2)$.

¿Es $f(1+2) = f(1) + f(2)$?

## Analiza

El gasto de litros de combustible de una máquina que procesa fruta está determinado por la función $f(x) = 3x + 3$ para el caso de frutas con semilla, como el mango. Para las frutas sin semilla, como el banano, la función de consumo está dada por $g(x) = 2x + 1$.

- ¿Qué cantidad de combustible se gastará para procesar 300 toneladas de mango y 250 toneladas de banano?

## Conoce

En algunos contextos de la vida cotidiana es necesario usar más de una función para describir un comportamiento determinado. Por ejemplo, para el caso de la procesadora de fruta, se tiene que el total de gasto de combustible está dado por:

$$f(x) + g(x)$$

Así, para determinar la cantidad de combustible usado, se realiza el siguiente procedimiento:

$$f(300) + f(250) = 3(300) + 3 + 2(250) + 1 = 903 + 501 = 1\,404$$

Lo cual indica que para procesar la fruta que se menciona en el enunciado, se requieren 1 404 litros de combustible.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es posible definir la suma $s(x)$, diferencia $d(x)$ y producto $p(x)$, entre ellas.

La **función suma** es $s(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

La **función diferencia** es $d(x) = f(x) - g(x) = (f-g)(x)$

La **función producto** es $p(x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$

El dominio de estas funciones está formado por los números que simultáneamente pertenecen a los dominios de $f$ y $g$, es decir, el que está definido por la intersección de sus dominios:

$$D(f) \cap D(g)$$

### Ejemplo 1

Observa cómo se determinan las funciones diferencia y producto de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, y sus correspondientes dominios.

**Diferencia:**

$$d(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+2}{x-3} = -\frac{x^2+x+3}{x^2-3x}$$

**Producto:**

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+2}{x-3} = \frac{x+2}{x^2-3x}$$

Teniendo en cuenta que $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{3\}$, las funciones no estarán definidas en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ y, por lo tanto, $D(d) \cap D(p) = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

La **función cociente** $q = \dfrac{f}{g}$ se define para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como $q(x) = \dfrac{f[x]}{g[x]}$ con $g(x) \neq 0$.

El dominio de la función $q$ es: $D(q) = D(f) \cap D(g) - \{x / g(x) = 0\}$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

La función cociente de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ se calcula como sigue:

$$\text{Cociente: } q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+2}{x-3}} = \frac{x-3}{x^2+2x}$$

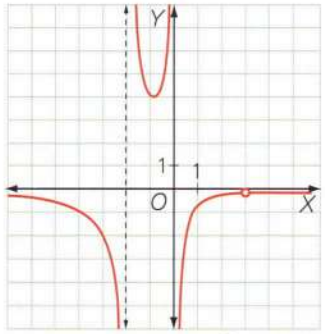


Figura 2.13

En el caso de la función cociente $q$ hay que excluir del dominio los valores que anulan a $g$. Como $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ se anula en $x = 3$, se tiene que $D(q) = \mathbb{R} - \{0, -2, 3\}$.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente puede observarse en la Figura 2.13 que los valores $x = -2$ y $x = 0$ corresponden a asíntotas de la función $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

**Ejemplo 3**

Sean las funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x - 1$, observa cómo se hallan:

a. $D(f + g)$ b. $D(f - g)$

b. $D(f \cdot g)$ d. $D\left(\frac{f}{g}\right)$

Para determinar el dominio de las funciones suma, diferencia y producto se hallan los valores comunes a los dominios de $f(x)$ y $g(x)$. Como $g(x)$ es una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, pero $D(f) = [-2, 2]$, así que:

$$D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \cap [-2, 2] = [-2, 2]$$

Por tanto:

a. $D(f + g) = [-2, 2]$ b. $D(f - g) = [-2, 2]$

c. $D(f \cdot g) = [-2, 2]$

d. Para determinar los valores para los cuales $g(x) = 0$ se resuelve la ecuación $3x - 1 = 0$ y se encuentra que $g(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$. De modo que, $D\left(\frac{f}{g}\right) = [-2, 2] - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Para el caso de las funciones racionales las restricciones, en su mayoría, corresponden a las asíntotas de la función; en otros casos estas restricciones de su dominio, resultan ser agujeros que se muestran en el trazo de la gráfica.

Para las funciones radicales es importante recordar el concepto de inecuación y su respectiva solución como intervalo de los números reales.

Las funciones polinómicas $P(x)$ vienen definidas por un polinomio:

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$, donde $n$ es un entero no negativo y cada coeficiente de $x$ es un número real.

El dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de los números reales.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

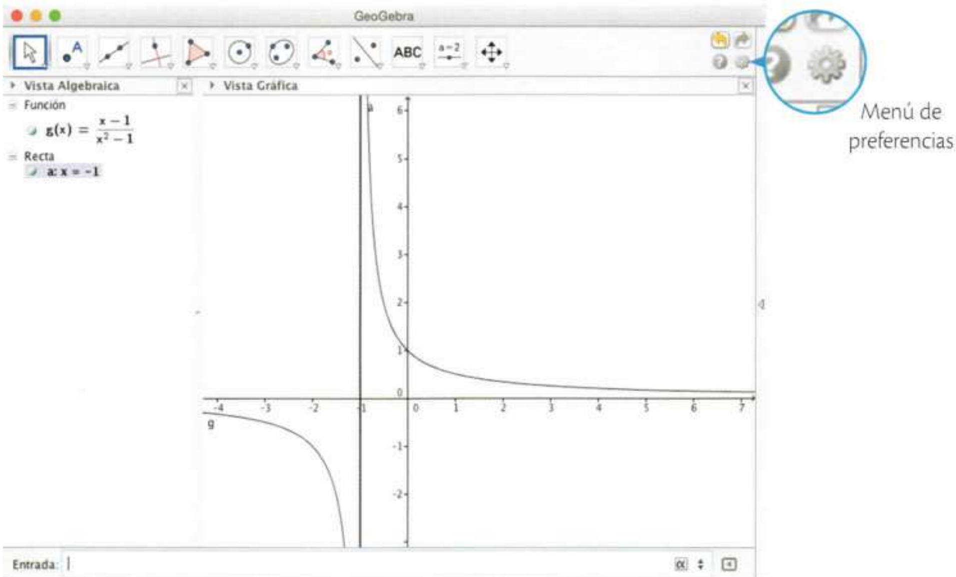
# 2 Operaciones con funciones

## MatemaTICS

**Explora las gráficas de algunas funciones usando GeoGebra**

En el menú inferior de Geogebra se escribe la función. Para el caso de las funciones con asíntotas se deben escribir también las ecuaciones que las determinan.

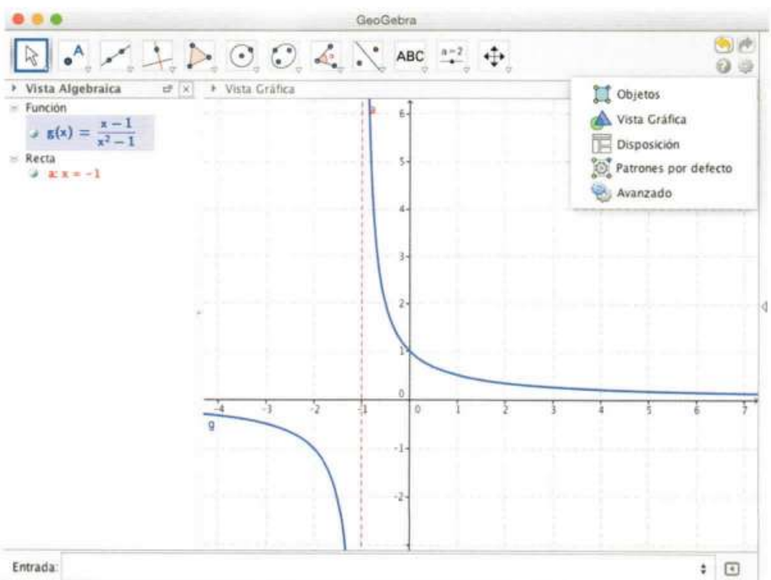
Para la función $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$, se tiene que la asíntota está en la recta $x = -1$:




En el menú de preferencias se despliega una ventana que permite cambiar el color, el tipo de trazo o visualizar la cuadrícula, entre otros ajustes.

La cuadrícula se visualiza activando el menú *Vista gráfica.*

Los colores y tipos de trazo se ajustan en el menú *Objetos.*








MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Actividades de aprendizaje

### Razonamiento

**1** Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} \qquad g(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{x^2-4}$$

$$h(x) = \sqrt{x-1} \qquad j(x) = \frac{1-\sqrt{x^3}}{x^2+1}$$

Calcula las siguiente funciones y determina sus dominios.

a. $f + g$ b. $g - h$

c. $(f + h) \cdot j$ d. $\dfrac{1}{f}$

e. $\dfrac{g}{h}$ f. $\dfrac{h}{g}$

### Razonamiento

**2** Sean las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$, ¿a cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la Figura 2.14 ?

a. $s = f + g$ b. $p = f \cdot g$

c. $q = \dfrac{f}{g}$ d. $d = f - g$

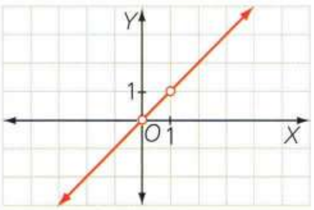



Figura 2.14

### Resolución de problemas

**3** Dadas $g(x) = x^2 + 2x + 1$ y $h(x) = x + 3$, relaciona cada gráfica con la respectiva función suma, diferencia, producto y cociente.

a.

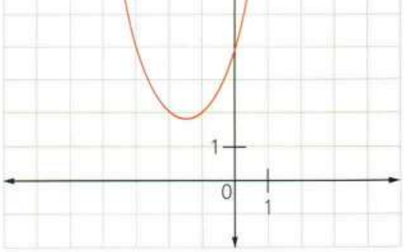



Figura 2.15

b.

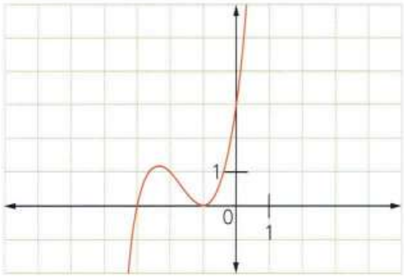



Figura 2.16

c.

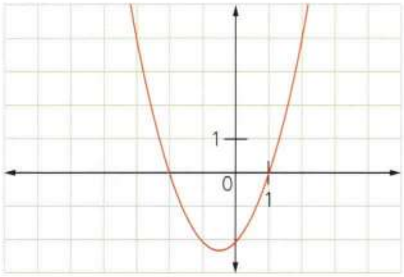



Figura 2.17

d.

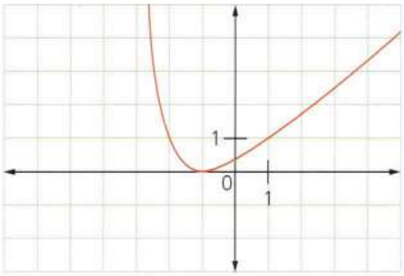



Figura 2.18

## Evaluación del aprendizaje

Observa las funciones:

$f(x) = x^2 - x - 2$ $g(x) = \sqrt{2x-4}$

$h(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ $t(x) = 1 - x^2$

Efectúa diez operaciones entre pares de estas y determina sus dominios.

## Educación ambiental

El número de mariposas de una reserva natural ha disminuido en los últimos cinco años según la función $f(x)= \dfrac{9360}{x} - 800$, donde $x$ representa el tiempo y $f(x)$ el número de mariposas. ¿Qué representa en este contexto el dominio de la función? ¿Qué crees que esté influenciando la disminución de mariposas en la reserva natural?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Composición de funciones



**Saberes previos**

Halla el valor numérico de la expresión $5x + 8$ para $x = -3$, $x = 0$ y $x = 10$.

**Analiza**

Dadas las funciones:

$f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$

- Determina $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Luego comprueba si son iguales.

**Conoce**

Determinar $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$ implica calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(3x - 1) = 3(3x - 1) + 1 = 9x - 2$

$(g \circ f)(x) = g(3x + 1) = 3(3x + 1) - 1 = 9x + 2$

Como se observa, $9x - 2 \neq 9x + 2$, luego $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ o lo que es lo mismo, $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

En la Figura 2.19 se representan las funciones $f$, $g$, $f \circ g$ y $g \circ f$.

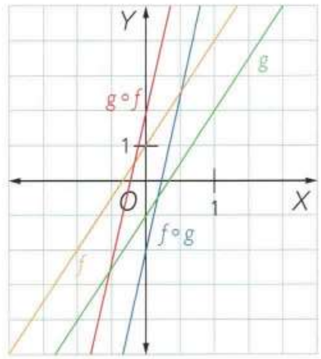



Figura 2.19

Dadas dos funciones, $f$ y $g$, la función $f[g(x)]$ se conoce como **función compuesta** de $f$ y $g$, y se designa por $\boldsymbol{f \circ g}$.

$$(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$$

**Ejemplo 1**

Para las funciones $f(x) = (x - 3)^2$ y $g(x) = x + 1$, se calcula $f \circ g$ y $g \circ f$:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 1) = (x + 1 - 3)^2 = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(x - 3)^2] = (x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$

**Ejemplo 2**

Observa cómo se evalúan $f[g(3)]$ y $g[f(3)]$, dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x$.

En primer lugar se halla $f[g(x)]$:

$$f[g(x)] = f(3 - x) = (3 - x)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$$

Para $x = 3$: $f[g(3)] = 3^2 - 6(3) + 8 = -1$.

Ahora se halla $g[f(x)]$:

$$g[f(x)] = g(x^2 - 1) = 3 - (x^2 - 1) = 4 - x^2$$

Para $x = 3$: $g[f(3)] = 4 - (3)^2 = -5$.

Estos ejemplos permiten comprobar que la composición de funciones no es conmutativa.

## 3.1 Dominio de una función compuesta

Para que un número $a$ pertenezca al dominio de $f \circ g$ se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Que exista $g(a)$, es decir que $a \in D(g)$.
2. Que $g(a) \in D(f)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 3**

La composición de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 2$ está dada por $f[g(x)] = f[x + 2] = \sqrt{x + 2}$.

Observa que $D(g) = \mathbb{R}$ y que $D(f) = [0, +\infty)$; los valores para los cuales $g(x) \geq 0$ son aquellos que satisfacen la desigualdad $x + 2 \geq 0$, es decir, $x \geq -2$. Estos son los valores que, a la vez que pertenecen al dominio de $g$ y son elementos del dominio de $f$. Es decir, el dominio de $f[g(x)]$ es $[-2, +\infty)$.

**Ejemplo 4**

Dadas las funciones $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para hallar el dominio de $f \circ g$ debe analizarse que esto se puede hacer siempre que $x$ esté en el dominio de $g$; por lo tanto, $x \neq 3$. A continuación se halla $f$ siempre que $\dfrac{2}{x-3}$ esté en el dominio de $f$. En este caso se debe cumplir que $\dfrac{2}{x-3} \neq 2$, luego $x \neq 4$.

Así se obtiene que $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{3, 4\}$ y su expresión es:

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{2}{x-3}\right) = \frac{1}{\dfrac{2}{x-3} - 2} = \frac{x-3}{2 - 2x + 6} = \frac{x-3}{8-2x}$$

En la Figura 2.20, se muestran las gráficas de las funciones $f$, $g$ y $f \circ g$.

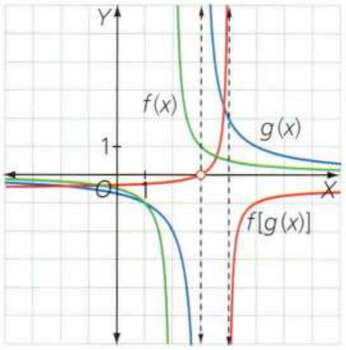


Figura 2.20

## Actividades de aprendizaje

### Razonamiento

**1** Determina $D(f)$ y $D(g)$ dadas las funciones

$f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + x - 2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$

Si es posible calcula los valores de $(f \circ g)(12)$, $(f \circ g)(4)$, $(g \circ f)(3)$ y $(g \circ f)(2)$.

### Resolución de problemas

**2** Un fabricante estima que el número de unidades producidas en una jornada es $q(t) = 30t$, donde $t$ se mide en horas. Además el costo de producción, en pesos, de $q$ unidades viene dado por la función $C(q) = q^2 + q + 1\,500\,000$.

a. ¿Cuántas unidades de producto se obtienen tras dos horas de trabajo? ¿Cuál es su costo de producción?

b. Expresa el costo de producción en función del tiempo.

c. Cuándo el costo de producción es de \$4 290 000, ¿cuál es el costo de producción de una jornada de ocho horas?

d. Halla el dominio de la función $C(q)$ y explica si tiene restricciones.

## Evaluación del aprendizaje

**i** Considera las funciones:

$f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \sqrt{4 - 2x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Calcula las siguientes funciones y halla sus dominios.

a. $(f \circ f)(x)$ b. $(h \circ g)(x)$ c. $(g \circ f)(x)$

**ii** Analiza si la composición de funciones es asociativa y si existe alguna función tal que al componerla con cualquier otra, dé la misma función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Funciones inyectivas y funciones inversas



**Saberes previos**

Dibuja la gráfica de una función que sea cortada por cualquier recta horizontal en solamente un punto.

**Analiza**

El tiempo de espera, en horas, para ser atendido en un banco entre las 9 a. m. y la 1 p. m. está dado por la función $f(x) = -x^2 + 22x - 117$, donde $x$ representa la hora del día.

- ¿Hay horas del día en las que el tiempo de espera sea el mismo o a cada hora el tiempo de espera es diferente?

**Conoce**

En la Figura 2.21 se representa la función $f(x) = -x^2 + 22x - 117$.

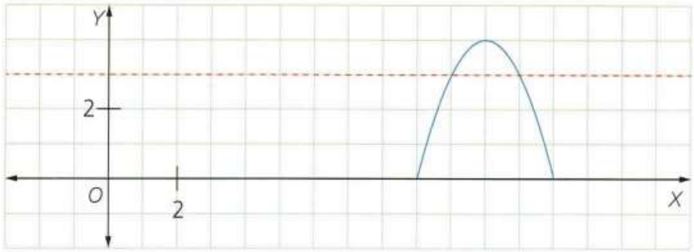



Figura 2.21

Como se observa en la gráfica, entre las 9 de la mañana y la 1 de la tarde hay varios momentos en los cuales el tiempo de espera es el mismo y no ocurre que a cada hora el tiempo de espera sea distinto.

Por ejemplo, a las 10 y a las 12, para comprobarlo se calcula $f(10)$ y $f(12)$.

| | |
|---|---|
| $f(10) = -(10)^2 + 22(10) - 117$ | $f(12) = -(12)^2 + 22(12) - 117$ |
| $f(10) = -100 + 220 - 117$ | $f(12) = -144 + 264 - 117$ |
| $f(10) = 3$ | $f(12) = 3$ |

Con lo cual se identifica que dos elementos diferentes del dominio tienen la misma imagen.

## 4.1 Función inyectiva

Una función $f$ de $D$ en $R$, es una **función inyectiva**, o **uno a uno**, si:

$a \neq b$ en $D$, entonces, $f(a) \neq f(b)$ en $R$ que es equivalente a su contrarrecíproco: $f(a) = f(b)$ en $R$, entonces, $a = b$ en $D$.

**Ejemplo 1**

La función $f(x) = 2x - 1$ es una función inyectiva porque siendo $f(a)=f(b)$ se tiene que $2a-1=2b-1$ de donde al despejar a $a$ en términos de $b$ se deduce que $a = b$, lo cual indica que no es posible encontrar dos valores diferentes en el dominio de $f$, que es $\mathbb{R}$, para los cuales se tenga un mismo valor en su recorrido.

## 4.2 Criterio de la recta horizontal

Una función es inyectiva si y solo si cualquier recta paralela al eje $X$ corta su gráfica en un único punto.

**Ejemplo 2**

Algunas funciones no son inyectivas, como es el caso de las funciones cuadráticas, pues tienen por representación gráfica una parábola, y sin importar si abre hacia arriba o hacia abajo, existen infinitas rectas paralelas al eje $X$ que la cortan en más de un punto.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 4.3 Inversa de una función

Sea $f$ una función inyectiva con dominio $D$ y recorrido $R$. La **función inversa** de $f$ es una función $g$, de dominio $R$ y recorrido $D$, tal que:

$$f[g(x)] = x \text{ para cada } x \text{ en } R$$

$$g[f(x)] = x \text{ para cada } x \text{ en } D$$

La inversa de la función $f$ se denota también por $f^{-1}$.

**Ejemplo 3**

En un departamento, las autoridades sanitarias lanzan una campaña de vacunación cada vez que se acerca la temporada invernal. La Tabla 2.5 muestra algunos valores de la función $f$ que relaciona el porcentaje de vacunados con el costo de la vacunación.

Así, si se pretende vacunar al 25% de la población, la función indica que se debe disponer de un presupuesto de \$ 249 990 000, ya que $f(25) = 249\,990\,000$.

Pero se puede cambiar el punto de vista y preguntarse qué porcentaje de la población podrá ser vacunada si la partida asignada este año para la vacunación es de \$ 321 420 000.

Esta nueva función relaciona el presupuesto asignado con el porcentaje de población vacunada. Así pues, $f^{-1}(y)$ proporciona el porcentaje de la población que se podrá vacunar con un presupuesto de $y$ pesos. Como se ve, $f$ y $f^{-1}$ presentan la misma información, pero expresada desde puntos de vista diferentes.

| Población vacunada (%) | Costo (millones de pesos) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 57,9 |
| 10 | 118,41 |
| 15 | 182,43 |
| 20 | 236,85 |
| 25 | 249,99 |
| 30 | 321,42 |
| 35 | 397,05 |

Tabla 2.5

## 4.4 Forma de hallar la inversa de una función

Para hallar la inversa de $f$ se despeja $x$, si es posible. Después se intercambian las variables $x$ y $y$.

**Ejemplo 4**

Se considera la función $f(x) = y = \dfrac{1}{x-3}$. Siempre que estén definidas las expresiones, se tiene que $x - 3 = \dfrac{1}{y}$, por lo tanto, $x = \dfrac{1}{y} + 3 = \dfrac{1+3y}{y}$.

La inversa de la función es $x = f^{-1}(y) = \dfrac{1+3y}{y}$.

Como usualmente se llama $x$ a la variable independiente, se escribe $y = \dfrac{1+3x}{x}$.

En la Figura 2.22 se muestra la gráfica de $f$ y $f^{-1}$.

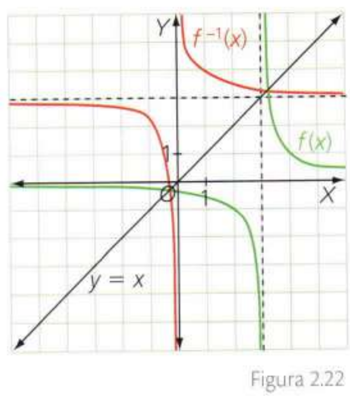



Figura 2.22

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Funciones inyectivas y funciones inversas

## 4.5 Función inversa y composición de funciones

La composición de una función $f$ con su inversa $f^{-1}$ cumple que

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

**Ejemplo 5**

Observa cómo se determina la inversa de la función inyectiva $f(x) = 2x + 11$:

1. Se escribe $f(x) = 2x + 11$ como $y = 2x + 11$.
2. Se despeja la variable $x$: $x = \dfrac{y - 11}{2}$.
3. Se intercambian las variables: $y = \dfrac{x - 11}{2}$.

Así, $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 11}{2}$.

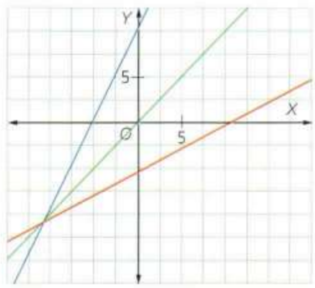


Figura 2.23

En la Figura 2.23, la recta en color azul corresponde a $f$ y la roja, a su inversa. Observa que las dos rectas son simétricas con respecto a la recta $y = x$ que aparece con color verde en la gráfica.

Además, se verifica que:

$$(f^{-1} \circ f)\,(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+11) = \frac{(2x + 11) - 11}{2} = x \text{ y}$$

$$(f \circ f^{-1})\,(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x - 11}{2}\right) = 2\left(\frac{x - 11}{2}\right) + 11 = x$$

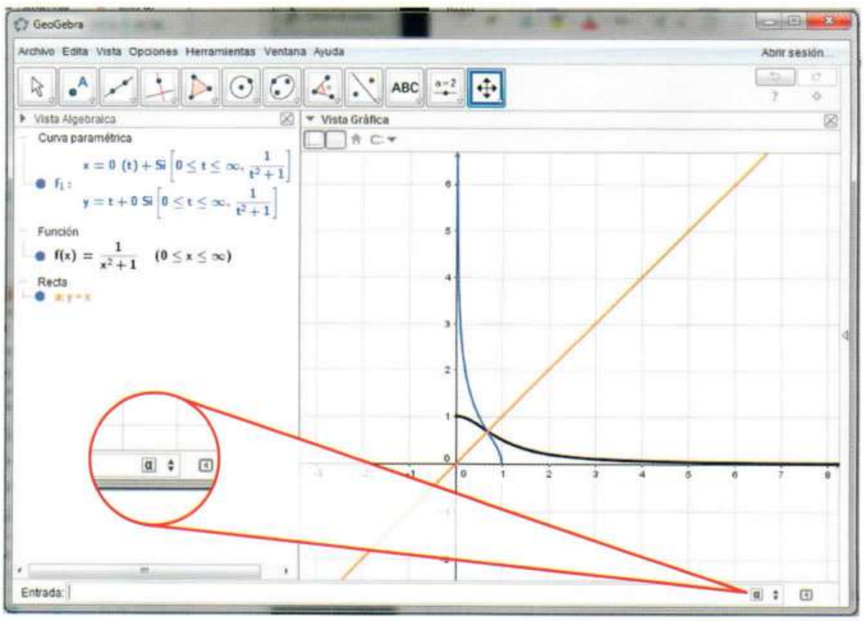
**MatemaTICS**

**Grafica una función y su inversa con GeoGebra**

Para graficar la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ con dominio $[0, +\infty)$ y su inversa se llevan a cabo los siguientes pasos.

- En la barra inferior donde se lee *Entrada*, se digita la función de la forma $y = f(x)$, así:

  Función[1/(x^ 2+1),0,∞] y se presiona *Enter*.
- El símbolo ∞ sale al dar clic sobre el ícono α.
- Para graficar $y = x$, se digita esa expresión en la barra de *Entrada*.
- En la barra de tareas se selecciona la opción *Simetría Axial* y se da clic en la función $f(x)$ y luego en la recta $y = x$.
- En el espacio de trabajo aparece de color azul la gráfica de la función inversa de $f(x)$.




MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Determina cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.

a. $f(x) = 2x - 1$ b. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

c. $f(x) = 1 - x^2$ d. $f(x) = 2x^4$

**2** Calcula la función inversa en cada caso, cuando sea posible, y su correspondiente dominio.

a. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 1}$ b. $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + 2}}$

c. $h(x) = a^x$ d. $g(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

### Razonamiento

**3** Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones. Para el caso de las funciones no inyectivas especifica dos valores distintos $x_1$ y $x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

a. $f(x) = -2x + 4$ b. $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

c. $f(x) = x^2 + 2$ d. $f(x) = 2x^2 + 3x$

e. $f(x) = \dfrac{x - 3}{2}$

### Razonamiento

**4** Encuentra la expresión y el dominio de la función inversa de:

$f(x) = \sqrt{2x - 3}$.

¿A qué es igual $f^{-1}(3)$? ¿Existe $f^{-1}(-3)$?

### Resolución de problemas

**5** Dibuja en cada caso la inversa de la función. Luego determina la expresión algebraica de la inversa que dibujaste. Ten en cuenta los intervalos planteados para cada función.

a.

$y = 3x + 1$

$(-\infty, \infty)$

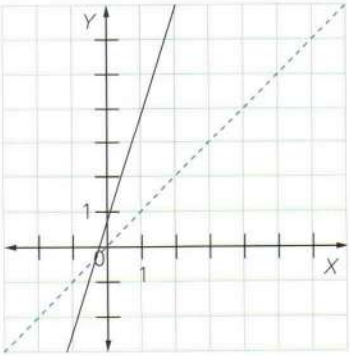



Figura 2.24

b.

$y = 3x^2 + 2$

Intervalo $[0, \infty)$

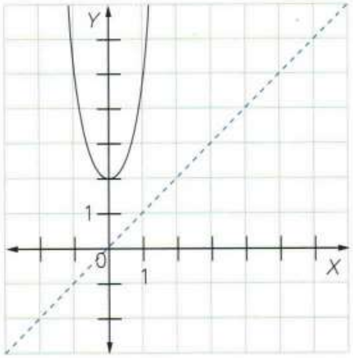



Figura 2.25

c.

$y = x^3 - 1$

$(-\infty, \infty)$

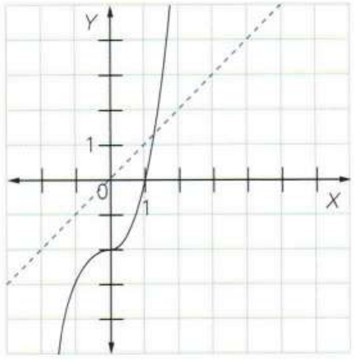



Figura 2.26

d.

$y = \sqrt{x + 1}$

Intervalo $[-1, \infty)$

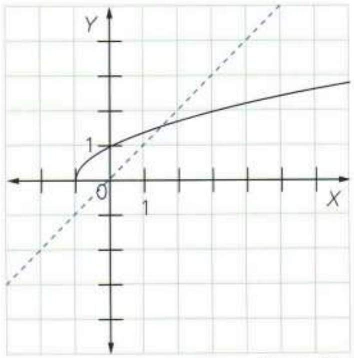



Figura 2.27

## Evaluación del aprendizaje

**i** Utiliza la gráfica de la función $f$ de la Figura 2.28 y el criterio de la recta horizontal para determinar si $f$ es inyectiva. Halla la expresión algebraica de $f^{-1}$ y verifica que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.

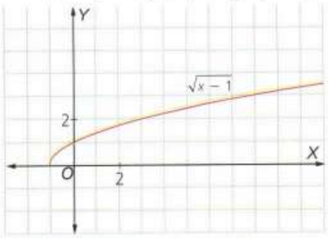



Figura 2.28

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Algunas propiedades de las funciones

## Saberes previos

Traza la gráfica de una función que, vista de izquierda a derecha, ascienda entre $x = 0$ y $x = 5$ y descienda entre $x = 5$ y $x = 10$. ¿Qué ocurre en el punto $x = 5$ en la gráfica que construiste?

## Analiza

En una compañía se organizó un concurso de reciclaje en el que participaban todos los departamentos. Para cantidades menores o iguales que 10 kg, el departamento recibía 20 puntos; para cantidades por encima de 10 kg hasta los 20 kg, recibía 40 puntos; para aquellas mayores que 20 kg y menores o iguales que 30 kg, 60 puntos y, finalmente, para cantidades superiores a 30 kg hasta los 40 kg, recibía 80 puntos.

- ¿Cuál es la representación gráfica de la función que describe la metodología del concurso?

## Conoce

En la situación planteada se tiene que:

- Si un departamento recolecta cantidades iguales o menores que 10 kg, como por ejemplo 3, 5, 8,5 kg, etc., recibe 20 puntos.
- Si un departamento recolecta por encima de 10 kg hasta los 20 kg recibe 40 puntos, y así sucesivamente.

La gráfica que describe la situación se presenta en la Figura 2.29. En ella se observa que no hay continuidad en el trazo porque hay saltos en los puntajes como los que se observan de 20 a 40 cuando se reciclan 10 kilogramos, por ejemplo. Esto significa que no se asignarán puntajes como 25 o 38.

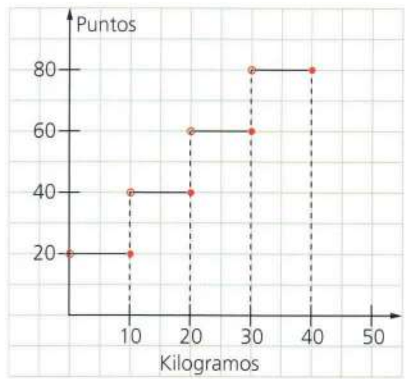



Figura 2.29

## 5.1 Continuidad y discontinuidades

Intuitivamente una función $f$ es **continua** si su gráfica no tiene interrupciones ni saltos, ni oscilaciones indefinidas, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.

## 5.2 Crecimiento y decrecimiento de funciones

Una **función** es **creciente** en su dominio si al aumentar los valores de la variable $x$ también aumentan los valores de $y = f(x)$. Es decir, si $x_2 \geq x_1$, entonces $f(x_2) \geq f(x_1)$. Una **función** es **decreciente** si al aumentar los valores de $x$, disminuyen los de $y = f(x)$, es decir, si $x_2 \geq x_1$, entonces $f(x_2) \leq f(x_1)$.

**Ejemplo 1**

En la gráfica de la Figura 2.30 se representa una función creciente y en la de la Figura 2.31 una función decreciente.

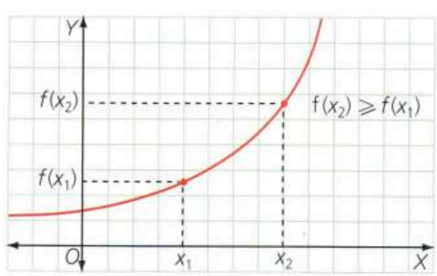



Figura 2.30

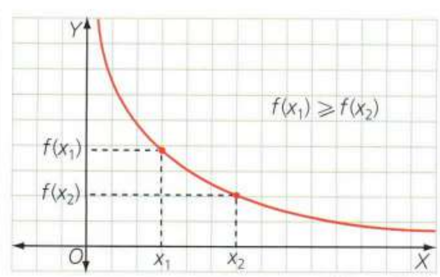



Figura 2.31

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 5.3 Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

Se dice que una función tiene un **máximo relativo** para un cierto valor de la variable independiente $x$ si en él la imagen es mayor o igual que la de todos los valores próximos a él. En dichos puntos, la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

Análogamente se dice que tiene un **mínimo relativo** para un cierto valor de la variable independiente $x$ si en él la imagen es menor o igual que la de todos los valores próximos a él. En dichos puntos, la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

$f(x)$ tiene un **máximo** o un **mínimo relativos** en $P[a, f(a)]$ si, respectivamente, $f(a) \geqslant f(x)$ o $f(a) \leqslant f(x)$ para todos los valores de $x$ situados en algún intervalo de centro $x = a$.

En general, las funciones no son crecientes o decrecientes en todo su dominio. Para describir su comportamiento se indican los intervalos abiertos en los que la función crece o decrece. Los puntos en los que se producen los cambios pueden ser discontinuidades de la función o extremos relativos (máximos o mínimos).

**Ejemplo 2**

En la Figura 2.32 se muestra la gráfica de una función que es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, 4)$ y decreciente en $(-2, 2) \cup (4, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$. En $x = 4$, la función pasa de ser creciente a ser decreciente, pero no hay máximo sino una discontinuidad.

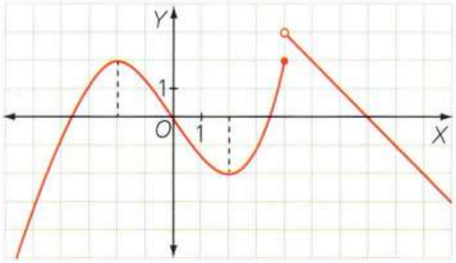


Figura 2.32

**Ejemplo 3**

La gráfica que se muestra en la Figura 2.33 describe los cambios de temperatura en una determinada zona del país durante un día. Se muestran los intervalos de tiempo en los cuales la temperatura bajó, subió o se mantuvo constante.

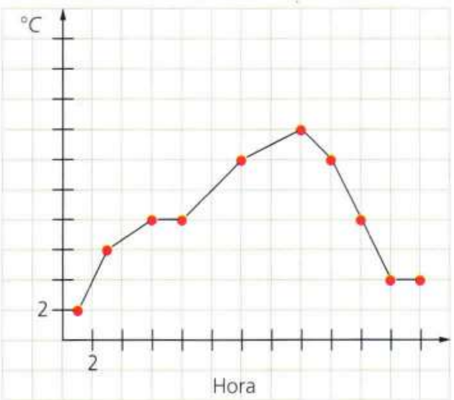


Figura 2.33

Se puede afirmar que en ese lugar la temperatura máxima fue de 14 °C y se presentó a las 4 p. m. (16 en la gráfica). También se puede afirmar que la temperatura mínima fue de 2 °C y se presentó a la 1 a. m.

De forma similar se puede afirmar que entre las 6 y las 8 de la mañana la temperatura se mantuvo en 8 °C y que entre las 10 y las 12 de la noche la temperatura fue de 4 °C.

El mayor aumento de temperatura se presentó entre las 12 m y las 4 p. m., y el mayor descenso de la temperatura se dio entre las 6 p. m. y las 10 p. m.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 5.4 Tendencia de una función

En muchas ocasiones al analizar una función es necesario saber cómo se comporta la función para valores muy grandes (positivos o negativos) de la variable independiente.

Se pueden encontrar funciones que crecen o decrecen indefinidamente, funciones que se acercan cada vez más a un valor o funciones que oscilan.

**Ejemplo 4**

Las Figuras 2.34 a 2.37 corresponden a funciones de diferentes comportamientos.

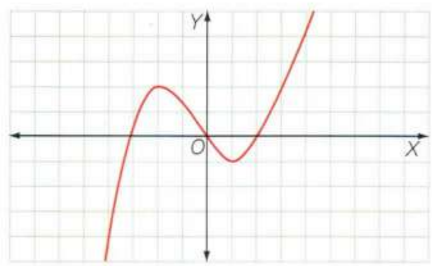


Figura 2.34

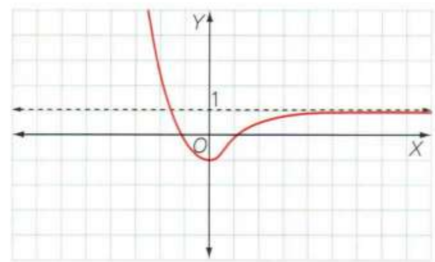


Figura 2.35

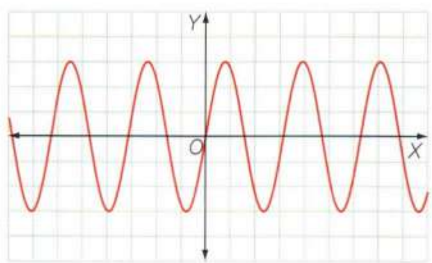


Figura 2.36

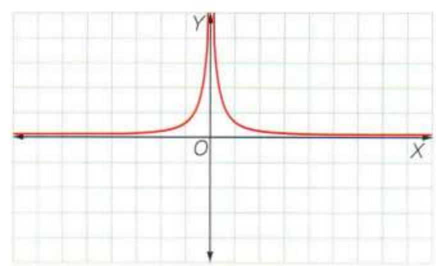


Figura 2.37

La Figura 2.34 corresponde a una función que crece indefinidamente cuando la variable independiente crece. Se dice entonces que la función tiende a más infinito $[f(x) \to +\infty]$ cuando $x$ tiende a más infinito $(x \to +\infty)$. Es importante anotar que en este caso se observan claramente un máximo y un mínimo relativos.

En la función de la Figura 2.35, cuando la variable independiente toma valores grandes, el valor de la función se aproxima cada vez más al valor 1 y, por lo tanto, su gráfica se aproxima cada vez más a la recta $y = 1$. Se dice que la función tiene una **asíntota horizontal**.

En general, la ecuación de una asíntota horizontal es de la forma $y = k$, y se presentan cuando $f(x) \to k$ siempre que $x \to \pm\infty$. La ecuación de una asíntota vertical es de la forma $x = k$ y ocurre siempre que $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to k$.

La función de la Figura 2.36 oscila y tiene varios extremos relativos.

La función de la Figura 2.37 crece indefinidamente $(f(x) \to \infty)$ cuando $x$ se acerca a cero por la derecha o por la izquierda por lo que $x = 0$ es una asíntota vertical. En cambio, se aproxima a cero $(f(x) \to 0)$ cuando $x$ toma valores tan grandes o tan pequeños como se quiera lo que significa que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Observa las gráficas de las funciones de las Figuras 2.38 y 2.39 e indica:

a. Si son continuas o, en caso contrario, en qué puntos presentan discontinuidades.

b. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y si tienen máximos o mínimos relativos.

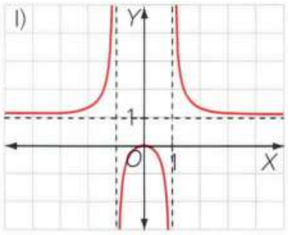


Figura 2.38

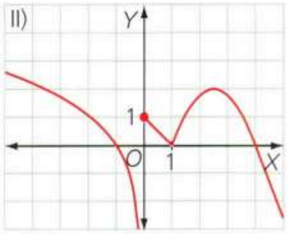


Figura 2.39

### Comunicación

**2** Analiza la continuidad de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b. $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$

### Resolución de problemas

**3** Los encargados de un parque plantean hacer una inversión extraordinaria para eliminar los desechos arrojados por los visitantes. El costo de esta labor, expresado en millones de pesos, con $p$ la cantidad de residuos eliminados, es:

$$C(p) = \frac{16p}{110 - p}$$

a. Decide si esta función es creciente o decreciente.

b. Calcula cuánto costaría no eliminar ningún residuo, eliminar solo el 50% de los residuos y eliminarlos todos.

c. ¿Para qué puntos del dominio de $C$ interesa en la práctica estudiar esta función? ¿Qué valores toma $C$ en esa parte de su dominio?

d. Dibuja la gráfica de la función $C$.

e. Determina si la función tiene máximos o mínimos.

f. ¿Qué valor no puede tomar $p$? Explica tu respuesta.

g. Determina si la función tiene asíntotas e interpreta su significado en el contexto.

## Evaluación del aprendizaje

**i** Completa las tablas de valores 2.6 y 2.7, usando la calculadora. Luego traza una curva suave que una los puntos para obtener una gráfica aproximada de las funciones.

Estudia el dominio y el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la tendencia de las funciones obtenidas.

a.

| $x$ | $-10$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $10$ | $100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | | | | | | | | | |

Tabla 2.6

b.

| $x$ | $-100$ | $-10$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $10$ | $100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{x-1}{x}\right)$ | | | | | | | | | |

Tabla 2.7

**ii** Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Escribe sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. Estudia su tendencia indicando cuál es el comportamiento de la función cuando $x$ tiende a más infinito y a menos infinito.

a.

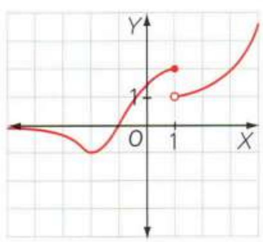


Figura 2.40

b.

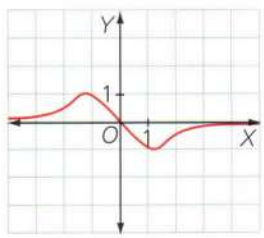


Figura 2.41

c.

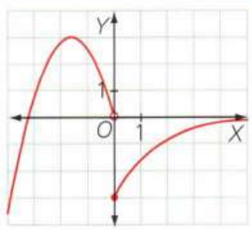


Figura 2.42

d.

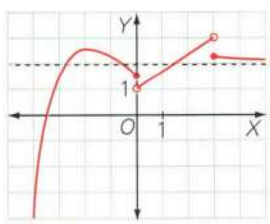


Figura 2.43

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Funciones pares y funciones impares

## Saberes previos

Traza la gráfica de $f(x) = x^2$, halla $f(2)$ y $f(-2)$; $f(-3)$ y $f(3)$; $f(-m)$ y $f(m)$. Compara los resultados de cada pareja y escribe una conclusión respecto a lo obtenido.

## Analiza

Una de las técnicas para graficar una función se basa en observar si conserva alguna simetría, como la gráfica que se muestra en la Figura 2.44.

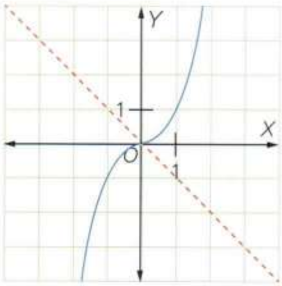



Figura 2.44

- ¿Cómo se puede analizar la simetría en esta función?

## Conoce

Al observar la gráfica de la Figura 2.39, se puede ver construida la recta $y = -x$. Esta recta se comporta como un "espejo" para la función, de tal manera que si se grafican puntos en el intervalo $[0, +\infty)$, la parte de la función que está en el intervalo $(-\infty, 0)$ puede encontrarse reflejando los primeros puntos dibujados.

Algunas funciones cumplen estas propiedades de verse "simétricas" con respecto a alguna recta que hace las veces de eje de simetría.

Una función es **par** si para todo $x$ en su dominio se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Una función es **impar** si para todo $x$ en su dominio se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Gráficamente una función par es simétrica con respecto al eje $Y$. De igual forma, una función impar es simétrica gráficamente con respecto al origen del plano cartesiano.

### Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - 1$ se observa que

$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$.

Es decir que $f(-x) = f(x)$, en conclusión, $f$ es una función par.

Si $g(x) = x^5 + x$, se tiene que

$g(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -g(x)$.

Es decir que $g(-x) = -g(x)$, en conclusión, la función es impar.

Si $h(x) = x + 3$ se observa que

$h(-x) = -x + 3$ y que esta expresión no es ni $h(x)$ ni $-h(x)$, por lo tanto, la función no es par ni impar.

### Ejemplo 2

Las funciones de las Figuras 2.45 y 2.46 son impares.

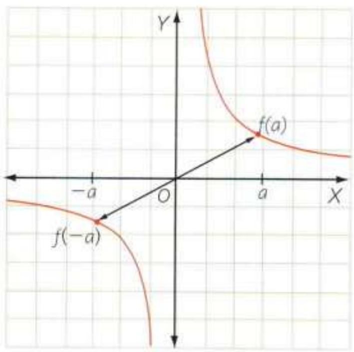



Figura 2.45

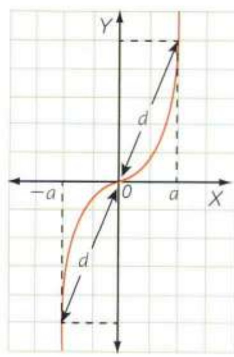



Figura 2.46

En ambas gráficas, se observa que el punto $(a, f(a))$ y el punto $(-a, f(-a))$ equidistan del origen, así que la recta $y = -x$ es un eje de simetría y, por lo tanto, las funciones son impares.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Evalúa las siguientes funciones en $x = 4$ y $x = -4$, y determina cuáles son pares y cuáles no.

a. $f(x) = |x|$ b. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

c. $f(x) = 5 - 3x^2$ d. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

e. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ f. $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$

**2** Explica por qué las siguientes funciones no son pares.

a. $f(x) = x + 3$ b. $f(x) = 3x^3$

c. $f(x) = 3 + 4x$ d. $f(x) = \sqrt{2x}$

### Razonamiento

**3** Determina si la función de la Figura 2.47 es par.

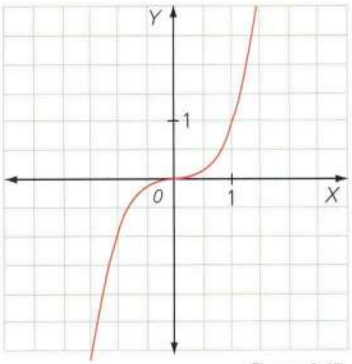



Figura 2.47

### Modelación

**4** Traza las gráficas de $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = |x - 1|$, y determina cuál de ellas corresponde a una función par.

### Comunicación

**5** Explica por qué la Figura 2.48 representa una función par.

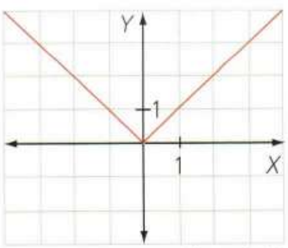



Figura 2.48

**6** La función representada en la Figura 2.49 se denomina función idéntica. Escribe dos razones de por qué es impar.

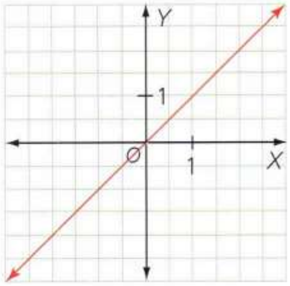



Figura 2.49

### Resolución de problemas

**7** Analiza la gráfica de la Figura 2.50. ¿Representan una función par o impar? Justifica tu respuesta.

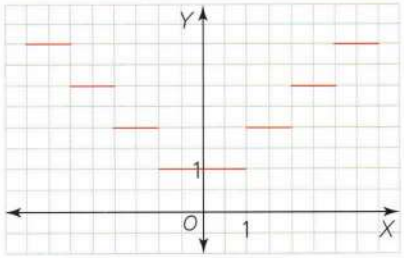



Figura 2.50

## Evaluación del aprendizaje

Analiza la gráfica de cada una de las siguientes funciones e indica si son pares o impares.

a. $f(x) = x^2$ b. $f(x) = -5x + 1$

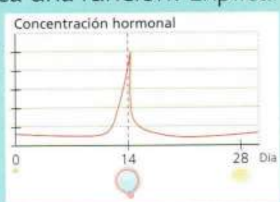
c. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ d. $f(x) = \frac{3x^3}{4}$

e. $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x - 1}}{2}$ f. $f(x) = \frac{5x^3 + 3}{\sqrt{x - 4}}$

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

La gráfica muestra el ciclo de una mujer y el aumento de la hormona luteinizante en la orina. ¿Es esta gráfica una función? Explica.

¿Qué implicaciones tiene un embarazo a temprana edad?




MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Funciones periódicas

### Saberes previos

Supón que te subes a una rueda panorámica de un parque de atracciones. Explica cómo varía tu posición si das cinco vueltas completas. Traza una gráfica que muestre tu posición desde el comienzo hasta que acabes de dar las cinco vueltas.

### Analiza

El electrocardiograma (ECG) es una prueba diagnóstica que evalúa el ritmo y la función cardiaca a través de un registro de la actividad eléctrica del corazón.

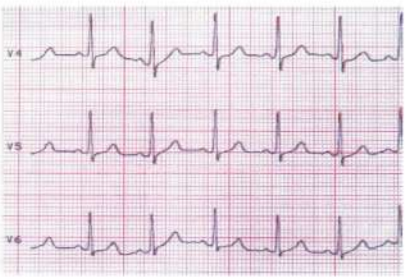


Figura 2.51

- ¿Cómo se interpretan las imágenes en un electrocardiograma?

### Conoce

Hay situaciones de la vida cotidiana que funcionan teniendo en cuenta diferentes periodos. Por ejemplo, los latidos del corazón llevan un ritmo constante que les permite ser medidos e interpretados en un electrocardiograma. Por ejemplo, si se interpreta la imagen de la Figura 2.51 se identifica que cada cierto periodo de tiempo se da un latido, que son los picos más pronunciados en ella. Este tipo de comportamientos corresponden a las denominadas funciones periódicas.

Una **función** $f$ de variable real es **periódica**, de periodo $T$, si cumple dos condiciones:

i. $x + T$ está en el dominio de $f$ y

ii. $f(x + T) = f(x)$.

Si se conoce la gráfica de la función en un intervalo de amplitud $T$, se puede construir toda la gráfica trasladando la parte conocida tanto a la derecha como a la izquierda por todo el dominio de $f$.

**Ejemplo 1**

La gráfica de la Figura 2.52 corresponde a una función que se repite en intervalos de 4 unidades, por lo que el período es $T = 4$.

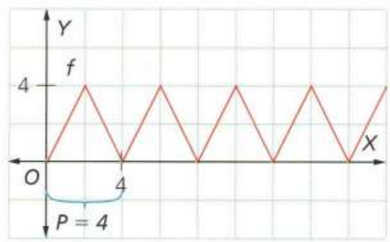



Figura 2.52

**Ejemplo 2**

La gráfica de la Figura 2.53 no parece tener un periodo definido, pero al representar más valores de su dominio es evidente que se trata de una función periódica (Figura 2.54).

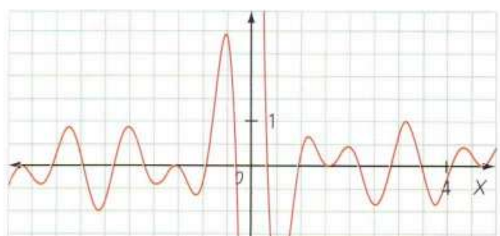



Figura 2.53

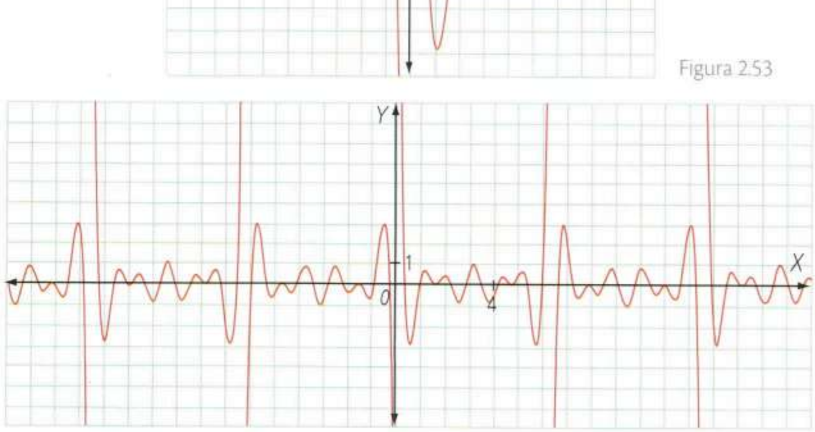



Figura 2.54

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 3**

La función parte decimal o mantisa es aquella que a cada número $x$ le asigna su parte decimal. Se representa algebraicamente por $f(x) = x - [x]$ y gráficamente como se aprecia en la Figura 2.55. Esta función se repite en cada unidad, por lo que, su periodo es 1.

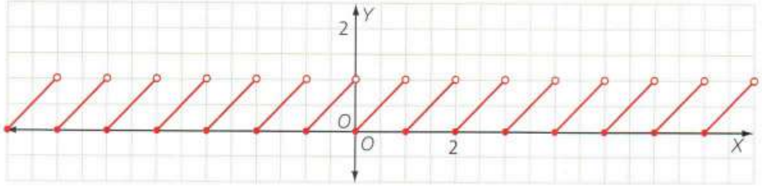



Figura 2.55

La gráfica de la función $f(x) = x + 1 - [x]$ se obtiene trasladando la gráfica anterior una unidad hacia arriba, pero esto no afecta su periodicidad.

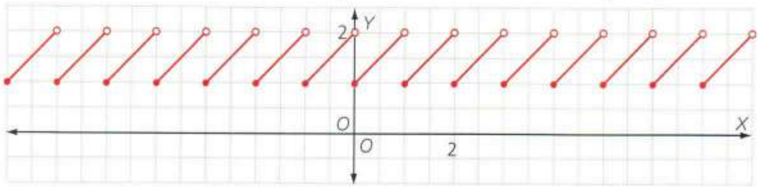



Figura 2.56

## Actividades de aprendizaje

### Razonamiento

**1** Encuentra el periodo de la función $f(x) = \frac{[x]}{2}$.

La función parte entera, notada como $f(x) = [x]$ es aquella que a cada número $x$; le asigna el mayor número entero menor o igual que él.

**2** Identifica el periodo de las funciones representadas en las figuras 2.57 y 2.58.

a.

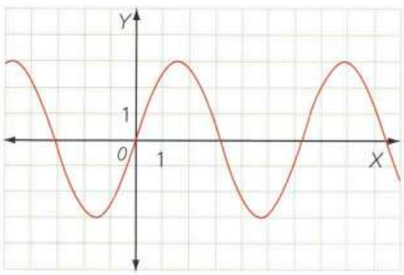



Figura 2.57

b.

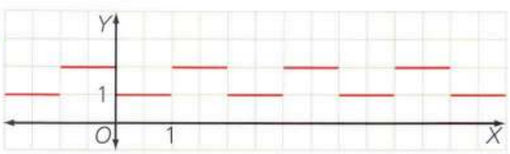



Figura 2.58

### Comunicación

**3** Explica cómo cambiarían el periodo y la gráfica de $f(x) = 2x - [x]$ con respecto a la función parte entera.

### Resolución de problemas

**4** Una función $f(x)$ asocia a cada número real su parte decimal. Por ejemplo: $f(2{,}6) = 0{,}6$; $f(24{,}2) = 0{,}2$.

a. Dibuja su gráfica.

b. ¿Es periódica? En caso afirmativo indica su periodo.

## Evaluación del aprendizaje

Observa la gráfica de la Figura 2.59.

a. Si es una función periódica, indica su período.

b. ¿Qué valor toma la función cuando $x$ es par? ¿Y cuándo x es impar?

c. Determina el valor de la función para $x = 10$, $x = 21$ y $x = 40$ y $x = 57$.

b. ¿Qué puedes decir de las imágenes de la función para $x = 0{,}5$; $1{,}5$ y $22{,}5$? Explica.

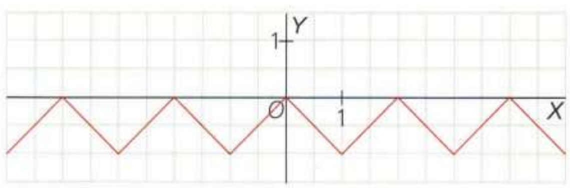



Figura 2.59

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 8 Función exponencial

## Saberes previos

Observa la secuencia y escribe los siguientes tres términos:

4, 16, 64…

## Analiza

Cierto banco paga un interés compuesto, expresado como $f(x) = (1{,}5)^x$, a las cuentas ordinarias, por cada \$ 1 000 de ahorro que permanece en la cuenta durante $x$ meses.


- ¿Cuál es el comportamiento del interés compuesto en este tipo de cuenta durante la permanencia de cada \$ 1 000?

## Conoce

La Figura 2.60 muestra la gráfica de la función $f(x) = (1{,}5)^x$ mientras que la Tabla 2.8 muestra su comportamiento. En este caso, al ser $x$ el número de meses, toma valores mayores o iguales que 0.

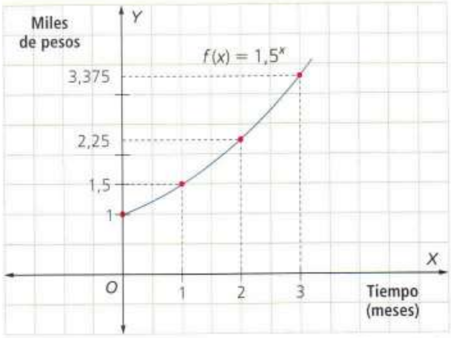



Figura 2.60

| Características de $f(x) = (1{,}5)^x$ |
|---|
| Dominio: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ |
| Rango: $[1, \infty)$ |
| Pasa por (0, 1) |
| No corta el eje $X$ |
| Es creciente |

Tabla 2.8

En general, la gráfica de la función $f(x) = a^x$ depende del valor de $a$:

- Si $a$ es mayor que 1, la gráfica de la función es de la forma:

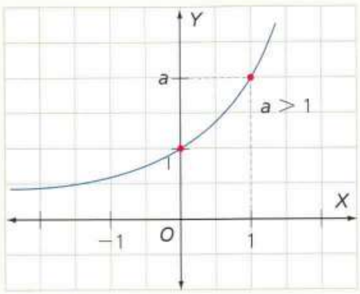



Figura 2.61

La función es creciente en todo su dominio.

- Si $a$ está entre 0 y 1, la gráfica de la función es de la forma:

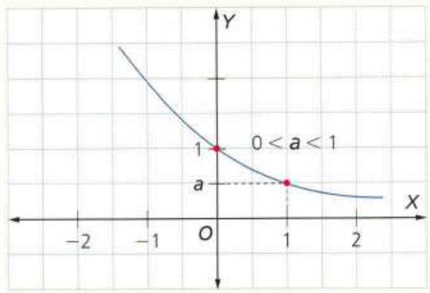



Figura 2.62

La función es decreciente en todo su dominio.

Un caso particular de función exponencial es cuando la base es el número irracional $e = 2{,}718281828459\ldots$ que aparece en múltiples investigaciones.

La Figura 2.63 muestra la gráfica de la **función exponencial natural** $f(x) = e^x$ y la Tabla 2.9 resume sus características.

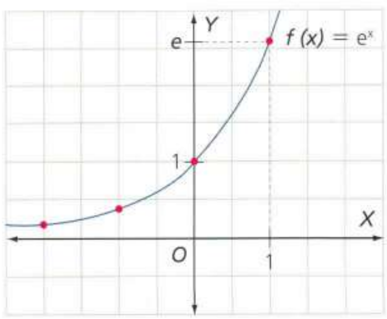



Figura 2.63

| Características de $f(x) = e^x$ |
|---|
| Dominio: $\mathbb{R}$ |
| Rango: $\mathbb{R}^+$ |
| Es creciente en todo su dominio ($e > 1$) |
| Pasa por (0, 1) |
| Nunca corta el eje $X$ |

Tabla 2.9

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Completa la Tabla 2.10 evaluando la función en los valores dados. Usa una calculadora.

| $x$ | $-3$ | 0 | 0,5 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ | | | | | |

Tabla 2.10

Describe las características de la función $\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

### Razonamiento

**2** Marca verdadero (V) o falso (F), según la igualdad sea correcta o no.

| | F | V |
|---|---|---|
| a. $3^{2x} = 9^x$ | | |
| b. $3^x \cdot 3^y = 3^{x+y}$ | | |
| c. $3^x \cdot 3^x = 3^{x^2}$ | | |
| d. $3^{-x} = (3^x)^{-1}$ | | |

Tabla 2.11

### Modelación

**3** Relaciona cada función con su gráfica.

a. $f(x) = -(2)^x$ b. $f(x) = 2^{-x}$ c. $f(x) = 2^x$

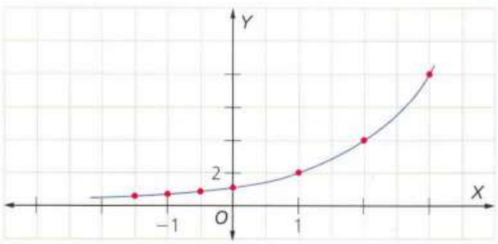



Figura 2.64

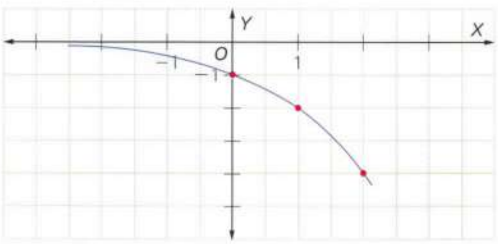



Figura 2.65

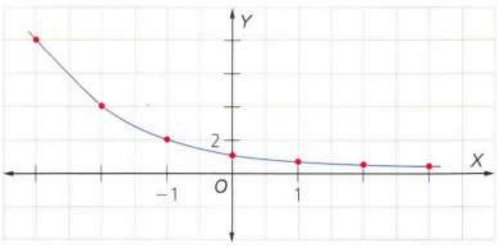



Figura 2.66

### Ejercitación

**4** Completa cada tabla. Luego, traza la gráfica aproximada de la función.

a. $f(x) = e^x$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 0,14 | | | | | 20,1 | |

Tabla 2.12

b. $f(x) = -e^x$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0{,}05$ | | | | | $-7{,}4$ | | |

Tabla 2.13

### Razonamiento

**5** Marca Sí o No, según si cada afirmación es correcta o incorrecta. Justifica tus respuestas.

a. La función exponencial natural es una función creciente. Sí No

b. La función exponencial natural nunca corta el eje Y. Sí No

c. En la función $f(x) = e^{-x}$, todas sus imágenes son negativas. Sí No

d. La función exponencial natural siempre pasa por el punto 1, 0. Sí No

## Evaluación del aprendizaje

Las siguientes son las gráficas de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $(1{,}2)^x$ y $2^x$.

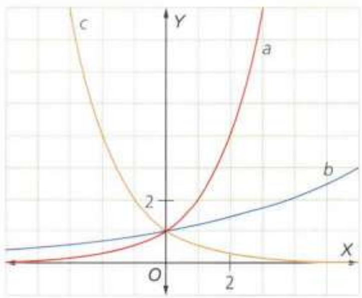



Figura 2.67

a. ¿Cuál letra identifica la gráfica de cada una de las funciones?

b. Describe las características de cada función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 9 Función logarítmica

## Saberes previos

¿Cuántas veces debes multiplicar a 3 por sí mismo para obtener como producto 243?

## Analiza

En una cooperativa se ha calculado que la función que establece el tiempo que debe permanecer ahorrado un capital, para que cada \$ 1 000 adquieran cierto valor final, es: $f(x) = \log_{10}x$ donde $f(x)$ es el tiempo en años y x es el monto final deseado.

- ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que \$ 1 000 se conviertan en \$10 000?

## Conoce

En este caso, la función $f(x) = \log_{10}x$ es una **función logarítmica** cuya base es 10.

En general, una función logarítmica con base $a$ asigna a cada número real $x$ el exponente $y$ al que debe ser elevado $a$ para obtener $x$, es decir, si $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$.
Por ejemplo, si $y = \log_2 8$, entonces $y = 3$, porque $2^3 = 8$.

De esta manera, el tiempo de depósito para que cada \$ 1 000 se conviertan en \$ 10 000 es: $f(10\ 000) = \log_{10} 10\ 000 = 4$ años.

En la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ se presentan dos casos:

- Si $a > 1$, la función es creciente.

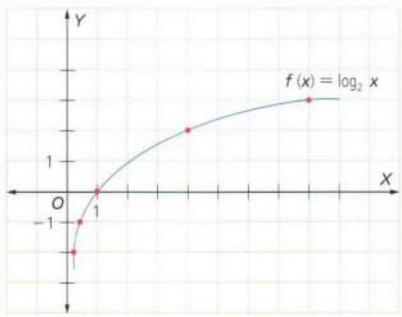



Figura 2.68

| $x$ | 0,25 | 0,5 | 1 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \log_2 x$ | −2 | −1 | 0 | 2 | 3 |

Tabla 2.14

- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

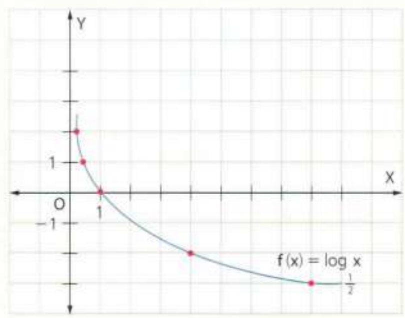



Figura 2.69

| $x$ | 0,25 | 0,5 | 1 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ | 2 | 1 | 0 | −2 | −3 |

Tabla 2.15

Se le llama **función logaritmo natural** que se escribe como $\ln(x)$ al logaritmo que tiene de base el número $e$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.70.

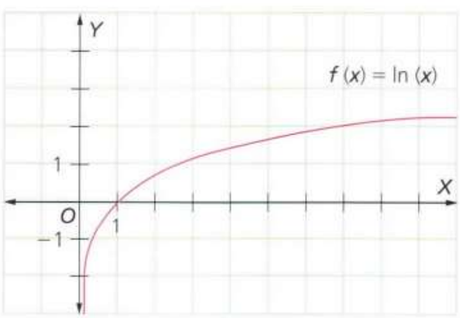



Figura 2.70

| Algunas propiedades de la función logaritmo natural |
|---|
| $\ln 1 = 0$ |
| $\ln e = 1$ |
| $\ln e^n = n$ |
| $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ |
| $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ |
| $\ln x^n = n \cdot \ln(x)$ |

Tabla 2.16

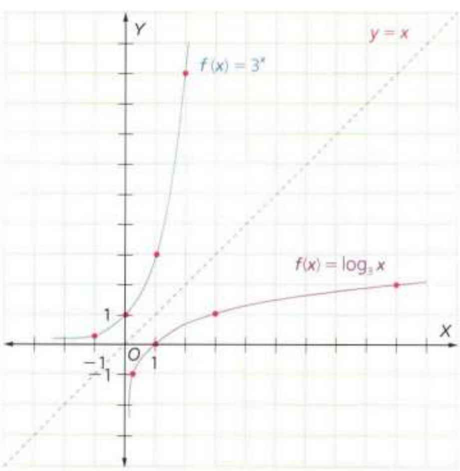



Figura 2.71

La **función logarítmica con base *a*** es la función inversa de la función exponencial con base $a$, de modo que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ con respecto a la recta $y = x$. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \log_3 x$ y $f(x) = 3^x$ son inversas como se ve en la Figura 2.71.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Relaciona las expresiones equivalentes.

| | |
|---|---|
| a. $3^2 = 9$ | $\log 100 = 2$ |
| b. $5^2 = 25$ | $\log_2 32 = 5$ |
| c. $3^3 = 27$ | $\log_3 9 = 2$ |
| d. $4^2 = 16$ | $\log_4 16 = 2$ |
| e. $2^5 = 32$ | $\log_3 243 = 5$ |
| f. $5^3 = 125$ | $\log 10\,000 = 4$ |
| g. $3^5 = 243$ | $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{256} = 8$ |
| h. $10^2 = 100$ | $\log_5 25 = 2$ |
| i. $10^4 = 10\,000$ | $\log_5 125 = 3$ |
| j. $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$ | $\log_3 27 = 3$ |

### Ejercitación

**2** Completa cada tabla de valores y traza la gráfica de la función correspondiente.

a. $f(x) = 5\log_2 x$

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-10$ | | | | | | | 25 |

Tabla 2.17

b. $f(x) = -2\log_3 x$

| $x$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 2 | | | | | $-8$ | |

Tabla 2.18

**3** Grafica la inversa de la función de la Figura 2.72.

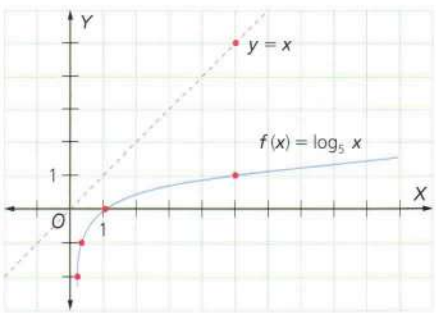



Figura 2.72

**4** Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas V o falsas F. Justifica.

a. La función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

b. No existen logaritmos de números negativos.

c. Las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica son simétricas.

**5** Explica cómo es posible obtener la gráfica de $f$ a partir de la curva definida por $y = \ln x$. (Sugerencia: aplica primero las leyes adecuadas de los logaritmos.)

a. $f(x) = \ln e^x$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c. $f(x) = \ln \sqrt{x}$

d. $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

e. $f(x) = \ln (x^2 - 1) - \ln (x^2 + 1)$

f. $f(x) = \ln x^{-3}$

**6** Demuestra que $\ln \left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4}\right) = -\ln \left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$

## Evaluación del aprendizaje

Existen calculadoras que no tienen la tecla $\log_a x$, pero sí tienen $\log x$ y $\ln x$. Para este caso, y si se necesita hallar el logaritmo en una base diferente a la 10 y $e$, podemos utilizar la relación $\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$. Completa la Tabla 2.19 con ayuda de una calculadora. Utiliza una aproximación de 3 cifras decimales.

| $x$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 1,5 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_3 x$ | | | | | |
| $\ln x$ | | | | | |
| $\log_{\frac{1}{3}} x$ | | | | | |

Tabla 2.19

Traza el bosquejo de cada una de las gráficas de las funciones $\log_3 x$, $\ln x$ y $\log_{\frac{1}{3}} x$ y escribe todas sus características.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Construcción de funciones por traslación y dilatación



**Saberes previos**

Si dibujas la gráfica de una función y la proyectas sobre el tablero para ampliarla y explicársela a tus compañeros, ¿qué propiedades cambian y cuáles no?

**Analiza**

El tiempo de duración de dos dispositivos eléctricos y su capacidad de almacenamiento se muestran en las siguientes gráficas.

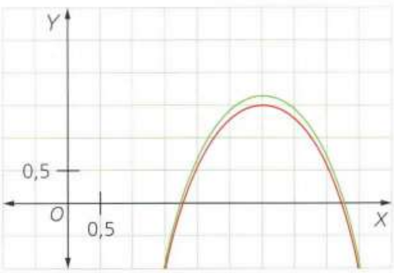



Figura 2.73

- ¿Qué diferencia hay entre los dispositivos presentados?

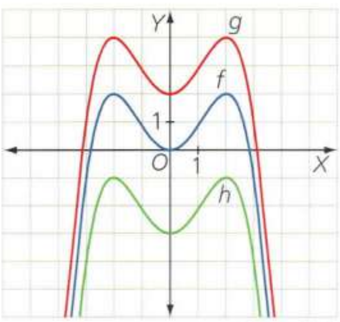



Figura 2.74

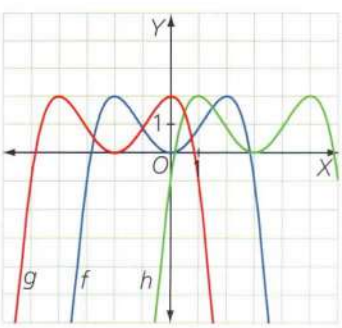



Figura 2.75

**Conoce**

Es posible generar técnicas para graficar y analizar funciones a partir de otras funciones ya conocidas. Dos de estas estrategias son la **traslación** y la **dilatación** de funciones.

Por ejemplo, para el caso del tiempo de duración de los dispositivos eléctricos se tiene que la gráfica verde es una traslación vertical de 0,1 de la gráfica roja. Esto indica que el dispositivo descrito por la gráfica verde tiene mayor capacidad de almacenamiento en la tercera hora de funcionamiento.

A partir de lo anterior se puede afirmar que la diferencia más notoria entre los dos dispositivos es su capacidad de almacenamiento en la tercera hora.

## 10.1 Traslación

Una función se puede trasladar en el plano vertical u horizontalmente.

Dada una función $f(x)$ y un número real $p$, se dice que $y = f(x) + p$ es una **traslación vertical** de $f(x)$.

- Si $p > 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano $p$ unidades hacia arriba.
- Si $p < 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano $p$ unidades hacia abajo.

**Ejemplo 1**

En la Figura 2.74, $g$ y $h$ se obtienen a partir de $f$ por una traslación vertical.

Para obtener la gráfica de $g$, la gráfica de $f$ se traslada verticalmente hacia arriba (dos unidades); para obtener la gráfica de $h$, la gráfica de $f$ se traslada verticalmente hacia abajo (tres unidades).

$$g(x) = f(x) + 2 \qquad h(x) = f(x) - 3$$

Dada una función $f(x)$ y un número real $p$, se dice que $y = f(x + p)$ es una **traslación horizontal** de $f(x)$.

- Si $p > 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano $p$ unidades hacia la izquierda.
- Si $p < 0$, la gráfica de $f(x)$ se traslada en el plano $p$ unidades hacia la derecha.

**Ejemplo 2**

En la gráfica de la Figura 2.75, $g$ y $h$ se obtienen a partir de $f$ por una traslación horizontal. Para obtener la gráfica de $g$ se desplaza la de $f$ dos unidades hacia la izquierda, y la de $h$ se obtiene desplazando la de $f$ tres unidades hacia la derecha.

$$g(x) = f(x + 2) \qquad h(x) = f(x - 3)$$

Es importante aclarar que en algunas ocasiones no resulta sencillo identificar cuál es la función original que se debe trasladar, por esta razón lo más importante es analizar qué técnica se debe usar para graficar.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 10.2 Dilatación y contracción

Dada una función $f(x)$ y un número real positivo $k$, se dice que $kf(x)$ es una **dilatación o una contracción vertical** de $f(x)$. Si $k > 1$, la gráfica de $f(x)$ se contrae verticalmente; si $0 < k < 1$, la gráfica de $f(x)$ se dilata verticalmente.

**Ejemplo 3**

En la Figura 2.76, $g$ y $h$ se obtienen a partir de la función $f$ contrayendo o dilatando su gráfica en sentido vertical.

$$g(x) = 2f(x) \qquad\qquad h(x) = \frac{1}{2} f(x)$$

Si $a(x) = 2x$, $g$ se escribe como la composición de las funciones

$$g(x) = (a \circ f)(x) = a[f(x)] = 2f(x).$$

Como el factor que aparece en $a$ es mayor que 1, la gráfica se contrae.

Si $b(x) = \frac{1}{2}x$ la función $h$ es la composición de las funciones

$$h(x) = (b \circ f)(x) = b[f(x)] = \frac{1}{2} f(x).$$

El factor que aparece en $b$ es positivo y menor que 1, así que la gráfica se dilata.

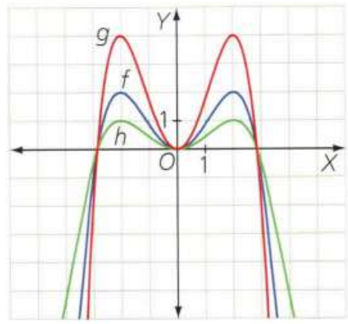


Figura 2.76

Dada una función $f(x)$ y un número real positivo $k$, se dice que $f(kx)$ es una **dilatación o una contracción horizontal** de $f(x)$. Si $k > 1$, la gráfica de $f(x)$ se contrae horizontalmente, pero si $0 < k < 1$, la gráfica de $f(x)$ se dilata horizontalmente.

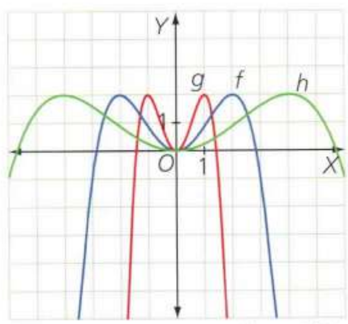


Figura 2.77

**Ejemplo 4**

En la Figura 2.77, $g$ y $h$ se obtienen a partir de $f$ contrayendo o dilatando su gráfica en dirección horizontal.

$$g(x) = f(2x) \qquad\qquad h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Como el factor que determina el valor de $a$ es mayor que 1, la gráfica se contrae. Como el factor de $b$ es positivo y menor que 1, la gráfica se dilata.

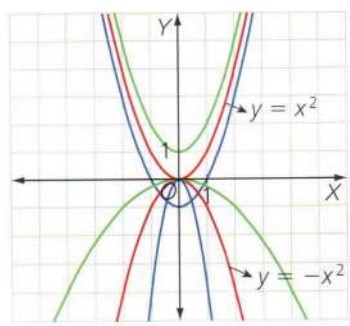


Figura 2.78

**Ejemplo 5**

Las parábolas de la Figura 2.78 no se han trasladado ni horizontal ni verticalmente; así que sus gráficas son el resultado de dilataciones o contracciones de $y = x^2$ y $y = -x^2$, respectivamente. Los factores de dilatación o contracción no pueden determinarse a simple vista, pero es claro que hay valores positivos menores que 1 y positivos mayores que 1.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Construcción de funciones por traslación y dilatación

## MatemaTICS

### Construye familias de parábolas usando el software GeoGebra

Observa el procedimiento para graficar las funciones:

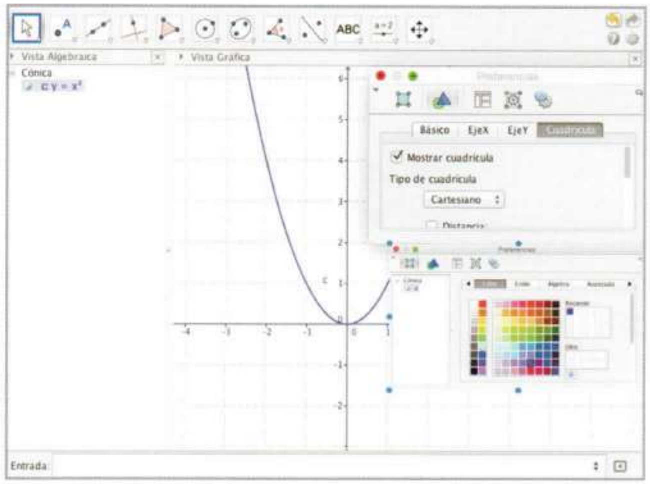
$y = x^2$

$y = x^2 + 3$

$y = x^2 - 4$

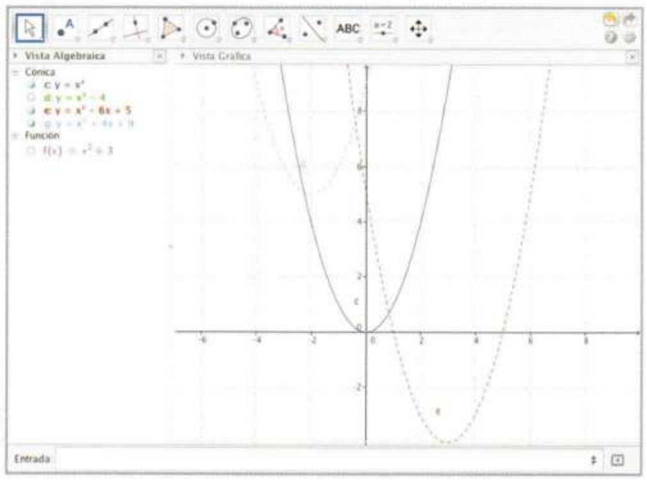
$y = (x - 3)^2 - 4$

$y = (x + 2)^2 + 5$

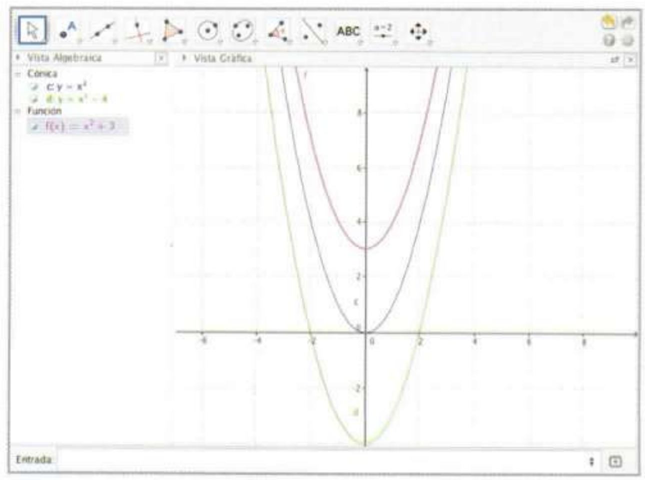



- Primero digita en la barra de fórmulas $y = x^2$. A continuación selecciona del menú de preferencias estas opciones:


Visualiza la cuadrícula y cambia de color el trazo de la primera función. Para ello, ubícate en la ventana de fórmulas y selecciona con el cursor la expresión que acabaste de digitar.




- Luego digita en la barra de fórmulas las dos funciones siguientes. Cuando digites la primera observa detenidamente el cambio que sufre la función $y = x^2$. Ahora cambia el color de cada una de las nuevas funciones.




- Luego digita las dos últimas funciones. Ten en cuenta que al presionar la tecla *Enter*, en la barra de fórmulas, va a aparecer la expresión desarrollada y no la que digitaste en la barra.

  Para visualizar mejor este cambio, marca las funciones de color rojo y verde, y así desaparecerán de la visualización de la pantalla.

  Para las dos nuevas funciones, ingresa nuevamente al menú *Objetos* y busca la opción *Estilo/Estilo de trazo*, y selecciona la línea discontinua.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Razonamiento

**1** Observa la gráfica de $f$ (Figura 2.79 y Figura 2.80). Luego esboza en cada caso las gráficas de las siguientes funciones.

a. $g(x) = f(x) + 4$ y $h(x) = f(x) - 1$

b. $g(x) = f(x + 4)$ y $h(x) = f(x - 1)$

c. $g(x) = 3f(x)$ y $h(x) = \frac{1}{2} f(x)$

d. $g(x) = f(3x)$ y $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

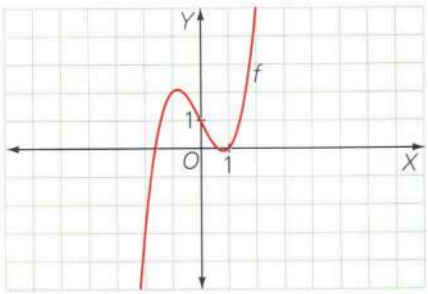


Figura 2.79

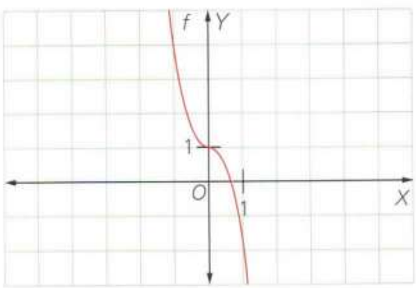


Figura 2.80

### Resolución de problemas

**2** Identifica en cada caso la expresión correspondiente a cada una de las gráficas de las figuras 2.81 a 2.83.

a.

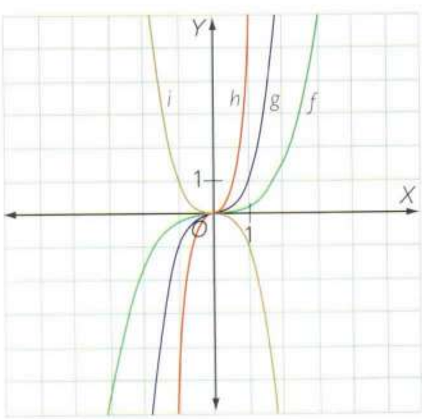


Figura 2.81

b.

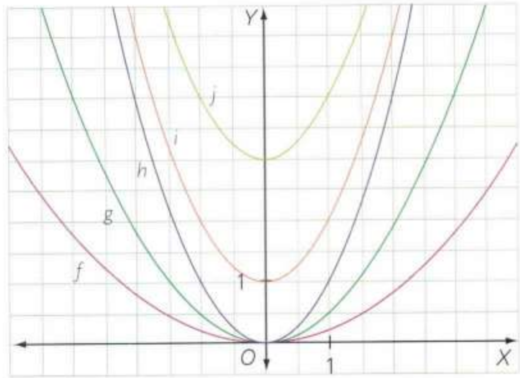


Figura 2.82

c.

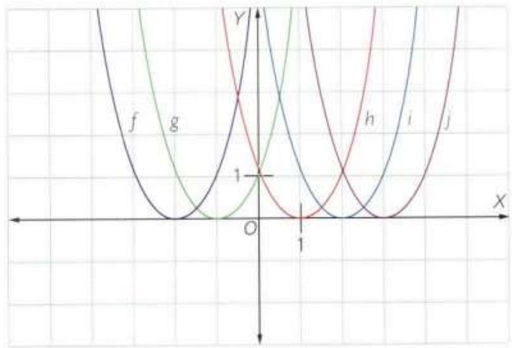


Figura 2.83

## Evaluación del aprendizaje

**i** Analiza la gráfica de $f(x) = x^2$ y dibuja las gráficas de las siguientes funciones utilizando traslaciones dilataciones y contracciones.

a. $a(x) = x^2 - 4$

b. $d(x) = -3x^2$

c. $b(x) = x^2 + 2x$

d. $e(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

**ii** Escribe la fórmula de la función resultante cuando la gráfica de $f(x) = x^3$ se transforma en cada caso. Luego elabora su gráfica.

a. Sube tres unidades y luego se desplaza otras tres a la derecha.

b. Baja una unidad y luego se desplaza dos hacia la izquierda.

c. Baja dos unidades y luego se desplaza cuatro a la derecha.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

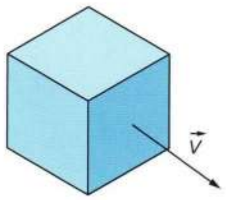
# 11 Variación lineal y exponencial. Razón de cambio

**Saberes previos**

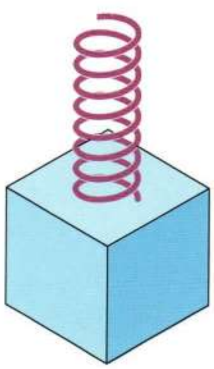
¿Por qué crees que las ventanas enmarcadas en metal necesitan espaciadores de goma? ¿Qué ocurriría con ese tipo de ventanas si hace mucho calor y no tuviera espaciadores?

**Analiza**

A un cuerpo que lleva una velocidad de 3 m/s se le imprime una aceleración constante de 0,1 m/s².




- ¿Qué velocidad lleva el objeto después de 30 segundos?



**Conoce**

La velocidad final $v_f$ de un objeto en función del tiempo al que se le imprime una aceleración constante $a$ cuando parte desde un punto con una velocidad inicial $v_0$, viene dada por la expresión: $v_f = at + v_0$, donde la constante $a$ es la pendiente de una recta y $b = v_0$ es su ordenada en el origen.

Así, como $v_0 = 3$ m/s, $a = 0{,}1$ m/s² y $t = 30$ s, entonces:

$v_f = 0{,}1 \text{ m/s}^2 (30 \text{ s}) + 3 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s} + 3 \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$.

Así, el objeto lleva una velocidad de 6 m/s después de 30 s.

## 11.1 Variación lineal

Dos variables están relacionadas por una **variación lineal** si su gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas, es decir el punto de partida de una relación que es una variación lineal es un punto $(0, b)$.

Si $y$ es la variable dependiente y $x$ la variable independiente entonces $y$ y $x$ están relacionadas con una variación lineal si se cumple que $y = mx + b$ donde $m$ representa la constante de variación lineal o pendiente de la recta y $b$ corresponde a la ordenada desde la que parte la recta.

La gráfica de una variación lineal es una línea recta y la constante $m$ se calcula a partir de las coordenadas de dos de sus puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Ejemplo 1**

La longitud $L$ de un resorte varía linealmente con respecto a una masa $M$ que se suspende del extremo del resorte. En la Tabla 2.20 se muestran los datos de dicha variación y la gráfica, que corresponde a una variación lineal, se presenta en la Figura 2.84.

| $L$ (cm) | $M$ (kg) |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 0,2 |
| 4 | 0,4 |
| 5 | 0,6 |
| 6 | 0,8 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1,2 |
| 9 | 1,4 |
| 10 | 1,6 |
| 11 | 1,8 |
| 12 | 2 |

Tabla 2.20

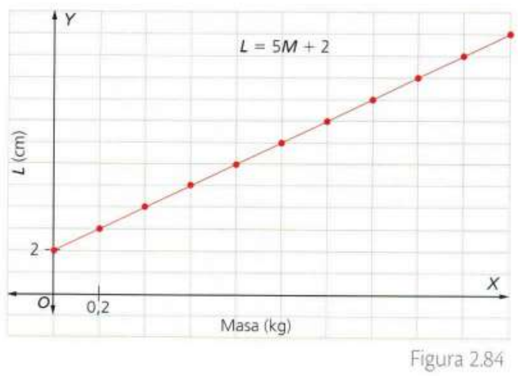



Figura 2.84

Para calcular la pendiente, podemos tomar dos puntos como (0,4; 4) y (1,6; 10):

$$m = \frac{10 \text{ kg} - 4 \text{ kg}}{1{,}6 \text{ cm} - 0{,}4 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ kg}}{1{,}2 \text{ cm}} = 5 \text{ kg/cm}$$

De otra parte, la ordenada en el origen es $b = 2$, así que la variación que muestra la relación entre la longitud del resorte $L$ y la masa $M$ que se le suspende en su extremo viene dada por la expresión: $L = 5M + 2$.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 11.2 Variación exponencial

Se denomina **variación exponencial** a aquella situación que se presenta cuando una cantidad $y = f(x)$ varía con respecto a otra cantidad $x$ mediante la siguiente expresión: $f(x) = ka^x$, donde $k$ es considerada como el valor inicial de $f(x)$ y $a$ como una constante que define el crecimiento de la misma, razón por la cual se dice que $f(x)$ varía de una forma exponencial con respecto a $x$.

**Ejemplo 2**

En el año 2011 la población mundial era de casi 7 000 millones de personas con una tasa de crecimiento relativa de 2,56% anual. Si la población continúa creciendo a este ritmo, es posible determinar cuántas personas poblarán el mundo mediante la función: $P(t) = P_0e^{0,0256t}$ que muestra la variación exponencial de la población mundial con respecto a $t$.

Así, $P(10) = 7000e^{0,0256(10)} \approx 9\,024{,}20$ millones de habitantes.

## 11.3 Razón de cambio promedio

La **razón de cambio promedio** se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra.

**Ejemplo 3**

La gráfica de la Figura 2.85 muestra la cantidad de peces en un lago después de haber introducido 800 especímenes.

La razón de cambio entre los meses 10 y 30 está dada por:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{\text{Cambio en población}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{5\,600 \text{ peces} - 1\,000 \text{ peces}}{20 \text{ meses}} = 510 \text{ peces/mes}$$

Figura 2.85

## 11.4 Razón de cambio instantánea

La **razón de cambio instantánea** de una función en un punto $A$, se refiere a la rapidez con que la pendiente de una curva cambia en determinado momento.

**Ejemplo 4**

Una empresa libera toneladas de un químico en la atmósfera para combatir el smog; estas se calculan mediante la función $f(x) = 0{,}2x^2 + 2x$, donde $x$ es el tiempo, en horas.

La razón de cambio promedio de liberación de la sustancia química para los lapsos de 8,0001 a 8,00001 y 8,00001 a 8,000001 son los que se indican debajo de la gráfica de la Figura 2.86.

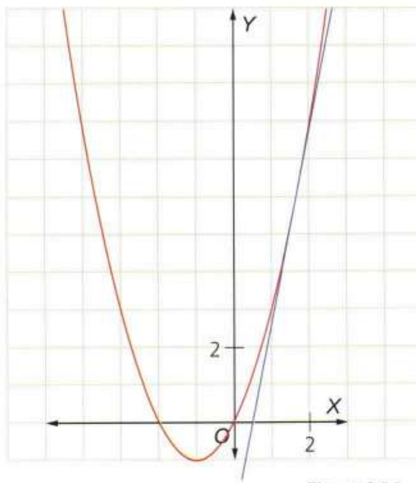


Figura 2.86

$$\frac{28{,}80052 - 28{,}800052}{8{,}0001 - 8{,}00001} = 5{,}1999 \text{ y}$$

$$\frac{28{,}800052 - 28{,}8000052}{8{,}00001 - 8{,}000001} = 5{,}1999$$

A medida que los intervalos de tiempo sean tan pequeños como se quiera, la razón de cambio promedio está cada vez más "cerca" del valor 5,2 (toneladas). Este valor corresponde a la razón o liberación de cambio instantánea, del químico, para $x = 8$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 11 Variación lineal y exponencial. Razón de cambio

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Un móvil aumenta su velocidad a medida que pasa el tiempo como se indica en la Tabla 2.21:

| $t$(s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$(m/s) | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

Tabla 2.21

a. Halla la pendiente de la recta que describe esos puntos y explica a qué corresponde.

b. Explica desde el punto de vista físico qué indica la ordenada en el origen.

c. Escribe la función que relaciona a $t$ con $v$.

d. Traza la gráfica de esa función.

e. ¿Cuál será la velocidad del móvil a los 13 segundos si se sigue desplazando de la misma forma?

**2** Un objeto es desplazado $x$ metros cuando se le aplican diferentes fuerzas $F$ sobre él, según se observa en los datos de la siguiente tabla:

| $f$(N) | 6 | 4 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $x$(m) | 0 | 1 | 2 | 3 |

Tabla 2.22

a. ¿Corresponde ese modelo a una variación lineal? Explica.

b. ¿Qué ocurre a medida que la fuerza que se le aplica al objeto aumenta?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Cuál es su signo? ¿Qué indica ese signo?

d. ¿Qué fuerza debe aplicarse sobre el objeto para que se desplace 1,5 m?

e. Si al objeto se le aplica una fuerza de 3 N, ¿cuál será su desplazamiento?

### Modelación

**3** La gráfica de la Figura 2.87 representa la distancia a la que se encuentra una persona con respecto a otra en relación con el tiempo transcurrido.

Explica en tus palabras cómo varían las dos variables representadas.

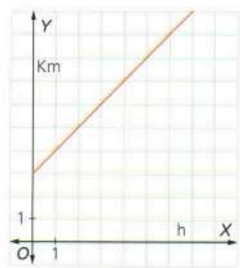



Figura 2.87

### Razonamiento

**4** Clasifica las variaciones que se representan en la Figura 2.88 como lineales, exponenciales o ninguna de estas. Justifica tu respuesta.

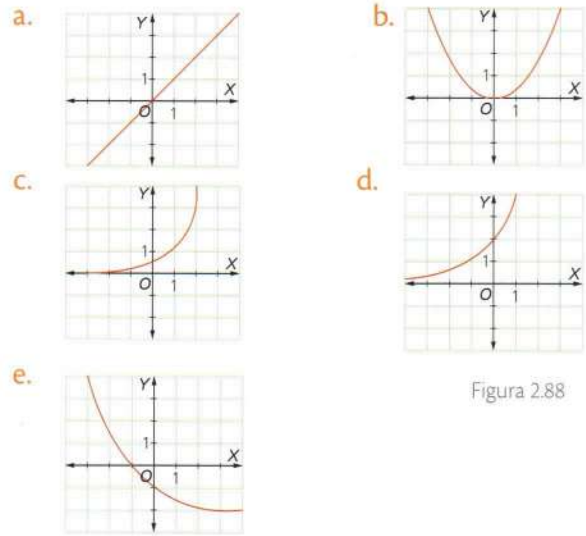



Figura 2.88

### Resolución de problemas

**5** Un cultivo de bacterias se duplica cada hora. Si inicialmente se cuenta con 30 bacterias, ¿cuántas bacterias hay al tiempo $x$?

**6** En 1980, la población estimada de cierto país era de 357 millones, y creció a una tasa de alrededor del 20% anual. La población $N(t)$, $t$ años más tarde se calcula con la expresión $N(t) = 651^{e0,02\,t}$.

¿Cuál era la población de este país en el año 2000?

**7** El carbono 14 (C-14) es un elemento que se utiliza para conocer la edad de fósiles. Si el hueso de un animal encontrado cuando estaba vivo constaba de $m$ gramos de ese elemento cada 5730 años esa cantidad se reducirá a la mitad de lo que había cada vez. Encuentra la fórmula que indica la cantidad en gramos que queda de C-14 después de $x$ periodos de 5 730 años.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### Modelación

8 En la Tabla 2.23 se consignó la información con respecto al número total (acumulado) de personas, $N(t)$, de una ciudad que contrajeron Zika en los $t$ primeros ocho días del mes de agosto.

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(t)$ | 20 | 80 | 140 | 220 | 230 | 245 | 247 | 250 |

Tabla 2.23

a. Representa gráficamente estos datos.

b. ¿Cuál es la tasa de variación media de $N(t)$ entre el segundo y el cuarto día?

c. ¿Entre qué par de días consecutivos se registró la mayor tasa de crecimiento de la enfermedad?

d. ¿Cuál es la tasa de variación media de $N(t)$ entre el octavo y noveno día?

### Ejercitación

9 Un objeto cae desde una altura de 50 metros. Si la caída está descrita por la función $f(t) = 5{,}1t^2$, donde $f(t)$ se mide en $m$, ¿cuál es la rapidez promedio del objeto durante los dos primeros segundos de la caída?

### Comunicación

10 Un globo asciende verticalmente, después de $x$ horas una altura $f$ (en km) con respecto al suelo dada por la función $f(x) = -2x^2 + 4x$.

a. Traza un esbozo de la gráfica de la función. ¿Sube indefinidamente el globo? ¿Por qué?

b. ¿Cuál es la velocidad instantánea exactamente media hora después que inició su ascenso?

11 Andrés corre en pruebas de velocidad se mueve en línea recta de acuerdo con la expresión $S = t^2 + 3t - 2$. Para poder representar a su país en los Juegos Olímpicos, debe alcanzar a los 4 segundos de haber iniciado su recorrido desde velocidad cero, una velocidad de 11,2 m/s. ¿Puede Andrés representar a su país en los Olímpicos?

12 Una epidemia de una extraña enfermedad azota una ciudad y los médicos estiman que las personas enfermas en un tiempo $x$ (medido en días desde el principio de la epidemia) está dado por la función: $f(x) = -x^3 + 60x^2$.

¿Cuál es la razón de propagación instantánea de la epidemia para $x = 30$ días?

### Resolución de problemas

13 Un edificio habitado por 50 personas tiene una reserva de agua potable de 120 000 litros. Cada persona utiliza 80 litros de agua diariamente para sus necesidades básicas pero el sistema de tuberías se daña con el tiempo y ocasiona fugas de agua potable, además de la evaporación natural. Se calcula que el volumen de agua que fluye de la reserva diariamente se puede calcular con la fórmula: $V = 4\,000\,t + 0{,}05\,t^2$ donde $V$ es el número de litros de agua y $t$ es el tiempo medido en días. ¿Con qué rapidez disminuye el volumen de agua a los 25 días?

### Evaluación del aprendizaje

i Un vendedor de celulares gana un salario básico de \$ 800 000 y recibe una comisión de \$ 20 000 por cada celular que venda.

Elabora una tabla que muestre cuánto dinero recibe en cada uno de los meses de enero, febrero, marzo y abril si cada uno de estos meses vendió 120, 85, 215 y 201 celulares, respectivamente.

¿Corresponde esta situación a un modelo de variación lineal?

ii Marcela diluyó una botella de un compuesto químico agregando agua hasta llenar la botella cada vez que ésta se encontraba a la mitad de su nivel. Realizó esto cinco veces revolviendo el contenido perfectamente después de agregar agua. Si el contenido de la botella tenía inicialmente una concentración del 16%, ¿cuál es la concentración del compuesto al final?

iii Un modelo de población de una cierta especie de ave predice que después de $t$ meses, la población será $P(t) = -0{,}5t^2 + 56t + 43$ (en cientos de aves). ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la población para $t = 3$ meses?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 12 Introducción al límite de una sucesión

**Saberes previos**

Toma una calculadora y divide secuencialmente a 1 entre 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Qué ocurre con los cocientes a medida que el divisor se hace mayor?

**Analiza**

Se inscriben polígonos regulares en una circunferencia de radio $r$.

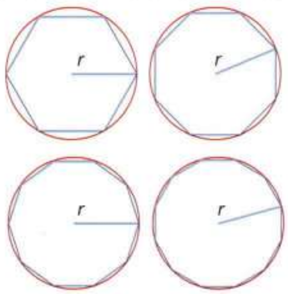



Figura 2.89

- ¿Qué ocurre con el perímetro de un polígono con un gran número de lados en comparación con el perímetro de la circunferencia?

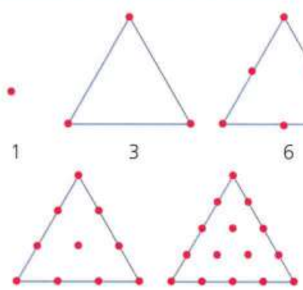



Figura 2.90

**Conoce**

Si $P_n$ es el perímetro del polígono regular de $n$ lados inscrito en una circunferencia de radio $r$, tantos más lados tenga este, más cerca estará su perímetro al de la circunferencia. Esto definirá una sucesión de los valores de los perímetros de los polígonos respecto a su número de lados. (Figura 2.89)

## 12.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los naturales y el cero o $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y su codominio es cualquier otro conjunto de números, de figuras geométricas o de funciones.

**Ejemplo 1**

Los llamados números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ... conforman una sucesión cuyo término general es $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y cuya representación gráfica se muestra en la Figura 2.90.

## 12.2 Límite de una sucesión

El **límite de una sucesión** es el número al cual se van aproximando los términos de una sucesión cuando $n$ se hace lo suficientemente grande. Si existe tal valor, la sucesión es convergente y en caso contrario es divergente.

Si la sucesión $a_n$ converge a un valor $L$, escribimos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Donde $a_n$ es una expresión o un criterio que permite determinar cualquier término de la sucesión, conocido como término general. Para determinar el término general de una sucesión, se debe encontrar, una expresión que relacione el valor del término $n$-ésimo con el 0 y cualquier número natural $n$.

**Ejemplo 2**

La sucesión $a_n = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...$ cuyo término enésimo es $a_n = \dfrac{1}{n}$, converge a 0, pues cuanto mayor sea el valor de $n$, el valor de $\dfrac{1}{n}$ se aproxima a 0, esto es: $\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{1}{n} = 0$

**Ejemplo 3**

La sucesión $b_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ de números triangulares es divergente, porque cuanto mayor sea el valor de $n$, $b_n$ crece indefinidamente. Esto se indica mediante el límite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

**Ejemplo 4**

La sucesión $c_n = (-1)_n\, n$ cuyos primeros términos son $-1, 2, -3, 4, -5, 6,$ ... no es convergente ni divergente y se le denomina *oscilante*.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Clasifica como convergente, divergente o ninguna de estas cada una de las sucesiones que se representan en las Figuras 2.91 a 2.94

a.

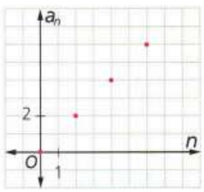



Figura 2.91

b.

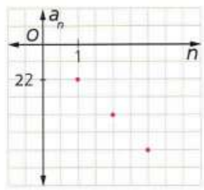



Figura 2.92

c.

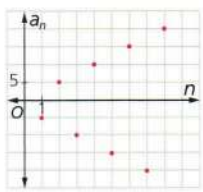



Figura 2.93

d.

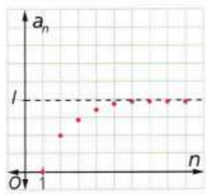



Figura 2.94

### Ejercitación

**2** Escribe los primeros diez términos de cada sucesión e indica si son convergentes.

a. $a_n = 3 - 5n$ b. $a_n = n + 1$

c. $a_n = \dfrac{2n - 3}{n^2 + 4}$ d. $a_n = \dfrac{n}{3} - 5$

e. $a_n = \dfrac{n}{2} + 4$ f. $a_n = \dfrac{n + 6}{2n}$

g. $a_n = 8 + 0{,}2n$ h. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

i. $a_n = 3^n - 1$ j. $a_n = 2n + 1$

### Razonamiento

**3** Analiza el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

a. El límite de una sucesión cuyos términos son todos negativos es $-\infty$.

b. Una sucesión con todos sus términos iguales no tiene límite.

c. Si a partir de un término, todos los de la sucesión son mayores que un valor positivo cualquiera, la sucesión es divergente.

d. Una sucesión de términos decimales no puede tener por límite un número entero.

### Modelación

**4** Observa y describe cómo se obtiene la sucesión de cuadrados de menor tamaño de un paso a otro.

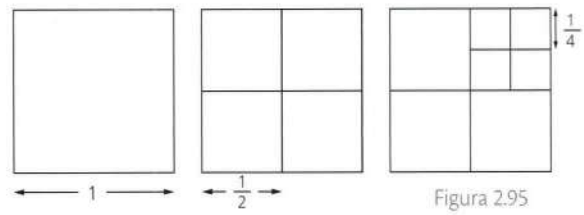



Figura 2.95

| Pasos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| N. de cuadrados | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |
| Longitud Longitud del lado del cuadrado más pequeño | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

Tabla 2.24

a. ¿Cuántos cuadrados hay en el décimo paso?

b. ¿Cuánto mide el lado de cada uno de los cuadrados más pequeños en este paso?

c. ¿Es la sucesión del número de cuadrados convergente o divergente?

d. ¿Es la sucesión de la longitud de los cuadrados más pequeños convergente?

### Comunicación

**5** Sea $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Los cinco primeros términos de esta sucesión son:

$a_1 = 0,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 0 = 1,$

$a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 1 = 2,$

$a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 1 = 3$

Halla los siguientes cinco términos de la sucesión.

## Evaluación del aprendizaje

De un material radiactivo se sabe que 1 kilogramo se reduce a la mitad cada año.

a. Escribe la cantidad de material después de los primeros tres años.

b. ¿A qué valor converge dicha sucesión?

c. Determina el año a partir del cual la cantidad de material restante es inferior a 1 gramo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Concepto de función

### Comunicación

**1** Determina si las siguientes gráficas describen funciones.

a.

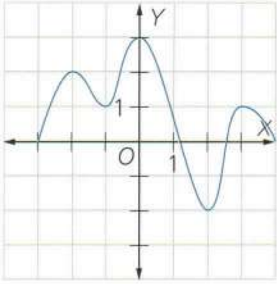



Figura 2.96

b.

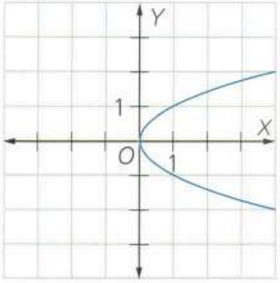



Figura 2.97

**2** Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a.

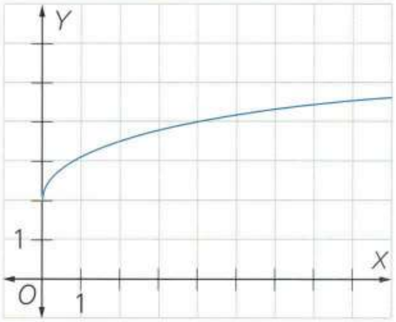



Figura 2.98

b.

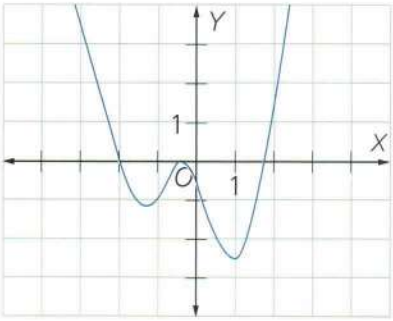



Figura 2.99

## Operaciones con funciones

### Ejercitación

**3** Halla las operaciones indicadas si $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 3x^3 - x^2$.

a. $f(x) + g(x)$

b. $f(x) \div [g(x) - f(x)]$

c. $f(x) \cdot g(x)$

d. $[f(x) + g(x)] \div g(x)$

**4** Dadas las funciones

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = x^2 - 4$, halla el dominio y el recorrido de cada función.

a. $f(x) + g(x)$

b. $g(x) - f(x)$

c. $f(x) \cdot g(x)$

d. $f(x) \div g(x)$

## Composición de funciones

### Ejercitación

**5** Representa las tres funciones y compara los dominios y los recorridos de cada una.

a. $f(x) = x^2 + x$

$g(x) = 3x + 2x^2$

$f(x) \circ g(x)$

b. $h(x) = \sqrt{x+2}$

$k(x) = 2x^2 + 2$

$k(x) \circ h(x)$

**6** Evalúa, si es posible, los valores en las funciones.

$g[f(-2)]$, $g[f(-3)]$, $g[f(2)]$ y $g[f(5)]$

$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$

## Funciones inyectivas y funciones inversas

### Razonamiento

**7** Representa cada una de las funciones y determina si son inyectivas. Luego escribe los intervalos en donde son crecientes y decrecientes.

a. $f(x) = 3x + 5$

b. $f(x) = 3x + 2$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d. $f(x) = x^3 - 2x^2$

**8** Dada $f(x) = \dfrac{2x+2}{5}$.

a. Halla su inversa.

b. Representa las dos funciones.

c. Realiza la composición entre las dos funciones.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Estrategia: Hacer una gráfica

### Problema

Analiza la función inyectiva $f(x) = 3x + 1$. ¿Cómo se relacionan gráficamente la función y su inversa?

### 1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona el enunciado?
  R: La expresión algebraica de una función.
- ¿Qué se pide?
  R: La relación gráfica entre la función y su inversa.

### 2. Crea un plan

- Identifica las propiedades de la función y evalúa las características que debe cumplir para admitir inversa. Traza las dos gráficas en un mismo plano.

### 3. Ejecuta el plan

- Para encontrar la función inversa, se despeja $x$ en la función y se intercambia $x$ con $y$.

$\frac{y-1}{3} = x$, luego la función inversa es $y = \frac{x-1}{3}$.

- Gráficamente se tiene:

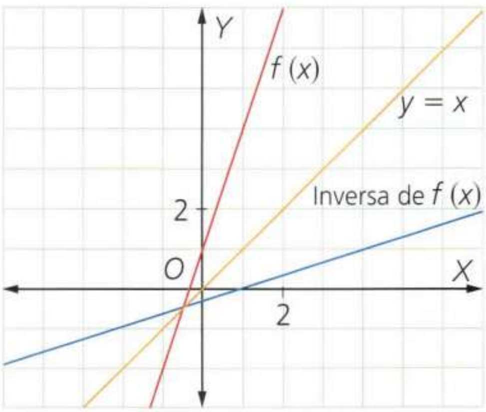



Figura 2.100

**R:** La función y su inversa son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

### 4. Comprueba la respuesta

- Verifica que $f \circ f^{-1}(x) = x$.

## Aplica la estrategia

**1** Observa la Figura 2.101 que corresponde a la función $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

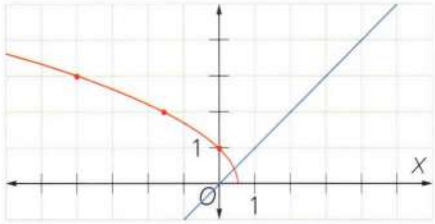



Figura 2.101

¿Podrías determinar algunos puntos del plano y trazar la gráfica correspondiente a $f^{-1}(x)$?

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

## Resuelve otros problemas

**2** La fórmula que relaciona la temperatura en °F y °C está dada por la expresión $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$. ¿Para qué temperatura la lectura es igual en las dos escalas?

**3** Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{1-4x}$, ¿es posible calcular $g(f(3))$?

## Formula problemas

**4** Escribe una función que tenga inversa y determina la expresión de esta última.

### Enriquece tu vocabulario

- Busca el significado de *función inversa* y *función recíproca* y explica si son equivalentes.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Evaluación del aprendizaje

## Concepto de función. Dominio y recorrido

### Razonamiento

**1** Escribe falso (F) o verdadero (V) de acuerdo con la validez de cada una de las siguientes proposiciones.

VERDADERO/FALSO

a. El número real $x$ perteneciente al dominio de una función $f$, recibe el nombre de variable dependiente. ( )

b. El dominio de la función $f(x) = x^2 + x$ es el conjunto de todos los números reales. ( )

c. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$ es el conjunto de todos los números reales mayores que 0. ( )

d. El recorrido de la función $g(x) = \cos x$ es el mismo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. ( )

e. El dominio de $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ es el conjunto de todos los números reales positivos. ( )

### Razonamiento

**2** Relaciona cada función con su rango:

ACTIVIDAD DE RELACIONAR

| | |
|---|---|
| a. $f(x) = x^2 + 1$ | $[1, \infty)$ |
| b. $f(x) = x^2 - 4$ | $[0, 1) \cup (1, \infty)$ |
| c. $f(x) = 9 - x^2$ | $[1, \infty)$ |
| d. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ | $(-\infty, 9]$ |
| e. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ | $[-4, \infty)$ |

### Modelación

**3** La tarifa de un taxi en una ciudad es de \$200 por bajada de bandera y por cada kilómetro recorrido \$80.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Haz una tabla que exprese el precio del viaje según los kilómetros que se recorran.

b. Encuentra la función que relaciona los kilómetros recorridos ($x$) y el precio del viaje ($y$).

c. Representa dicha función gráficamente.

d. ¿Cuál es el dominio de la función?

e. ¿Cuál es el rango de la función?

### Resolución de problemas

**4** Decide cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función. Determina su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a.

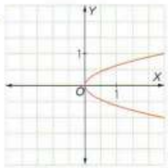


Figura 2.102

b.

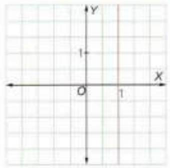


Figura 2.103

c.

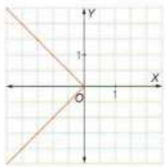


Figura 2.104

d.

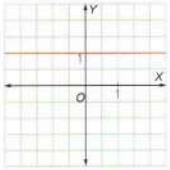


Figura 2.105

## Operaciones con funciones

### Comunicación

**5** Asocia cada función con su gráfica.

ACTIVIDAD DE RELACIONAR

a. $y = -3x + 5$ 　 b. $y = (x + 2)^2$

c. $y = 3x^2$ 　 d. $y = -4x$

e. $y = -\dfrac{1}{x-4}$

A.

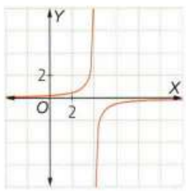


Figura 2.106

B.

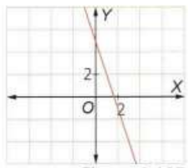


Figura 2.107

C.

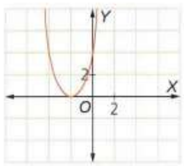


Figura 2.108

D.

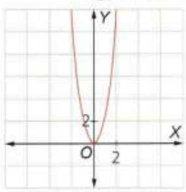


Figura 2.109

E.

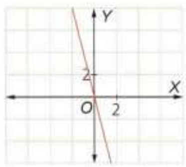


Figura 2.110

## Composición de funciones

### Ejercitación

**6** Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{5}$, halla:

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(g(0))$ 　 b. $f(g(-2))$

c. $g(f(5))$ 　 d. $f(g(x))$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### Resolución de problemas

**7** La relación entre la temperatura del aire $T$ (en °C) y la altitud $h$ (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \leq h \leq 20\,000$. Si la temperatura a nivel del mar es de 16 °C y por cada 5 000 m de altitud que se sube, la temperatura del aire baja 7 °C: SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Expresa $T$ en función de $h$.

b. Calcula la temperatura del aire a 15 000 m.

c. Calcula la altitud a la que la temperatura es 0 °C.

## Funciones inyectivas y funciones inversas

### Ejercitación

**8** Decide si la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$ es inyectiva. ¿Tiene inversa la función $f$? Si así, es encuentra $f^{-1}$ y grafica $f$ y $f^{-1}$ en el mismo plano. ACTIVIDAD DE REFUERZO

## Algunas propiedades de las funciones

### Resolución de problemas

**9** El nivel de audiencia (evaluado en una escala de 0 a 10) de cierto programa de televisión de 30 minutos de duración se comporta de acuerdo con la función: $I(t) = At^2 + Bt + C, 0 \leq t \leq 30, (A \neq 0)$, donde $A$, $B$ y $C$ son constantes a determinar. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar el programa se alcanza el índice de audiencia 10 y que el programa se inicia con un índice de audiencia 6:

a. Determina las constantes $A$, $B$ y $C$.

b. Traza la gráfica de la función. Para ello, elabora una tabla de valores.

## Funciones pares y funciones impares

### Ejercitación

**10** Clasifica cada función como par, impar o ninguna de las dos. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(m) = \dfrac{m}{m+4}$

b $f(x) = 3x^3 - 2x$.

c. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-2}$

## Funciones periódicas

### Comunicación

**11** Dibuja una función periódica de periodo $T = 4$, siempre creciente y simétrica respecto al origen de coordenadas ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

## Función exponencial

### Modelación

**12** Halla el dominio y el recorrido de la función $f(x) = 3^x$, describe sus características y traza su gráfica. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## Función logarítmica

### Ejercitación

**13** Halla el dominio de definición de las siguientes funciones: ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \log(x + 3)$ b. $g(x) = \log(x^2 + 3)$

## Construcción de funciones por traslación y dilatación

### Comunicación

**14** Completa cada uno de los siguientes enunciados relacionados con la dilatación y la traslación de funciones. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. A partir de la gráfica de una determinada función $y = f(x)$, se puede representar la gráfica de cualquier función de la forma $y = f(x) + b$, siendo $b$ un número real cualquiera. Si $b > 0$, la gráfica se desplaza .................................................. $b$ unidades.

b. A partir de la gráfica de una determinada función $y = f(x)$, se puede representar cualquier función de la forma $y = b(f(x))$ siendo $b$ un número real menor que 1. La gráfica de $f(x)$ se alarga .......................................................................... .

## Variación lineal y exponencial. Razón de cambio

### Modelación

**15** Se bombea aire en el interior de un globo esférico a razón de 4,5 pies cúbicos por minuto. Calcula la razón de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 pies. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Razones trigonométricas

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ya sabemos

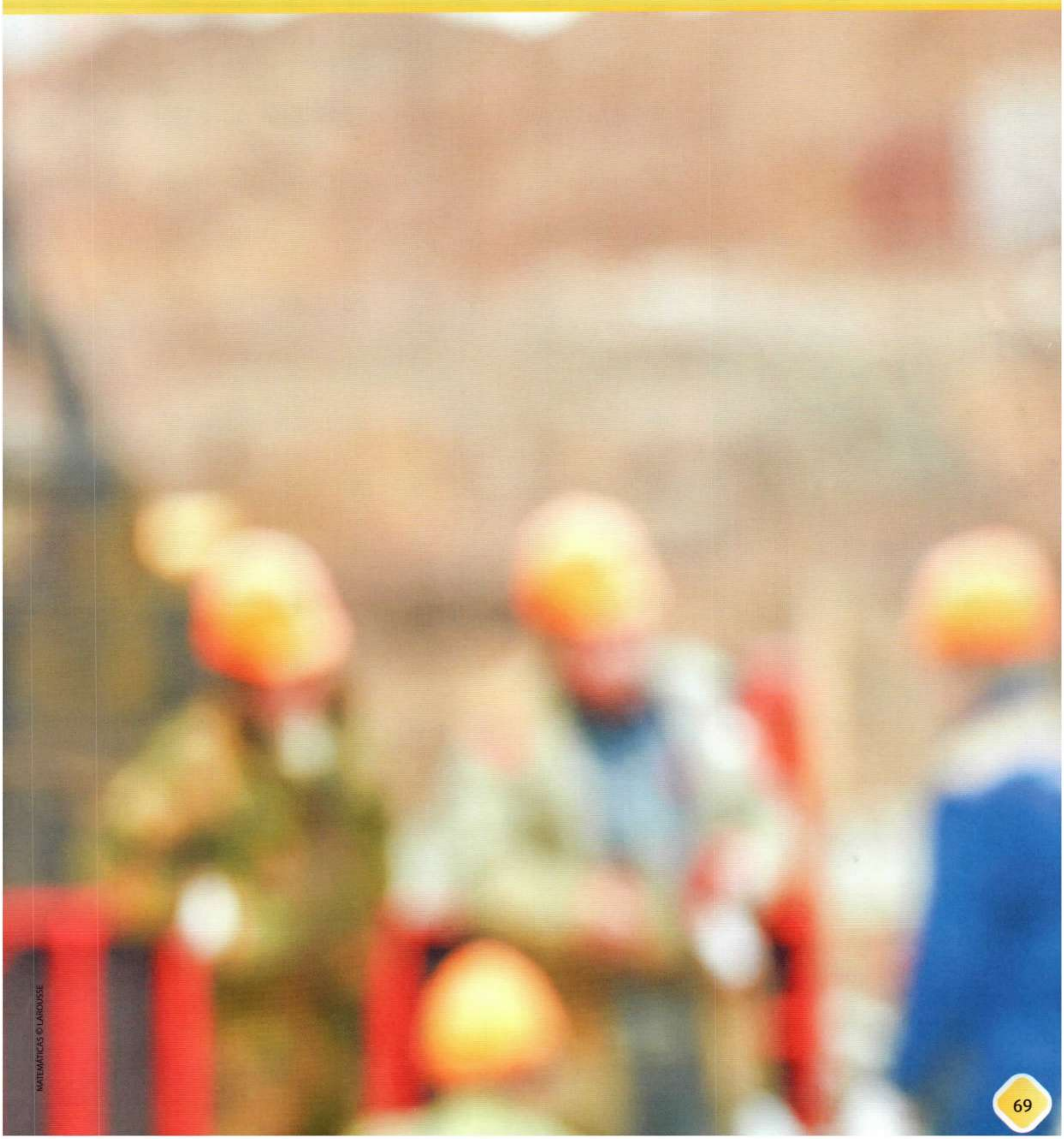
- Reconocer el conjunto de valores de cada una de las variables relacionadas entre sí.

## Vamos a aprender

- A interpretar la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y para cualquier ángulo.

## Nos sirve para

- Determinar la medida de ángulos y calcular distancias de forma precisa.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Medida de ángulos

**Saberes previos**

¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj a las 3:00, a las 6:00; a las 9:00 y a las 12:00? Haz un dibujo en cada caso.

**Analiza**

Un viajero observa en su brújula que debe girar $52° 24' 18''$ al oriente para llegar a su destino.

- ¿En qué sistema de unidades está expresada la medida de este ángulo?

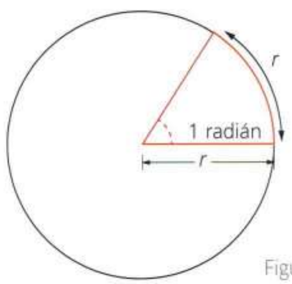



Figura 3.1

Un ángulo que gira en el sentido contrario al al movimiento de las agujas del reloj, se considera positivo, mientras que si lo hace en el sentido horario, se considera negativo. Así, un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ corresponde a $\frac{1}{4}$ de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj y otro de $-\frac{\pi}{2}$ rota esa fracción pero en el sentido de las manecillas del reloj.

**Conoce**

## 1.1 Sistema sexagesimal

La medida del ángulo de giro de la brújula está expresada de manera precisa en el sistema sexagesimal. En este sistema, un ángulo de rotación completo se divide en 360 ángulos iguales. Cada ángulo mide un **grado** (1°) sexagesimal. Para medir ángulos más pequeños se utilizan los **minutos** (′) y los **segundos** (″). Si 1° se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de ellos equivale a 1′; y si 1′ se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de ellos equivale a 1″. Así, la medida expresada es de 52 grados, 24 minutos y 18 segundos.

En el **sistema sexagesimal** se manejan las siguientes equivalencias.

$$1° = \left(\frac{1}{360}\right)^{\circ} \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} \quad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} \quad 1° = 60' \quad 1' = 60''$$

**Ejemplo 1**

La expresión decimal de la medida $52° 24' 18''$ se puede obtener como sigue.

$$52° 24' 18''$$

$$= 52° + 24 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} + 18 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$ ← Se multiplican los minutos por $\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y los segundos por $\left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$.

$$52° + 0{,}4° + 0{,}005°$$ ← Se realizan las sumas parciales.

Por lo tanto, $52° 24' 18'' = 52{,}405°$.

## 1.2 Sistema cíclico

Si se toma cualquier circunferencia de radio $r$ y se lleva esta longitud ($r$) sobre un arco de la misma (como se observa en la Figura 3.1) el ángulo central determinado por el arco y sus radios extremos mide **un radián**. Se simboliza como **1 rad**.

**Ejemplo 2**

Cuando el radio de la circunferencia es 1, la longitud de la circunferencia es $2\pi$. Por lo anterior, la medida angular de una rotación completa es $2\pi$ rad. Observa la Figura 3.2.

$$1 \text{ rotación} = 2\pi \text{ rad} \quad \frac{1}{2} \text{ rotación} = \pi \text{ rad} \quad \frac{1}{4} \text{ de rotación} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

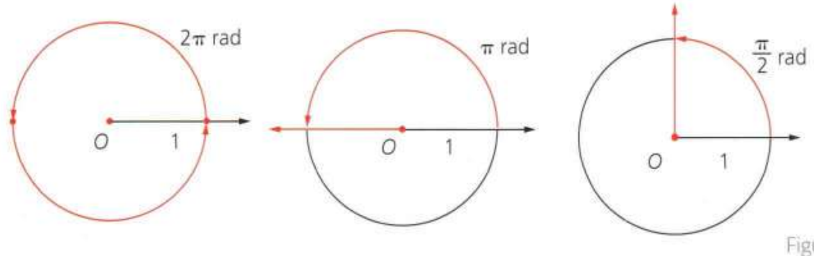



Figura 3.2



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 1.3 Relación entre grados sexagesimales y radianes

Como la medida angular de una rotación completa es de 360° o $2\pi$ radianes, la relación entre grados y radianes está dada por la proporción:

$$\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{180°}{\pi \text{ rad}}$$

Para expresar grados en radianes se multiplica por $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$.

Para expresar radianes en grados se multiplica por $\left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right)$.

**Ejemplo 3**

Para expresar 135° en radianes, se multiplica por $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$.

$$135° \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{135° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$$

Es decir, $135° = \frac{3}{4}\pi$ rad.

## 1.4 Longitud de arco

Es posible hallar la longitud de un arco $S$ si se conoce la amplitud del ángulo $\theta$ (en radianes) que lo subtiende y la medida del radio $r$ (Figura 3.3). Para esto, se utiliza la expresión:

$$S = \theta r$$

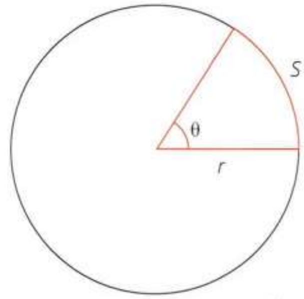


Figura 3.3

Al despejar cada variable, se obtienen expresiones para hallar otras medidas.

$$\theta = \frac{S}{r} \quad \text{y} \quad r = \frac{S}{\theta}$$

**Ejemplo 4**

¿Qué distancia ha recorrido un patinador que se mueve desde $A$ hasta $B$ en la pista circular representada en la Figura 3.4, si describe un ángulo de 108°?

Si la distancia recorrida por el patinador es la longitud del arco $S$, que corresponde al ángulo $\theta$, entonces:

Se expresa el ángulo en radianes.

$$108° \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \frac{3}{5}\pi \text{ rad}$$

Se calcula la longitud de arco.

$$S = \theta r$$

$$S = \frac{3}{5}\pi \cdot 25 = 15\pi$$

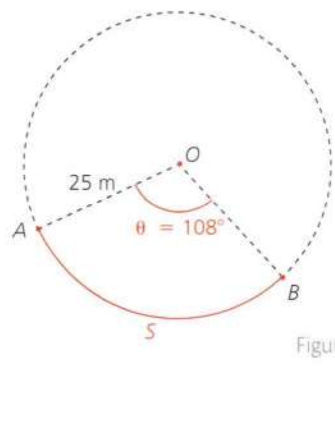


Figura 3.4

Lo anterior significa que la distancia recorrida por el patinador es $15\pi$ m o 47,12 m, aproximadamente.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Medida de ángulos

## MatemaTICS

**Expresa medidas angulares en la calculadora científica**

Las calculadoras científicas permiten el uso de tres sistemas de medición: *Deg*, *Rad* y *Grad*, que respectivamente corresponden a grados, radianes y gradientes. Estos se activan desde el menú. Una vez seleccionado el sistema grados, es posible convertir medidas angulares del sistema sexagesimal expresadas en grados, minutos y segundos a expresiones decimales, y viceversa.

Observa el procedimiento para expresar 58, 69° en grados, minutos y segundos.

- Selecciona el sistema grados y digita la secuencia 5 8 • 6 9 F1 EXE F5
- En pantalla se observa así:


Por lo tanto, $58,69° = 58°\ 41'\ 24''$.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Convierte a grados, minutos y segundos las siguientes medidas angulares.

a. 39,78° b. −32,98°
c. −180° d. 45,45°
e. 259,12° f. −8,745°
g. 89,45° h. 368,78°
i. −78,83° j. −57,21°

**2** Expresa en grados decimales las medidas angulares que se presentan a continuación.

a. $2°\ 4'\ 14''$ b. $5°\ 5'\ 7''$
c. $47°\ 59'$ d. $-12°\ 47'$
e. $48°\ 36'\ 45''$ f. $24°\ 24'\ 24''$
g. $-26°\ 12'\ 58''$ h. $-16°\ 15'$

### Comunicación

**3** Mide los siguientes ángulos y expresa su medida en grados y radianes.

a.

Figura 3.5

b.

Figura 3.6

**4** Representa gráficamente estos ángulos.

a. 39° b. −98°
c. −180° d. 45°
e. 259° f. −45°
g. $\frac{1}{6}\pi$ rad h. $\frac{5}{9}\pi$ rad
i. $\frac{7}{4}\pi$ rad j. $-\frac{5}{8}\pi$ rad
k. $\frac{\pi}{2}$ rad l. $-\frac{\pi}{2}$ rad

**5** Completa la Tabla 3.1.

| Grados | Radianes | Rotaciones |
|---|---|---|
| 35° | | |
| | $\pi$ | |
| 256° | | |
| | $\frac{2\pi}{7}$ | |
| | | $\frac{5}{4}$ |

Tabla 3.1

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**6** Observa la Figura 3.7. Luego, escribe las medidas faltantes en grados y radianes.

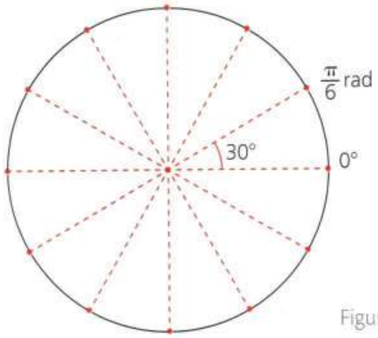



Figura 3.7

**7** Lee y soluciona.

Un ángulo en **posición normal** es un ángulo representado en un sistema de coordenadas, donde su vértice es el origen y su lado inicial coincide con el semieje positivo *X*, tal como muestra la Figura 3.8.

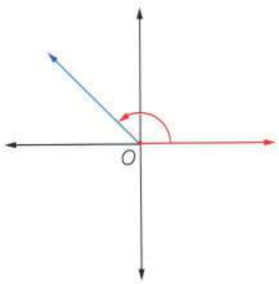



Figura 3.8

Representa los siguientes ángulos en posición normal.

a. $42°$
b. $-135°$
c. $135°$
d. $-5$ rad
e. $\frac{3}{2}\pi$ rad
f. $\frac{5}{9}\pi$ rad
g. $\frac{7}{4}\pi$ rad
h. $-\frac{5}{4}\pi$ rad

### Ejercitación

**8** Encuentra la longitud de arco correspondiente al radio y al ángulo dados en cada caso.

a. $r = 2$ cm; $\theta = \pi$ rad
b. $r = 5$ m; $\theta = 2\pi$ rad
c. $r = 28$ m; $\theta = \frac{5}{9}\pi$ rad
d. $r = 6$ km; $\theta = \frac{5}{9}\pi$ rad

**9** Halla la medida del radio que corresponde a la longitud de arco y al ángulo dados en cada caso.

a. $s = 1{,}2$ m; $\theta = \pi$ rad
b. $s = 28$ m; $\theta = \frac{7}{2}\pi$ rad
c. $s = 2$ cm; $\theta = 3\pi$ rad
d. $s = 7$ km; $\theta = \frac{8}{6}\pi$ rad

**10** Halla la medida del ángulo a partir de los datos que se dan a continuación.

a. $r = 5$ cm; $s = 2{,}8$ cm
b. $r = 8{,}1$ m; $s = 9{,}8$ m
c. $r = 10$ m; $s = 5{,}5$ m
d. $r = 9$ km; $s = 0{,}1$ km

### Resolución de problemas

**11** La rueda delantera de una moto mide 50 cm de diámetro. ¿Qué distancia ha recorrido la moto si la rueda ha dado 120 vueltas? ¿Cuántas vueltas ha dado la rueda trasera si su diámetro es de 60 cm?

**12** Tres barcos *A*, *B* y *C* navegan por el océano Atlántico como se observa en la Figura 3.9.

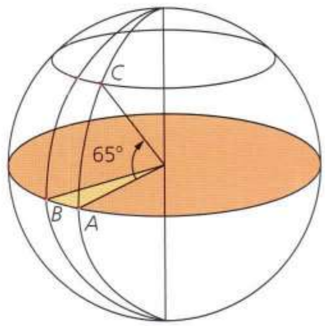



Figura 3.9

a. ¿Cuál es la distancia entre el barco *A* y el barco *C* si el diámetro de la Tierra mide 12 800 km?

b. ¿Cuál es la medida angular entre los barcos *A* y *B* si la distancia entre ellos es de 1 800 km?

## Evaluación del aprendizaje

Un aspersor es un dispositivo mecánico que gira sobre un mecanismo que le produce un movimiento de giro de un sexto de rotación. Su uso es básicamente para riego de césped o cultivos.

a. ¿Cuántos grados sexagesimales corresponden a un sexto de rotación?

b. ¿A cuántos radianes corresponde un sexto de rotación?

c. Si el chorro de agua que lanza el aspersor es de 16 m, ¿cuál es la longitud del arco correspondiente?

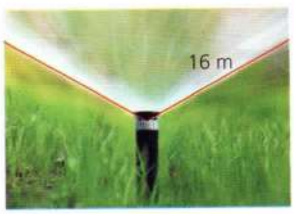



Figura 3.10

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Triángulos

**Saberes previos**

Si tienes tres palillos, uno de 3 dm, otro de 4 dm y otro de 5 dm, ¿se puede construir un triángulo con estos? Si es así, ¿qué características tiene?

**Analiza**

Se dispone de seis palillos de madera con las medidas que se muestran en la Figura 3.11.


Figura 3.11

- ¿Qué clases de triángulos se pueden formar con ellos?

**Conoce**

## 2.1 Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos (Tabla 3.2).

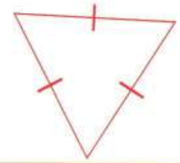
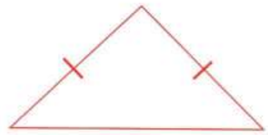
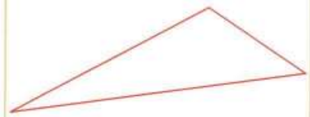
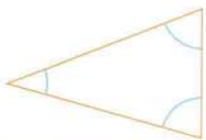
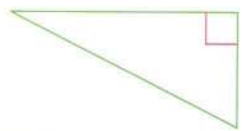
| Clases de triángulos según la medida de sus lados | | |
|---|---|---|
| **Equilátero** | **Isósceles** | **Escaleno** |
|  |  |  |
| Los tres lados tienen la misma medida. | Dos de sus lados tienen la misma medida. | Sus tres lados tienen diferente medida. |
| **Clases de triángulos según la medida de sus lados** | | |
| **Acutángulo** | **Obtusángulo** | **Rectángulo** |
|  |  |  |
| Todos sus ángulos son agudos. | Tiene un ángulo obtuso. | Tiene un ángulo recto. |

Tabla 3.2

De acuerdo con lo anterior, con los palillos de la Figura 3.11 pueden construir uno equilátero, tres isósceles acutángulos y uno escaleno obtusángulo.

## 2.2 Propiedades de los triángulos

A continuación se enuncian algunas propiedades de los triángulos.

- La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°.
- La medida de cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero es 60°.
- Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, entonces los lados opuestos a esos ángulos son congruentes.

## 2.3 Relaciones en un triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras

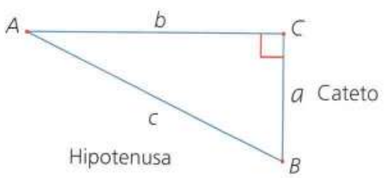



Figura 3.12

La Figura 3.12 muestra un triángulo rectángulo *ACB*. El lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa** (***c***) y los otros dos lados reciben el nombre de **catetos** (***a*** y ***b***).

El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 1**

Una escalera de 6 m se apoya sobre una pared alcanzando una altura de 3 m y formando un ángulo de 56°. Para determinar la distancia que separa la pared de la base de la escalera y el ángulo que forma el suelo con la escalera, se puede representar la situación mediante un triángulo rectángulo, como muestra la Figura 3.13. En este caso, se conoce el valor de la hipotenusa, el valor de un cateto y el valor de un ángulo. Al utilizar el teorema de Pitágoras y la relación entre los ángulos internos de un triángulo, se tiene que:

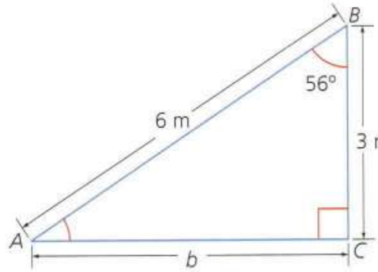


Figura 3.13

$$6^2 = 3^2 + b^2 \qquad m\measuredangle A + m\measuredangle B + m < C = 180^\circ$$
$$b^2 = 6^2 - 3^2 \qquad m\measuredangle A + 56^\circ = 180^\circ - 90^\circ$$
$$b^2 = 36 - 9 \qquad m\measuredangle A = 90^\circ - 56^\circ$$
$$b^2 = 27 \qquad m\measuredangle A = 34^\circ$$
$$b = \sqrt{27} \approx 5{,}19 \text{ m}$$

La distancia de la pared a la base de la escalera es de aproximadamente 5,19 m. El ángulo que forma el suelo con la escalera es de 34°.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Calcula la medida de los ángulos desconocidos en cada triángulo.

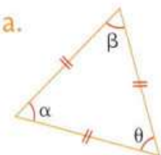
a.


Figura 3.14

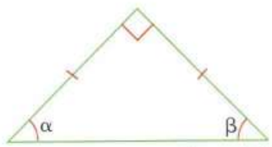
b.


Figura 3.15

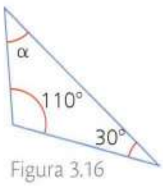
c.


Figura 3.16

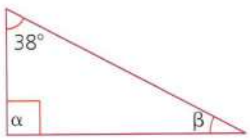
d.


Figura 3.17

**2** Encuentra la medida de $x$ en cada triángulo.

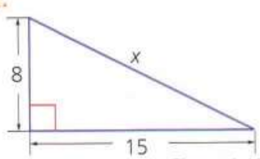
a.


Figura 3.18

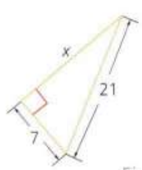
b.


Figura 3.19

### Resolución de problemas

**3** Felipe debe decorar la diagonal de una bandera rectangular blanca de 4 m por 8 m con una cinta roja. ¿Qué medida debe tener la cinta?

## Evaluación del aprendizaje

Clasifica cada uno de los siguientes triángulos. Halla la medida del ángulo que falta en cada uno y determina la hipotenusa en el triángulo rectángulo.

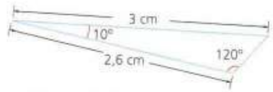


Figura 3.20

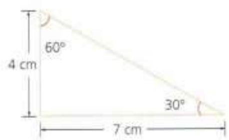


Figura 3.21

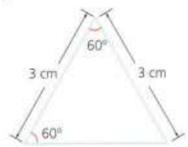


Figura 3.22

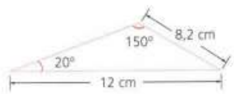


Figura 3.23

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Cuando te comportas correctamente generas autocontrol, autoestima y disciplina. Diseña un logo y un eslogan que invite a tus compañeros a comportarse correctamente como parte de llevar un estilo de vida saludable. Si usas un triángulo para diseñar el logo, ¿sería equilátero, isósceles o escaleno? Explica tu elección.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

## Saberes previos

Dibuja dos triángulos rectángulos isósceles y determina la razón entre uno de los catetos y la hipotenusa. ¿Obtienes aproximadamente el mismo valor? Explica tus observaciones.

## Analiza

Observa la Figura 3.24.

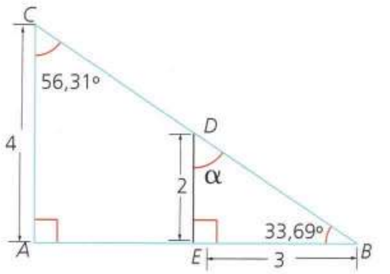



Figura 3.24

- ¿Cuál es la medida del ángulo $\alpha$? ¿Cuánto mide el segmento $AB$?

## Conoce

Los triángulos rectángulos $ABC$ y $EBD$ son semejantes porque cumplen el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (los dos tienen un ángulo recto y comparten la medida del ángulo de 33,69°). Por lo tanto, el ángulo $\alpha$ es congruente con el ángulo $C$; es decir, $\alpha = 56{,}31°$.

Por ser triángulos semejantes, se pueden establecer razones y proporciones entre las medidas de sus lados y así hallar la medida del segmento $AB$.

$$\frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EB}\text{; entonces, } \frac{4}{2} = \frac{AB}{3}$$

Por lo tanto, $AB = 6$.

Otro tipo de razones se pueden establecer entre las medidas de los lados y los ángulos agudos en un triángulo rectángulo. Estas razones se denominan razones trigonométricas.

Sea el triángulo rectángulo de la Figura 3.25, se definen las **razones trigonométricas** del ángulo $B$ como se presenta a continuación.

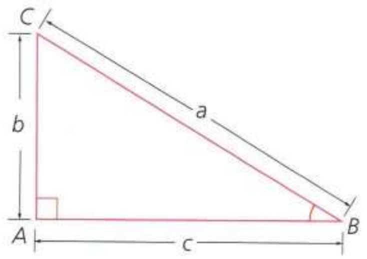



Figura 3.25

| | |
|---|---|
| Seno del ángulo $B$ | $\operatorname{sen} B = \dfrac{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B}{\text{Medida de la hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$ |
| Coseno del ángulo $B$ | $\cos B = \dfrac{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B}{\text{Medida de la hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$ |
| Tangente del ángulo $B$ | $\tan B = \dfrac{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B}{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B} = \dfrac{b}{c}$ |
| Cotangente del ángulo $B$ | $\cot B = \dfrac{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B}{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B} = \dfrac{c}{b}$ |
| Secante del ángulo $B$ | $\sec B = \dfrac{\text{Medida de la hipotenusa}}{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B} = \dfrac{a}{c}$ |
| Cosecante del ángulo $B$ | $\operatorname{cosec} B = \dfrac{\text{Medida de la hipotenusa}}{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B} = \dfrac{a}{b}$ |

Una **razón trigonométrica** expresa la relación entre la medida de uno de los ángulos agudos y la medida de los lados de un triángulo rectángulo.

### Ejemplo 1

Las razones trigonométricas para el ángulo agudo $\alpha$ en el triángulo rectángulo $ABC$ de la Figura 3.26 se calculan aplicando las relaciones anteriores.

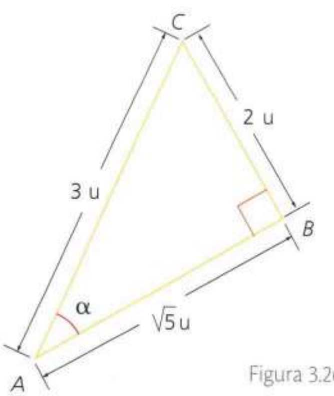



Figura 3.26

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2}$$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

Si se sabe que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, es posible calcular las demás razones trigonométricas para el ángulo $\theta$. Dado que el seno se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, se puede dibujar un triángulo rectángulo tal que $\theta$ sea uno de sus ángulos agudos, la longitud del cateto opuesto a $\theta$ sea $\sqrt{7}$ u y la de la hipotenusa, 4 u (Figura 3.27).

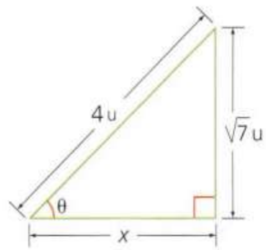



Figura 3.27

Al utilizar el teorema de Pitágoras, se obtiene que la longitud del cateto adyacente a $\theta$ está dada por:

$$x = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9} = 3\text{ u}$$

De modo que, las demás razones trigonométricas se pueden calcular así:

$$\cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

**Ejemplo 3**

- Observa la Figura 3.28.

  Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ del triángulo rectángulo, se usa el teorema de Pitágoras como sigue:

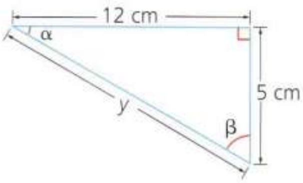



Figura 3.28

  $y^2 = 5^2 + 12^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$

  Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13} \qquad \tan\alpha = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{13}{12} \qquad \cot\alpha = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13} \qquad \cos\beta = \frac{5}{13} \qquad \tan\beta = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{13}{12} \qquad \sec\beta = \frac{13}{5} \qquad \cot\beta = \frac{5}{12}$$

- Si se sabe que $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$ y $\tan\beta = \frac{3}{4}$, para calcular las demás razones trigonométricas se tiene en cuenta lo siguiente.

  Como $\operatorname{cosec}\beta$ es una razón inversa a $\operatorname{sen}\beta$, $\sec\beta$ es inversa a $\cos\beta$ y $\cot\beta$ es inversa a $\tan\beta$, entonces:

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{3},\ \sec\beta = \frac{5}{4} \text{ y } \cot\beta = \frac{4}{3}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

## MatemaTICS

**Calcula razones trigonométricas con la calculadora científica**

Las calculadoras científicas permiten obtener las razones trigonométricas de un ángulo.

- Para calcular seno de 30° digita la secuencia:

sin 3 0 EXE

- Al calcular la cotangente, la secante y la cosecante se debe tener en cuenta que son razones trigonométricas inversas. Entonces, para calcular cosecante de 30° digita la secuencia.

1 ÷ ( sin 3 0 ) EXE

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos $ABC$ tales que:
   a. $m\measuredangle A = 90°$, $b = 10$ cm y $c = 12$ cm
   b. $m\measuredangle B = 90°$, $b = 15$ cm y $c = 12$ cm
   c. $m\measuredangle C = 90°$, $a = 15$ cm y $c = 25$ cm

### Comunicación

2. Halla las razones trigonométricas del ángulo $\theta$ en cada triángulo rectángulo.

a.

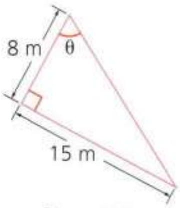



Figura 3.29

b.

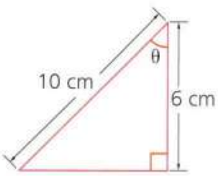



Figura 3.30

c.

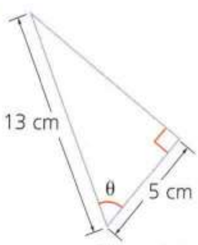



Figura 3.31

d.

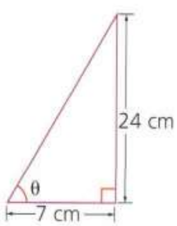



Figura 3.32

3. Encuentra, en cada caso, todas las razones trigonométricas del ángulo $\beta$.
   a. Si $\tan\beta = \frac{7}{9}$
   b. Si $\sec\beta = \frac{13}{5}$

### Razonamiento

4. Calcula la cosecante, la secante y la cotangente del ángulo de menor amplitud del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 10 cm, respectivamente.

### Modelación

5. Halla las razones trigonométricas de un ángulo de 30° y de otro de 60°. Para ello, toma un triángulo equilátero de lado $a$ y divídelo en dos por una de sus alturas.

### Comunicación

6. Observa el triángulo de la Figura 3.33.

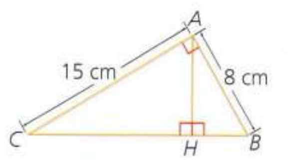



Figura 3.33

   a. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos $C$ y $B$.
   b. Halla la medida de $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Ejercitación

**7** Utiliza la calculadora para determinar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a. sen 36°  b. cos 24°

c. tan 31°  d. cosec 27°

e. sec 26° 33′  f. tan 23° 23′ 23″

g. $\cos \frac{3\pi}{7}$  h. sec 0,3

i. $\tan \frac{\pi}{5}$  j. cot 0,75

## Razonamiento

**8** Responde las siguientes preguntas.

a. En un triángulo rectángulo, ¿cuál es el lado de mayor longitud?

b. ¿Por qué el seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo nunca es mayor que 1?

c. ¿Es posible que la tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo sea igual a 1? Justifica tu respuesta.

**9** Halla las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de manera exacta en cada uno de los triángulos.

a.

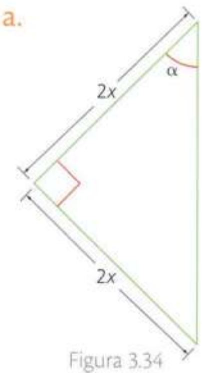



Figura 3.34

b.

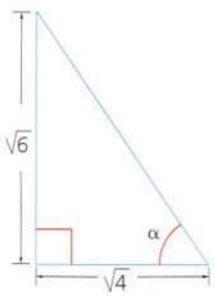



Figura 3.35

c.

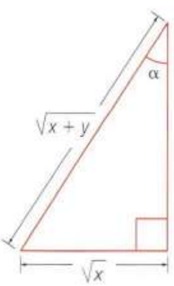



Figura 3.36

d.

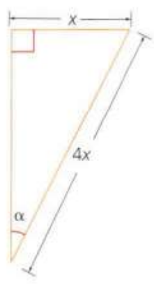



Figura 3.37

**10** Utiliza la información para responder la pregunta.

En un triángulo *MNP*, ∡*P* es recto. ¿Qué relación existe entre el sen *M* y el cos *N*? Justifica tu respuesta.

**11** Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la Figura 3.38.

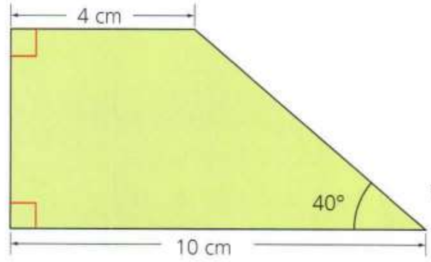



Figura 3.38

**12** Halla las razones trigonométricas para el ángulo cuyo vértice es (0, 0), si su lado inicial coincide con el eje *X* y su lado terminal pasa por el punto dado.

a. (3, 1)  b. (1, 3)

c. (1, 1)  d. (2, 2)

## Evaluación del aprendizaje

**i** Las bases de un trapecio isósceles miden 10 cm y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35°.

Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

**ii** Un cono mide 3 cm de radio y 7 cm de altura (Figura 3.39).

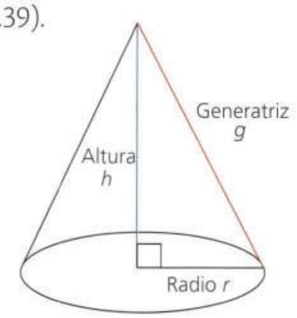



Figura 3.39

a. Halla la medida de la generatriz.

b. Encuentra el área del cono.

c. Calcula el volumen del cono.

d. Expresa las razones trigonométricas seno y coseno entre los elementos del cono, tomando como ángulo α aquel formado por el radio y la generatriz.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Razones trigonométricas de ángulos notables

**Saberes previos**

Dibuja un triángulo equilátero, traza sus tres alturas y mídelas. ¿Obtuviste el mismo valor? ¿Cuántos triángulos rectángulos determinaste al trazar las alturas?

**Analiza**

La medida de los lados del triángulo equilátero $ABC$ de la Figura 3.40 es $a$, y $\overline{BM}$ es la altura sobre el lado $\overline{AC}$.

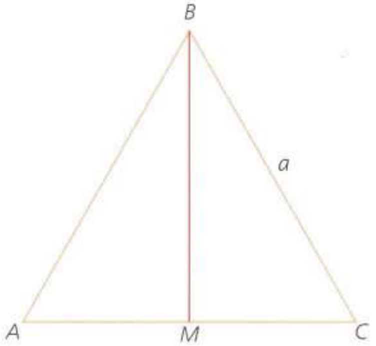



Figura 3.40

- ¿Cuáles son las medidas de los ángulos internos del $\triangle BMC$?

  ¿Cuáles son las medidas de $\overline{MC}$ y $\overline{BM}$?

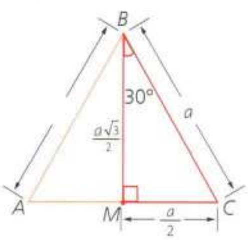



Figura 3.42

**Conoce**

Como el $\triangle ABC$ es equilátero, los ángulos interiores miden 60°; por lo tanto, $m\measuredangle ACB = 60°$. Por su parte, la altura $\overline{BM}$ forma sobre $\overline{AC}$ el ángulo recto $BMC$; es decir que $m\measuredangle BMC = 90°$. Por último, la altura $\overline{BM}$ es bisectriz de $\measuredangle ABC$, lo que significa que $m\measuredangle CBM = 30°$ (Figura 3.41).

La altura $\overline{BM}$ del $\triangle ABC$ determina dos segmentos de igual medida (por ser triángulo equilátero); por lo tanto, la medida de $\overline{MC}$ es $\frac{a}{2}$.

Para calcular la longitud de $\overline{BM}$, se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = (BM)^2 + (MC)^2 \quad \Rightarrow \quad (BM)^2 = a^2 - (MC)^2$$

$$(BM)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad BM = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$BM = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} \quad \Rightarrow \quad BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

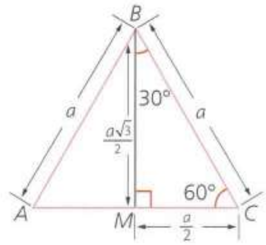



Figura 3.41

## 4.1 Razones trigonométricas para el ángulo de 30°

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 30°, se utiliza un triángulo como el de la Figura 3.42.

En este caso el cateto opuesto mide $\frac{a}{2}$, el cateto adyacente $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ y la hipotenusa $a$.

Por lo anterior:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cosec} 30° = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

Las **razones trigonométricas para el ángulo de 30°** son:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \sqrt{3} \qquad \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cosec} 30° = 2$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 4.2 Razones trigonométricas para el ángulo de 60°

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 60°, se utiliza un triángulo como el de la Figura 3.43. En este caso el cateto opuesto mide $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, el cateto adyacente $\frac{a}{2}$ y la hipotenusa $a$.

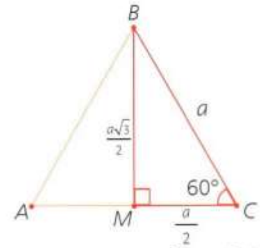


Figura 3.43

Por lo anterior:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60° = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2 \qquad \operatorname{cosec} 60° = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

## 4.3 Razones trigonométricas para el ángulo de 45°

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 45°, se utiliza un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados congruentes miden $a$ y cuyos ángulos agudos miden 45°, como se muestra en la Figura 3.44.

Para calcular la longitud de $\overline{AB}$, se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$(AB)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow \qquad (AB)^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow \qquad AB = a\sqrt{2}$$

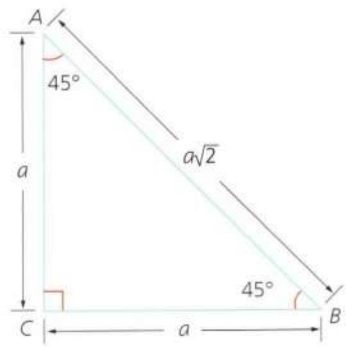


Figura 3.44

Por lo anterior:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \qquad \operatorname{cosec} 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

**Ejemplo 1**

Una escalera de seis metros se apoya contra una pared. Si forma un ángulo de 60° con el suelo, ¿hasta qué altura llega? ¿A qué distancia de la pared queda la base de la escalera?

Para responder la primera pregunta se puede usar la razón seno, así:

$\operatorname{sen}60° = \frac{h}{6}$ de donde, $h = 6 \cdot \operatorname{sen}60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ m $= 5{,}2$ m.

Para determinar la distancia a la que se encuentra la base de la escalera a la pared, conviene usar la definición de la razón coseno:

$\cos60° = \frac{x}{6}$. Al despejar $x$: $x = 6 \cdot \cos60° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ m.

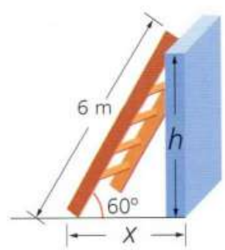


Figura 3.45

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Razones trigonométricas de ángulos especiales

**Ejemplo 2**

Utilizando los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° es posible calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\text{sen } 30° + \cos 45° + \tan 60°$$

$$\text{sen } 30° + \cos 45° + \tan 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} = \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}$$

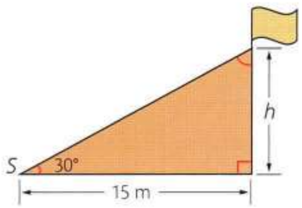


Figura 3.46

**Ejemplo 3**

Un agrimensor observa que un punto $S$ ubicado al nivel del suelo está a una distancia de 15 m de la base del asta de una bandera, como se muestra en la Figura 3.46. Para hallar la medida $h$ del asta, se puede utilizar una razón trigonométrica de 30°. En este caso, resulta conveniente emplear tan 30°, pues $h$ corresponde a la longitud del cateto opuesto y el cateto adyacente mide 15 m.

$$\tan 30° = \frac{h}{15} \Rightarrow h = 15 \cdot \tan 30° \Rightarrow h = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}$$

Entonces, la longitud del asta es de $5\sqrt{3}$ m.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Halla el valor numérico de cada expresión.

a. $\text{sen } \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}$

b. $\tan \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{6} + \text{cosec } \frac{\pi}{4}$

c. $\cot \frac{\pi}{6} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \cot \frac{\pi}{4}$

**2** Calcula el valor exacto de las siguientes expresiones.

a. $\text{cosec } \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{\pi}{3}$

b. $\text{sen } \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cot \frac{\pi}{4}$

c. $\text{sen } \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3}$

### Comunicación

**3** Calcula los valores de $a$ y $b$ en los triángulos rectángulos de las figuras 3.47 y 3.48.

a.

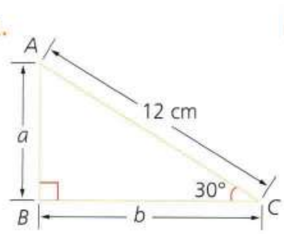


Figura 3.47

b.

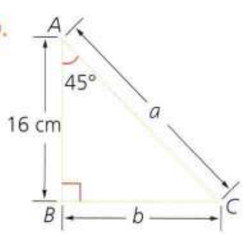


Figura 3.48

### Razonamiento

**4** Encuentra la medida desconocida en los triángulos rectángulos de las figuras 3.49 a 3.54.

a.

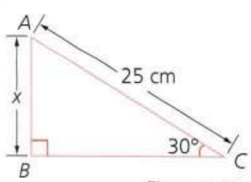


Figura 3.49

b.

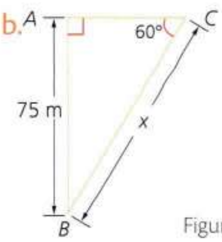


Figura 3.50

c.

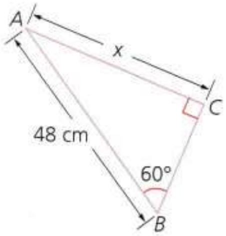


Figura 3.51

d.

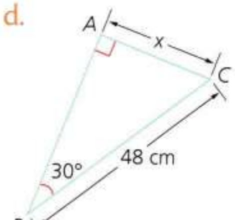


Figura 3.52

e.

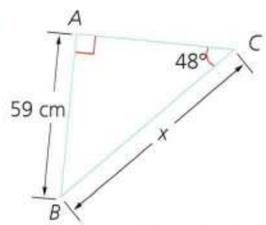


Figura 3.53

f.

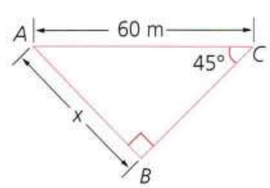


Figura 3.54

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**5** Resuelve.

a. Explica por qué el seno y el coseno de un ángulo de 45° son iguales.

b. En términos de las medidas de los catetos, ¿cómo se puede interpretar el resultado $\tan 45° = 1$?

**6** Explica cómo se puede hallar la medida del lado de un cuadrado, si se conoce la medida de una de sus diagonales y no se dispone de instrumentos de medición.

**7** Calcula la medida $a$ del lado del cuadrado que se muestra en la Figura 3.55.

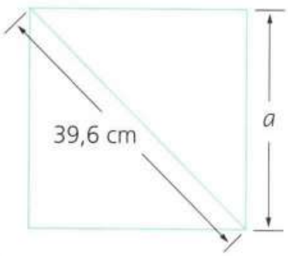



Figura 3.55

**8** La máxima distancia horizontal que alcanza una balón al ser pateado desde la grama se determina con la expresión $x = \dfrac{2v_0^{\,2}\operatorname{sen} A \cos A}{g}$, donde $A$ es el ángulo de tiro y $g$ la aceleración de la gravedad. ¿Con qué ángulo se logra el mayor alcance, con uno de 30°, con uno de 45° o con uno de 60°? Explica.

### Resolución de problemas

**9** En la Figura 3.56 se observa el plano de una zona de juego, en la que se ubicó una cuerda a lo largo de una de sus diagonales.

La longitud de la cuerda utilizada para dividir el rectángulo es 12 m y el lado más corto del rectángulo mide 7 m.

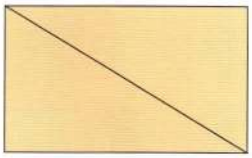


Figura 3.56

¿Cuál es la medida del ángulo determinado por la diagonal y el lado más largo del rectángulo? ¿Cuál es el área de la zona de juego?

**10** Cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30°, la sombra de un árbol mide 17,32 m. ¿Cuál es la altura del árbol? Resuelve el mismo problema para cuando el ángulo sea 45º y luego 60º. Obtén una conclusión.

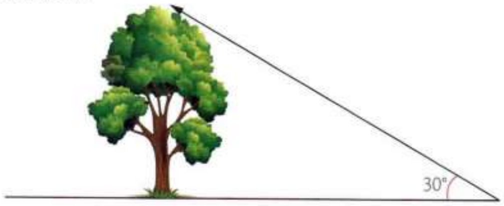



Figura 3.57

## Evaluación del aprendizaje

**i** Halla el valor de cada expresión:

a. $\dfrac{\operatorname{sen} 30° + \cos 45°}{\cos 60°}$

b. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$

**ii** Halla la altura del árbol y la distancia a la que se halla de la estaca.

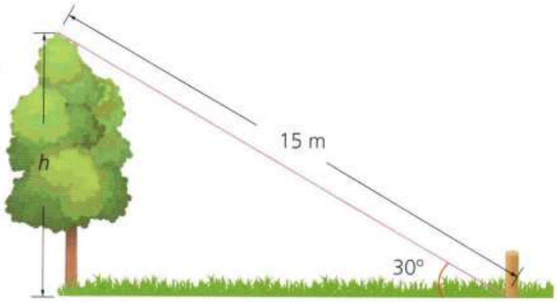



Figura 3.58

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Dos planetas están en semisextil cuando la distancia angular entre ambos es de 30 grados. Los astrólogos toman este hecho para definir los 12 signos del zodiaco.

- ¿Qué opinas de quienes toman decisiones basados en el horóscopo?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Resolución de triángulos rectángulos

### Saberes previos

Toma una cuerda y forma con ella varios triángulos, uno de ellos rectángulo. Mide los lados de cada uno de los triángulos que formaste y sus ángulos y construye una tabla con la información. ¿Qué diferencia al triángulo rectángulo de los demás?

### Analiza

Un arquitecto construye una rampa de 8 m de largo contra una pared formando un ángulo de 38° respecto al piso.

- ¿Cuál es la altura de la rampa?
- ¿Cuál es la distancia entre la base de la rampa y la pared?
- ¿Cuál es la medida del ángulo entre la rampa y la pared?

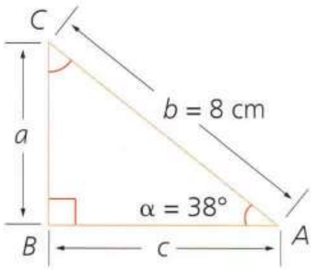


Figura 3.59

### Conoce

## 5.1 Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de un lado y de un ángulo agudo

Para responder las preguntas de la situación inicial, conviene trazar un triángulo rectángulo como el de la Figura 3.59 que modele dicha situación.

Primero, se halla la medida del ángulo desconocido. En el $\triangle ABC$ se tiene que $m\measuredangle A = 38°$ y $m\measuredangle B = 90°$.

Por lo tanto:

$$m\measuredangle C = 180° - (38° + 90°) = 52°$$

Luego, se plantean ecuaciones que relacionen alguna razón trigonométrica de los ángulos y lados conocidos con la medida de un lado desconocido.

Para calcular la medida de $c$ se utiliza el coseno de $\alpha$, dado que $\overline{AB}$ es el cateto adyancente a $\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad \cos 38° = \frac{c}{8}$$

$$c = 8 \cdot \cos 38° \quad \Rightarrow \quad c \approx 8 \cdot 0{,}79 \quad \Rightarrow \quad c \approx 6{,}32 \text{ cm}$$

Para calcular el valor de $a$ se puede usar una razón trigonométrica de alguno de los ángulos agudos del triángulo.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 38° = \frac{a}{8}$$

$$a = 8 \cdot \operatorname{sen} 38° \quad \Rightarrow \quad a \approx 8 \cdot 0{,}61 \quad \Rightarrow \quad a \approx 4{,}89 \text{ cm}$$

En resumen, el $\triangle ABC$ queda resuelto, dado que sus elementos son:

| | | |
|---|---|---|
| $m\measuredangle A = 38°$ | $m\measuredangle B = 90°$ | $m\measuredangle C = 52°$ |
| $a = 4{,}89$ cm | $b = 8$ cm | $c = 6{,}32$ cm |

De esta manera, la altura de la rampa es de 4,89 m; la distancia de la base de la rampa es de 6,32 m, y el ángulo entre la pared y la rampa es de 52°.

**Resolver un triángulo rectángulo** es hallar las medidas de sus tres lados y las medidas de sus tres ángulos. Es posible resolver un triángulo rectángulo en los siguientes casos:

- Cuando se conocen las medidas de un lado y de un ángulo agudo.
- Cuando se conocen las medidas de dos lados.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 5.2 Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de dos lados

Cuando se conocen las longitudes de dos de los lados de un triángulo rectángulo, se pueden utilizar el teorema de Pitágoras y la definición de las razones trigonométricas para encontrar las demás medidas.

**Ejemplo 1**

En la Figura 3.60 se observa el $\triangle MNO$, en el cual $n = 30$ cm y $m = 15$ cm.

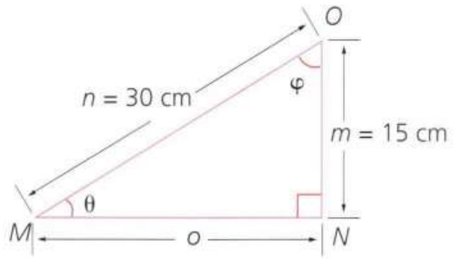



Figura 3.60

Para calcular la medida del tercer lado, se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$m^2 + o^2 = n^2 \Rightarrow o = \sqrt{n^2 - m^2} \Rightarrow o = \sqrt{30^2 - 15^2} \Rightarrow o = 15\sqrt{3}\text{ cm}$$

Luego, se puede emplear una razón trigonométrica con el fin de calcular el ángulo $\theta$. Por ejemplo:

$$\cos\theta = \frac{o}{n} \Rightarrow \cos\theta = \frac{15\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30°$$

Por último, se calcula la medida del ángulo $\varphi$:

$$\varphi = 180° - (30° + 90°) = 60°$$

Las **razones trigonométricas inversas** permiten hallar un ángulo del que se conoce su seno, su coseno o su tangente. La forma clásica de referirse a las de mayor uso es arco seno (arcsen, o $\text{sen}^{-1}$), arco coseno (arccos o $\cos^{-1}$) y arco tangente (arctan o $\tan^{-1}$).

Para un número $y$ en el intervalo $[-1, 1]$: arcsen $y = \alpha$ si y solo si sen$\alpha = y$.

Para un número $y$ en el intervalo $[-1, 1]$: arccos $y = \alpha$ si y solo si cos$\alpha = y$.

Para un número $y$ en $(-\infty, +\infty)$: arctan $y = \alpha$ si y solo si tan$\alpha = y$.

**Ejemplo 2**

arcsen $(0{,}5) = 30°$ ya que sen $30° = 0{,}5$.

El valor de arcsen $(0{,}5)$ se obtiene con la calculadora usando la tecla $\sin^{-1}$ (que suele activarse pulsando SHIFT sin 0.5). También arcsen $(0{,}5) = 150°$, puesto que sen$150° = 0{,}5$. Así pues, hay dos ángulos, en la primera rotación, cuyo seno es 0,5. Y dos ángulos más en los sucesivos giros. Por tanto, los ángulos $\alpha$ que cumplen que su seno es 0,5 son

$$\alpha = \begin{cases} 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \end{cases} \quad \text{o en radianes: } \alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Resolución de triángulos rectángulos

**Ejemplo 3**

$\arccos(-0{,}5) = 120^\circ$ ya que $\cos 120^\circ = -0{,}5$. El valor de $\arccos(-0{,}5)$ se obtiene con la calculadora con la tecla $\cos^{-1}$ (que suele activarse pulsando SHIFT $\cos(-0.5)$ ).

También $\arccos(-0{,}5) = 240^\circ$, pues igualmente, $\cos 240^\circ = -0{,}5$.

Por tanto, los ángulos $\alpha$ que cumplen que su coseno es 0,5 son:

$$\alpha = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{o en radianes: } \alpha = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

**Ejemplo 4**

$\arctan(1{,}5) = 56{,}31^\circ$ ya que $\tan 56{,}31^\circ = 1{,}5$. El valor de $\arctan(1{,}5)$ se obtiene con la calculadora usando la tecla $\tan^{-1}$ (que suele activarse pulsando SHIFT tan 1.5). Pero también $\arctan(1{,}5) = 236{,}31^\circ = 56{,}31^\circ + 180^\circ$, pues igualmente, $\tan 236{,}31^\circ = 1{,}5$.

En general, $\arctan 1{,}5 = \alpha$, si y solo si $\alpha = 56{,}31 + 180^\circ k$. Las soluciones correspondientes en radianes son $\alpha = 0{,}9828 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

**Ejemplo 5**

Para hallar la medida del ángulo formado entre la escalera y el edificio representados en la Figura 3.61, se utiliza la razón seno. Para hallar la altura del edificio, se puede utilizar la razón coseno o la razón tangente.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{40} \qquad \tan 8{,}63^\circ = \frac{6}{x}$$

$$\operatorname{sen}\theta \approx 0{,}15 \qquad x = \frac{6}{\tan 8{,}63^\circ}$$

$$\theta \approx 8{,}63^\circ \qquad x \approx 39{,}53 \text{ pies}$$

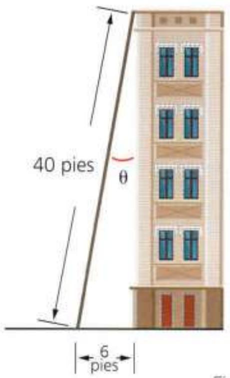


Figura 3.61

**Ejemplo 6**

En el $\triangle ABC$ de la Figura 3.62, $a = 29$ cm y $c = 35$ cm, por lo cual se puede utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa.

$$a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2} \Rightarrow b = \sqrt{29^2 + 35^2} \Rightarrow b = 45{,}45 \text{ cm}$$

La medida del ángulo $\alpha$ se puede encontrar utilizando la razón trigonométrica tangente.

$$\tan\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{29}{35} = 0{,}83 \Rightarrow \alpha = 39{,}69^\circ$$

Finalmente, se calcula: $\gamma = 180^\circ - (39{,}69^\circ + 90^\circ) = 50{,}31^\circ$.

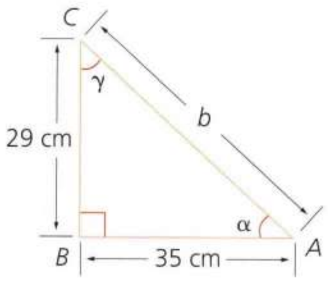


Figura 3.62

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a.

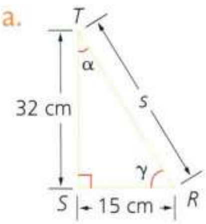



Figura 3.63

b.

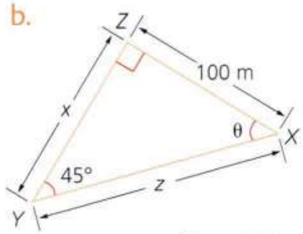



Figura 3.64

**2** Resuelve el triángulo $ABC$, rectángulo en $B$, si se sabe que

a. $m\measuredangle A = 58°$ y $a = 63{,}4$ cm.

b. $b = 8$ dm y $m\measuredangle C = 25°$.

c. $a = 2$ km y $c = 4$ km.

d. $a = 200$ m y $b = 354$ m.

**3** Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

a.

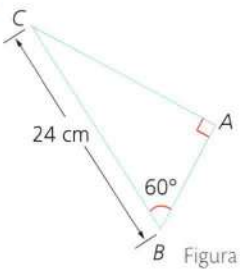



Figura 3.65

b.

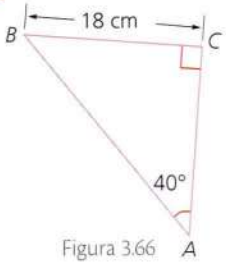



Figura 3.66

c.

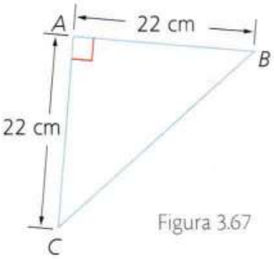



Figura 3.67

d.

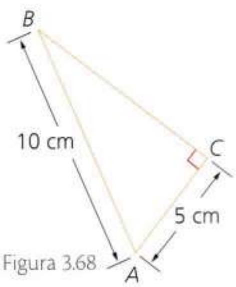



Figura 3.68

### Razonamiento

**4** Resuelve cada triángulo $ABC$ sabiendo que $\measuredangle C$ es un ángulo recto,

a. $\measuredangle A = 55°$ y $a = 36$ cm.

b. $c = 20$ cm y $b = 12$ cm.

c. $a = 9$ cm y $b = 7{,}5$ cm.

**5** Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

### Resolución de problemas

**6** En un triángulo isósceles, el ángulo determinado por los lados congruentes mide 80° y el lado opuesto a este ángulo mide 16 m. ¿Cuál es la medida de la altura sobre ese lado?

**7** Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 6,4 cm y 3,6 cm. Halla las longitudes de los lados.

**8** La diagonal mayor de un rombo mide 8 cm y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26°. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

**9** Halla las medidas de los ángulos internos del trapecio rectángulo de la Figura 3.69.

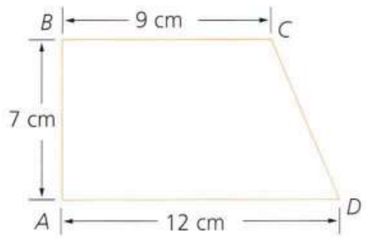



Figura 3.69

## Evaluación del aprendizaje

Un profesor pidió a sus estudiantes resolver el triángulo rectángulo $KNP$ que aparece en la Figura 3.70.

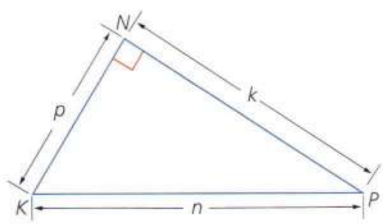



Figura 3.70

Estos fueron algunos de los datos encontrados por tres estudiantes:

$m\measuredangle P = 25°$, $m\measuredangle K = 85°$, $k = 4$ cm y $n = 4{,}4$ cm

$m\measuredangle P = 25°$, $m\measuredangle K = 65°$, $k = 4$ cm y $n = 3{,}4$ cm

$m\measuredangle P = 25°$, $m\measuredangle K = 65°$, $k = 4$ cm y $n = 4{,}4$ cm

¿Cuáles de las respuestas anteriores no pueden ser correctas? Justifica tu respuesta.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Ángulo de elevación y ángulo de depresión

**Saberes previos**

Supón que miras un avión en el cielo mientras se aproxima. Haz un dibujo de la situación y muestra cómo varía tu línea de visión hasta el momento en que el avión se encuentra por encima de tu cabeza.

**Analiza**

Desde un punto *A* de un barco en altamar, cierto observador ve el punto *B* en el extremo superior de un faro de 20 m de altura desde la altura de sus ojos. (Figura 3.71).

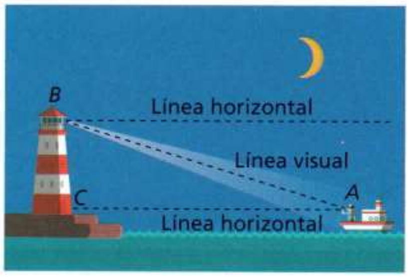



Figura 3.71

- Si el hombre se encuentra a 50 m de la base *C* del faro, ¿cuál es el ángulo que forma la recta *AB* con la horizontal? ¿Cuál es la distancia entre los puntos *A* y *B*?

**Conoce**

## 6.1 Ángulo de elevación

Para responder las preguntas se puede hacer una representación geométrica de la situación.

En este caso, se deben considerar dos líneas imaginarias: la **línea visual** que va del observador al extremo superior del faro y la **línea horizontal**. Según lo anterior, se obtiene un esquema como el que se observa en la Figura 3.72.

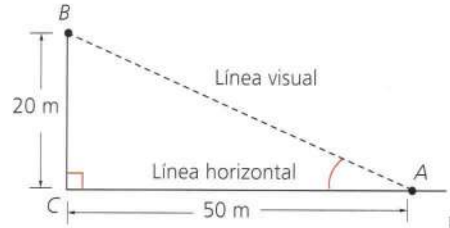



Figura 3.72

Dado que el triángulo *ACB* es rectángulo en *C*, *AC* = 50 m y *BC* = 20 m, se tiene que:

$$\tan \alpha = \frac{20}{50} = 0{,}4 \Rightarrow \alpha = 21{,}8^\circ$$

Este resultado significa que el ángulo que forma la línea visual con la horizontal es de 21,8°. Este ángulo es llamado **ángulo de elevación**.

La distancia *AB*, se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

$$AB^2 = (20)^2 + (50)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{400 + 2500} = 53{,}85 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia entre los puntos *A* y *B* es 53,85 m.

Se denomina **ángulo de elevación** al ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual entre un observador y un objeto situado por encima de la horizontal.

**Ejemplo 1**

Un saltamontes se encuentra a 20 m del pie de una palmera y observa la copa con un ángulo de elevación de 30° (Figura 3.73). Para calcular la altura de la palmera, se puede utilizar la siguiente relación:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 20 \cdot 0{,}5 = 10 \text{ m} \leftarrow \text{Altura de la palmera}$$

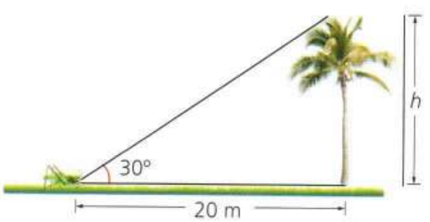



Figura 3.73



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

Un árbol proyecta una sombra de 760 cm de largo. Desde el punto donde termina la sombra, una persona de 170 cm de estatura ve la copa del árbol con un ángulo de elevación de 25,78°. La Figura 3.74 muestra la representación de esta situación.

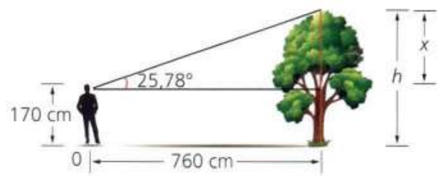


Figura 3.74

Para hallar la altura aproximada del árbol $h$, primero se halla la altura parcial del árbol $x$ y luego se adiciona la altura de la persona. Para hallar $x$ se utiliza la tangente del ángulo 25,78°.

$$\tan 25{,}78° = \frac{x}{760} \qquad \rightarrow \qquad x = \tan 25{,}78° \cdot 760 = 367{,}07$$

Sumando la altura de la persona, se tiene que $367{,}07 + 170 = 537{,}07$ cm.

Entonces, la altura del árbol es de aproximadamente 537,07 cm porque los ojos de una persona no están a la misma distancia de su altura.

**Ejemplo 3**

Un cuadro está colgado en una pared de forma que su extremo más bajo se encuentra a 2,5 m del suelo. Una persona de 175 cm de estatura ve el extremo inferior del cuadro con un ángulo de elevación de 5° y el extremo superior con un ángulo de elevación de 8° (Figura 3.75).

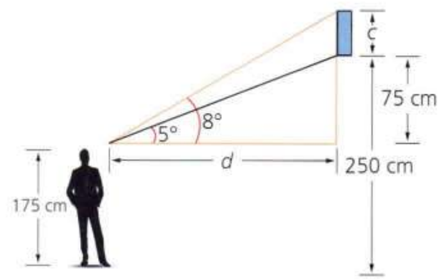


Figura 3.75

Para saber a qué altura, con respecto al piso, se encuentra el extremo superior del cuadro, se hacen las siguientes deducciones:

Se observa que $\tan 5° = \frac{75}{d}$ y $\tan 8° = \frac{c + 75}{d}$; por lo tanto, $d = \frac{75}{\tan 5°}$ y $d = \frac{c + 75}{\tan 8°}$.

Al igualar las dos expresiones y despejar $c$, se obtiene:

$$\frac{75}{\tan 5°} = \frac{c + 75}{\tan 8°}$$

$$c = \frac{75(\tan 8° - \tan 5°)}{\tan 5°}$$

$$c = 45{,}5 \text{ cm}$$

Para saber a qué altura se encuentra el extremo superior del cuadro, se adiciona el valor de $c$ con la longitud que separa su extremo más bajo del piso. Es decir, 250 cm + 45,5 cm.

Entonces, el extremo superior del cuadro se encuentra a 295,5 cm del suelo.

## 6.2 Ángulo de depresión

El **ángulo de depresión** es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual entre un observador y un objeto situado por debajo de la horizontal.

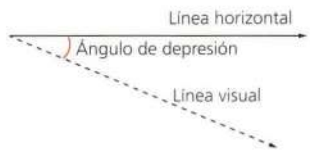


Figura 3.76

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Ángulo de elevación y ángulo de depresión

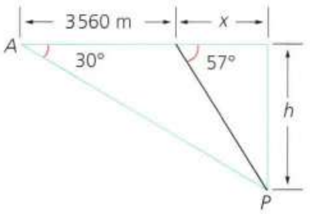



Figura 3.77

**Ejemplo 4**

Un piloto de un avión que vuela horizontalmente a una velocidad constante de 178 m/s observa desde un punto *A*, con un ángulo de depresión de 30°, un punto *P* situado en un terreno. Veinte segundos más tarde, el ángulo de depresión con el que el piloto observa el mismo punto *P* es de 57° (Figura 3.77).

Para conocer la altura a la que se encuentra el avión, se debe calcular en primer lugar la distancia recorrida por el avión en 20 s.

Como el avión recorre 178 m cada segundo, entonces en 20 s recorre:

$$178 \cdot 20 = 3\,560 \text{ m}$$

A partir de la información se pueden plantear estas ecuaciones:

$$\tan 57° = \frac{h}{x} \qquad \tan 30° = \frac{h}{3\,560 + x}$$

De donde,

$$h = x\tan 57° \qquad h = (3\,560 + x)\tan 30°$$

Por tanto,

$$x\tan 57° = (3\,560 + x)\tan 30°$$
$$x(\tan 57° - \tan 30°) = 3\,560 \cdot \tan 30°$$
$$x = \frac{3\,560 \cdot \tan 30°}{\tan 57° - \tan 30°}$$
$$x = 2\,135{,}41 \text{ m}$$

Como $\tan 57° = \frac{h}{x}$, entonces:

$$h = x\tan 57° = 2\,135{,}41(1{,}54) = 3\,288{,}53$$

La altura del avión es de 3 288,53 m.

## Actividades de aprendizaje

### Resolución de problemas

1. Lee cada situación y responde las preguntas.
   a. Desde un árbol, Antonio observa un caballo que se encuentra a 20 m del árbol. Luego, el caballo se mueve sobre la horizontal ubicándose a 15 m del árbol. ¿En cuál de los dos casos el ángulo de depresión con el que ve Antonio al caballo es mayor? Justifica tu respuesta.
   b. Desde un faro de 32,4 m de altura se observa un barco con un ángulo de depresión de 41°. Desde otro faro, de 44,7 m de altura, se observa el mismo barco con un ángulo de depresión de 36°.
      - Si los dos faros y el barco están alineados, y el barco está en medio, ¿cuál es la distancia entre los faros?
      - Formula una pregunta que se pueda responder con los datos iniciales, si los dos faros y el barco no están alineados.

2. Desde una torre de vigilancia en una playa, un salvavidas observa una boya en el mar con un ángulo de depresión de 3°. Si la observación se hace desde una altura de 4,5 m, ¿a qué distancia está la boya de la torre?

3. Observa la Figura 3.78 y responde.

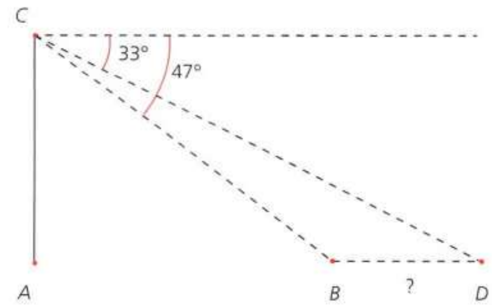



Figura 3.78

¿Cuál es la distancia que separa los puntos *B* y *D*?



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

4 Observa la Figura 3.79.

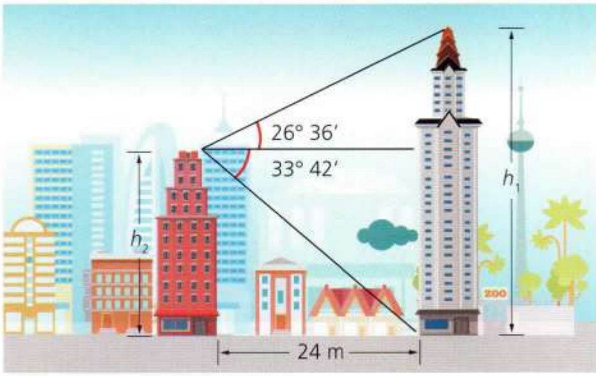



Figura 3.79

¿Cuál es la altura de cada edificio?

5 Miranda ve la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 65°. La situación se representó en la Figura 3.80.

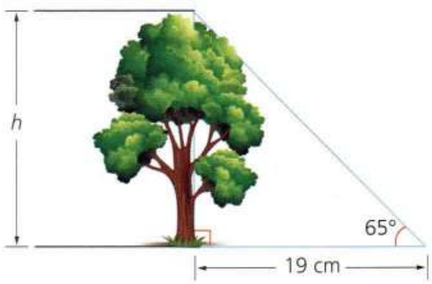



Figura 3.80

¿Cuál es la altura $h$ del árbol?

6 En la Figura 3.81 se representó la ubicación de un observador que se encuentra en un punto $O$, a 24 m del pie de un edificio.

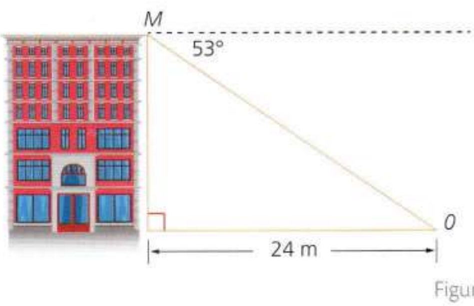



Figura 3.81

Si otra persona lo ve desde el punto más alto del edificio ($M$) con un ángulo de depresión de 53°, ¿cuál es la altura del edificio?

## Evaluación del aprendizaje

i Observa la Figura 3.82.

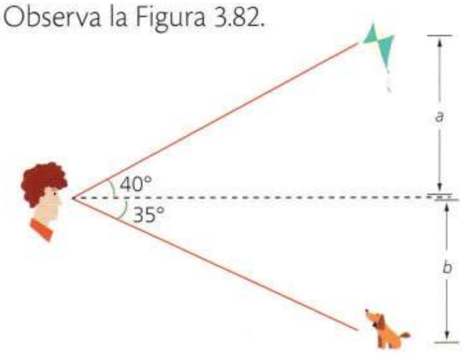



Figura 3.82

Si la distancia de la cometa a la horizontal es 3 m mayor que la distancia del perro a la horizontal, ¿cuántos metros hay entre la cometa y el perro?

ii Desde un globo $H$, ubicado a 42 m sobre el nivel del mar, se observa una gaviota $G$, que está a 20 m del globo, con un ángulo de elevación de 7°. En la vertical de la gaviota hay un pez $P$ a 8 m bajo el nivel del mar (Figura 3.83 ). ¿Cuál es la distancia entre la gaviota y el pez?

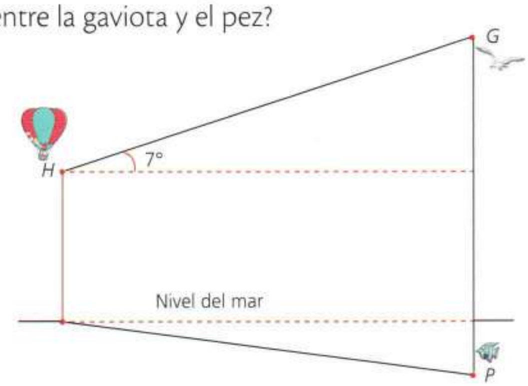



Figura 3.83

## Educación ambiental

Una superficie que forma un ángulo de 30° con un rayo del Sol recibe menos radiación solar que una que forma un ángulo de 90°.

- Representa la situación e investiga en qué partes del planeta los rayos del Sol forman estos ángulos con la superficie terrestre.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Circunferencia unitaria

## Saberes previos

Toma una cuerda y traza una circunferencia con ella. ¿Cuánto mide el radio? ¿Cuánto mide el diámetro? ¿Qué ángulo se determina con un cuarto de giro?

## Analiza

En una competencia de tiro, el competidor *A* logra impactar el tablero en el punto (4, 3) y el competidor *B* en el punto (−5, 2).

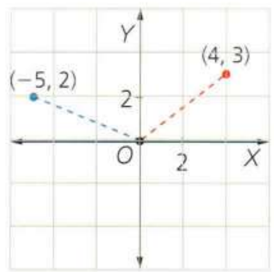



Figura 3.84

- Si gana quien esté a menor distancia del centro del tablero, ¿cuál competidor ganó?

## Conoce

Para determinar quién ganó la competencia se pueden interpretar las distancias entre los puntos y el centro como radios de dos circunferencias.

Al trazar las circunferencias y comparar los radios (Figura 3.85) se observa que $r_1 < r_2$.

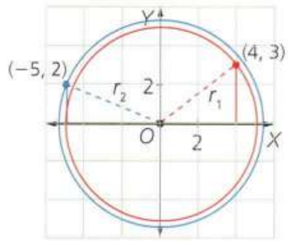



Figura 3.85

De acuerdo con lo anterior, se concluye que el jugador *A* ganó la competencia.

La interpretación de la distancia de un punto *P* (*x*, *y*) al centro de un plano cartesiano permite relacionar el radio *r* de una circunferencia con la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los catetos *x* y *y* de la siguiente manera:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si el radio de la circunferencia mide una unidad como en la Figura 3.83, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

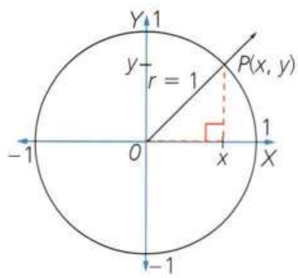



Figura 3.86

La **circunferencia unitaria** es aquella cuyo radio mide una unidad y cuyo centro coincide con el origen del plano cartesiano. También es denominada **circunferencia goniométrica**. Las coordenadas de cualquier punto *P*(*x*, *y*) de la circunferencia unitaria satisfacen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

**Ejemplo 1**

Al utilizar la ecuación de la circunferencia, es posible verificar si el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

El punto pertenece a la circunferencia unitaria porque cumple la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 7.1 Ángulos en posición normal

El ángulo $\alpha$ es un **ángulo en posición normal** si su vértice coincide con el origen del plano cartesiano y su lado inicial está sobre el semieje positivo de las abscisas.

**Ejemplo 2**

Las figuras 3.87 y 3.88 muestran ángulos en posición normal. El primero es positivo y el segundo, negativo.

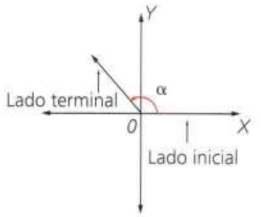



Figura 3.87

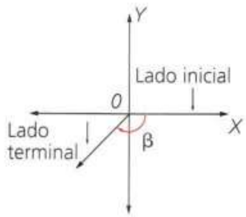



Figura 3.88

Según la medida de un ángulo en posición normal, este se considera ubicado en alguno de los cuatro cuadrantes en los que se divide el plano cartesiano (Figura 3.89).

| Primer cuadrante | Segundo cuadrante | Tercer cuadrante | Cuarto cuadrante |
|---|---|---|---|
| $0° < \alpha < 90°$<br>$0 \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ | $90° < \alpha < 180°$<br>$\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \pi \text{ rad}$ | $180° < \alpha < 270°$<br>$\pi \text{ rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ | $270° < \alpha < 360°$<br>$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < 2\pi \text{ rad}$ |

Tabla 3.3

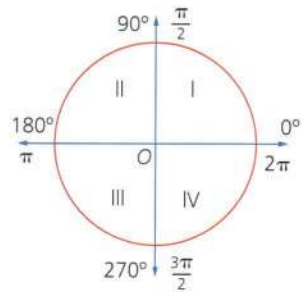



Figura 3.89

El lado terminal de un ángulo $\alpha$ en posición normal, interseca la circunferencia unitaria en un único punto $P(x, y)$.

**Ejemplo 3**

En la Figura 3.90 se observa que el lado terminal del ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad, ubicado en posición normal, está contenido en la recta $y = x$; por tanto, el punto $P$ está a la vez en dicha recta y en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$.

Esto significa que las coordenadas de $P$ satisfacen del sistema $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

cuya solución está dada por: $x^2 + y^2 = 1$.

Como $y = x$, se tiene que:

$$x^2 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego, el único punto determinado por el lado terminal de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad en la circunferencia unitaria, es $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

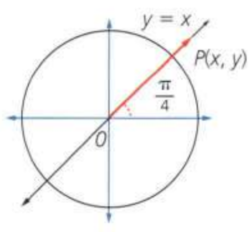



Figura 3.90

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Circunferencia unitaria

## 7.2 Ángulos coterminales

Dos ángulos $\alpha$ y $\beta$ en posición normal son **ángulos coterminales** si tienen el mismo lado terminal.

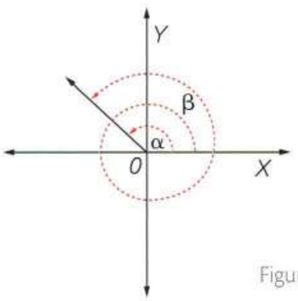


Figura 3.91

**Ejemplo 4**

Los ángulos $\alpha = 120°$ y $\beta = 480°$, representados en la Figura 3.91, son coterminales.

Los ángulos coterminales intersecan la circunferencia unitaria en el mismo punto.

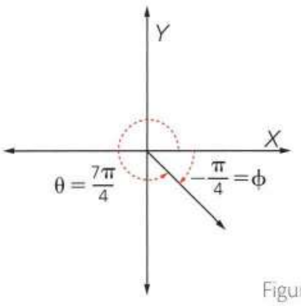


Figura 3.92

**Ejemplo 5**

Los ángulos $\theta = \frac{7\pi}{4}$ rad y $\phi = -\frac{\pi}{4}$ rad de la Figura 3.92 son coterminales y ambos cortan la circunferencia unitaria en el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

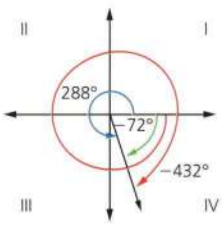


Figura 3.93

**Ejemplo 6**

Al representar el ángulo de $-72°$ (Figura 3.93), este queda ubicado en el cuarto cuadrante.

Si se quiere encontrar un ángulo positivo coterminal con $-72°$, se calcula la diferencia:

$$360° - |-72°| = 288°$$

Para hallar un ángulo negativo coterminal con $-72°$, basta con sumar un ángulo de un giro completo negativo. Es decir:

$$-360° + (-72°) = -432°$$

### Actividades de aprendizaje

#### Ejercitación

1. Representa los siguientes puntos en un plano cartesiano. Luego, define un triángulo rectángulo y halla las razones trigonométricas.

   a. $(5, 6)$ b. $(-2, 4)$
   c. $(-3, -3)$ d. $(5, -3)$
   e. $(5, 5)$ f. $(-2, -2)$

#### Comunicación

2. Determina si cada punto está en la circunferencia unitaria o no.

   a. $(0, 1)$ b. $(3, 4)$
   c. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d. $(-1, 0)$

3. Encuentra las coordenadas del punto $P$ en el que $\alpha$ interseca la circunferencia unitaria.

   a. $\alpha = 0$ rad b. $\alpha = \pi$ rad
   c. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad d. $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad

4. Determina si los siguientes pares de ángulos son coterminales o no.

   a. $1000°$ y $280°$ b. $135°$ y $-225°$
   c. $\frac{2\pi}{5}$ rad y $-\frac{2\pi}{5}$ rad d. $\frac{5\pi}{4}$ rad y $-\frac{3\pi}{4}$ rad
   e. $30°$ y $410°$ f. $60°$ y $-420°$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### Razonamiento

**5** Halla la coordenada desconocida en cada caso y completa la Tabla 3.4.

| Punto en la circunferencia unitaria | Cuadrante en el que está ubicado | Punto |
|---|---|---|
| $\left(x, -\frac{4}{5}\right)$ | IV | |
| $\left(x, \frac{1}{2}\right)$ | II | |
| $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, y\right)$ | III | |

Tabla 3.4

### Ejercitación

**6** Halla el ángulo en el intervalo [0°, 360°] que es coterminal con el ángulo dado en cada caso.

a. 450° b. 720° c. 1 300°
d. 1 800° e. 540° f. 900°
g. 1 235° h. 930° i. 1 400°

### Comunicación

**7** Dibuja los siguientes ángulos en posición normal.

a. 200° b. −75° c. 350°
d. −250° e. $-\frac{5\pi}{9}$ rad f. $\frac{9\pi}{10}$ rad
g. $-\frac{14\pi}{6}$ rad h. $\frac{17\pi}{18}$ rad i. $\frac{3\pi}{2}$ rad

**8** Determina en qué cuadrante está ubicado cada ángulo en posición normal.

a. 210° b. −280° c. 175°
d. −310° e. $-\frac{5\pi}{3}$ rad f. $\frac{7\pi}{12}$ rad
g. $-\frac{3\pi}{10}$ rad h. $\frac{4\pi}{9}$ rad i. $\frac{6\pi}{5}$ rad

**9** Encuentra dos ángulos positivos y dos ángulos negativos coterminales con el ángulo $\alpha$.

a. $\alpha = 50°$ b. $\alpha = 125°$
c. $\alpha = -260°$ d. $\alpha = -315°$
e. $\alpha = \frac{7\pi}{3}$ rad f. $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ rad
g. $\alpha = -\frac{8\pi}{5}$ rad h. $\alpha = -\frac{14\pi}{9}$ rad

### Resolución de problemas

**10** $\overleftrightarrow{MN}$ interseca la circunferencia unitaria en los puntos $M$ y $N$ (Figura 3.94).

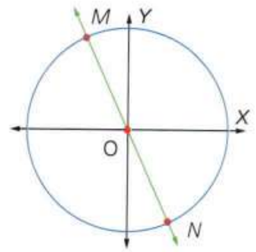



Figura 3.94

Sean $\alpha$ y $\beta$ los ángulos en posición normal en el intervalo [0°, 360°] que intersecan la circunferencia en los puntos $M$ y $N$.

a. ¿Son $\alpha$ y $\beta$ coterminales? Justifica tu respuesta.

b. ¿Qué relación existe entre las medidas de los ángulos $\alpha$ y $\beta$?

## Evaluación del aprendizaje

En la Figura 3.95 aparecen dos circunferencias de radio 1, una de ellas con centro en el origen $O$ del plano cartesiano.

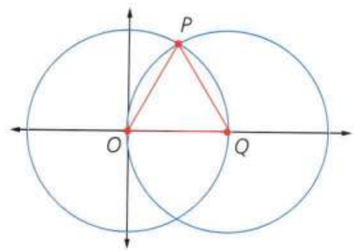



Figura 3.95

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos $O$ y $Q$?

b. ¿Cuáles son las medidas de los lados del $\triangle OPQ$?

c. Según la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es el $\triangle OPQ$?

d. Si las coordenadas del punto $P$ son $(a, b)$, ¿cuál es el valor de $a$?

e. Halla el valor de $b$.

f. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle POQ$?

g. Si $\measuredangle QOT$ y $\measuredangle POQ$ son ángulos coterminales de medidas diferentes, y $\measuredangle QOT$ es un ángulo positivo, ¿cuál es la menor medida que puede tener $\measuredangle QOT$?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 8 Definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria

## Saberes previos

Describe las características de la circunferencia unitaria. ¿Cuál es su centro? ¿Cuál es su radio?

## Analiza

La Figura 3.96 muestra un ángulo $\alpha$ en una circunferencia unitaria.

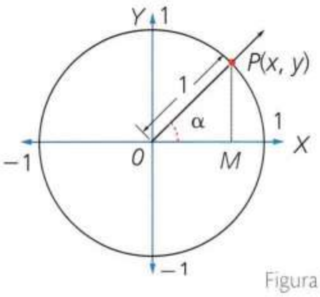



Figura 3.96

- Determina las razones trigonométricas para dicho ángulo.

## Conoce

En la Figura 3.96 se observa que el ángulo $\alpha$ está en posición normal en el primer cuadrante y que su lado terminal corta la circunferencia unitaria en el punto $P(x, y)$. La proyección de $P$ sobre el eje de las abscisas forma el triángulo rectángulo $OMP$. Como la hipotenusa $\overline{OP}$ del $\triangle OMP$ mide 1, se determinan las **razones trigonométricas** del triángulo rectángulo.

Sea $\alpha$ un ángulo en posición normal cuyo lado terminal determina el punto $P(x, y)$ de la circunferencia unitaria, las razones trigonométricas para este ángulo se definen de la siguiente manera:

$\operatorname{sen}\alpha = y$ $\quad\cos\alpha = x$ $\quad\tan\alpha = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$

$\cot\alpha = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$ $\quad\sec\alpha = \frac{1}{x}$, con $x \neq 0$ $\quad\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y}$, con $y \neq 0$

### Ejemplo 1

Como se observa en la Figura 3.97, el lado terminal del ángulo $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ rad determina el punto $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de la circunferencia unitaria. Por lo tanto:

$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad\tan\frac{4\pi}{3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\cot\frac{4\pi}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\sec\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ $\quad\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

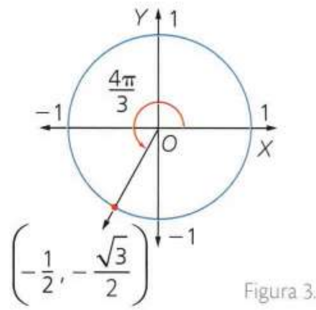



Figura 3.97

Sea $\alpha$ un ángulo en posición normal y $P(x, y)$ un punto de su lado terminal (Figura 3.98), si $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces las razones trigonométricas para el ángulo $\alpha$ de un radio cualquiera se definen como:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$ $\quad\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\quad\tan\alpha = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$

$\cot\alpha = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$ $\quad\sec\alpha = \frac{r}{x}$, con $x \neq 0$ $\quad\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$, con $y \neq 0$

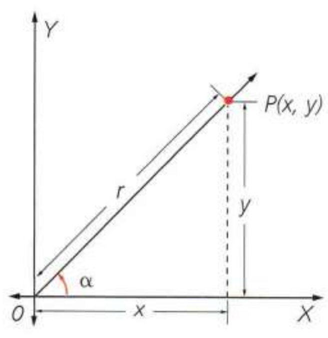



Figura 3.98

Los **signos de las razones trigonométricas** de un ángulo $\theta$ en posición normal dependen de los signos de las coordenadas del punto $P(x, y)$ en su lado terminal, como se observa en la Tabla 3.5.

| Cuadrante | Abscisa | Ordenada | sen$\theta$ | cos$\theta$ | tan$\theta$ | cot$\theta$ | sec$\theta$ | cosec$\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | + | + | + | + | + | + | + | + |
| II | − | + | + | − | − | − | − | + |
| III | − | − | − | − | + | + | − | − |
| IV | + | − | − | + | − | − | + | − |

Tabla 3.5

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

En la Figura 3.99 se observa un ángulo negativo $\theta$ en posición normal cuyo lado terminal pasa por el punto $P(-3, 4)$.

Como en este caso, $x = -3$ y $y = 4$, entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

De modo que:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$ $\quad \sec\theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{3}$ $\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$

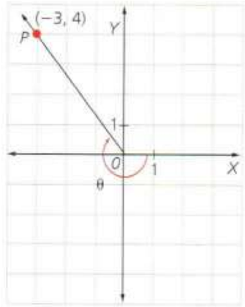


Figura 3.99

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1. Calcula el valor de las razones trigonométricas para los ángulos que se presentan a continuación (recuerda que la división por 0 no está definida).

a. 0 rad b. $\frac{\pi}{2}$ rad c. $\pi$ rad d. $\frac{3\pi}{2}$ rad

### Razonamiento

2. Indica el signo de todas las razones trigonométricas de los siguientes ángulos expresados en grados.

a. 120° b. −70° c. 256° d. 800°
e. 315° f. 1 200° g. 55° h. −460°

3. Indica el signo de todas las razones trigonométricas de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a. $\frac{3\pi}{4}$ b. $\frac{11\pi}{3}$ c. $\frac{4\pi}{3}$ d. $-\frac{7\pi}{6}$ e. $-\frac{9\pi}{4}$

### Comunicación

4. Determina, en cada caso, el valor de las razones trigonométricas para un ángulo $\theta$ cuyo lado terminal pasa por el punto $P$ dado.

a. $P(5, -12)$ b. $P(-1, 1)$ c. $P(-3, -6)$

5. Determina las razones trigonométricas del ángulo $\theta$ que, en posición normal, corta la circunferencia unitaria en el punto dado.

a. $(-1, 0)$ b. $(0, -1)$

c. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ f. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$

### Resolución de problemas

6. Si en la Figura 3.100 $m\measuredangle DBC = 30°$ y $m\measuredangle CBA = 90°$, halla sen $\beta$, siendo $\beta = \measuredangle DBA$.

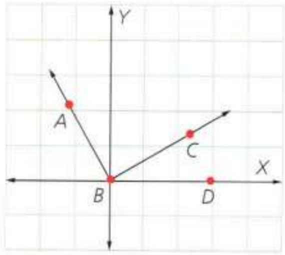


Figura 3.100

## Evaluación del aprendizaje

i. Encuentra el valor de cada uno de las seis razones trigonométricas, si el punto $P(-2, -3)$ pertenece al lado terminal del ángulo $\alpha$ como se muestra en la Figura 3.101.

Usa la razón inversa arcoseno para determinar la medida del ángulo $\alpha$.

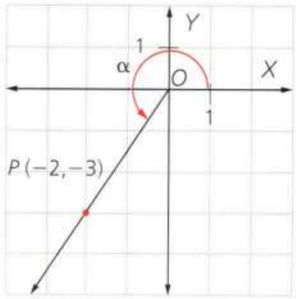


Figura 3.101

ii. Identifica el cuadrante en el que se halla cada ángulo dado el signo de dos de sus razones trigonométricas:

a. sen$\alpha > 0$ y cos$\alpha < 0$. b. tan$\beta > 0$ y csc$\beta < 0$.
c. cos$\delta < 0$ y cot$\delta < 0$. d. sec$\phi > 0$ y tan$\phi < 0$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 9 Cálculo de las razones trigonométricas usando ángulos de referencia

## Saberes previos

Ubica los siguientes ángulos en posición normal. Luego, indica en qué cuadrante queda el lado terminal de cada uno.

- $-48°$
- $153°$
- $208°$
- $-132°$

## Analiza

Observa la Figura 3.102.

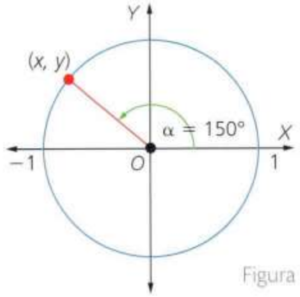



Figura 3.102

- Calcula el valor de las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo $\alpha$.

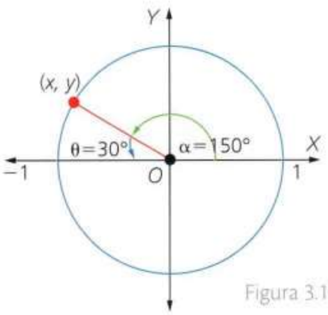



Figura 3.103

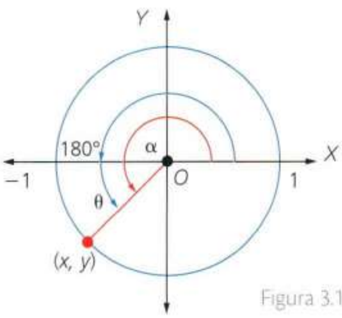



Figura 3.104

## Conoce

### 9.1 Ángulos en el segundo cuadrante

En la Figura 3.102 se observa que el ángulo $\alpha$ está ubicado en el segundo cuadrante. Luego, existe un ángulo $\theta$ tal que $\theta + \alpha = 180°$. Por lo tanto, $\theta = 180° - \alpha$.

El ángulo $\theta$ se considera un **ángulo de referencia** (Figura 3.103). En este caso:

$$\theta = 180° - 150° = 30°$$

De esta manera, para calcular las razones trigonométricas de un ángulo $\alpha$ en el segundo cuadrante, se utiliza el ángulo de referencia $\theta = 180° - \alpha$, teniendo en cuenta el signo de las razones en cada cuadrante.

Por lo anterior, y considerando que en el segundo cuadrante la razón seno es positiva y la razón coseno es negativa, se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 150° &= \operatorname{sen}(180° - 150) \\ &= \operatorname{sen} 30° \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos 150° &= -\cos(180° - 150) \\ &= -\cos 30° \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si $\alpha$ es un ángulo en posición normal ubicado en el segundo cuadrante, entonces su ángulo de referencia es $180° - \alpha$ y se cumple que:

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$ $\quad \cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ $\quad \tan\alpha = -\tan(180° - \alpha)$

$\cot\alpha = -\cot(180° - \alpha)$ $\quad \sec\alpha = -\sec(180° - \alpha)$ $\quad \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}(180° - \alpha)$

### 9.2 Ángulos en el tercer cuadrante

Para un ángulo $\alpha$ en el tercer cuadrante existe un ángulo $\theta$ tal que $180° + \theta = \alpha$ (Figura 3.104). Es decir, $\theta = \alpha - 180°$.

Si $\alpha$ es un ángulo en posición normal ubicado en el tercer cuadrante, entonces su ángulo de referencia es $\alpha - 180°$ y se cumple que:

$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - 180°)$ $\quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$ $\quad \tan\alpha = \tan(\alpha - 180°)$

$\cot\alpha = \cot(\alpha - 180°)$ $\quad \sec\alpha = -\sec(\alpha - 180°)$ $\quad \operatorname{cosec}\alpha = -\operatorname{cosec}(\alpha - 180°)$

**Ejemplo 1**

El procedimiento para calcular las razones trigonométricas tangente y secante de $\alpha$ si $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ es el siguiente.

$$\begin{aligned} \tan\frac{7\pi}{6} &= \tan\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) \\ &= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sec\frac{7\pi}{6} &= -\sec\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) \\ &= \sec\frac{7\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 9.3 Ángulos en el cuarto cuadrante

Para un ángulo $\alpha$ en el cuarto cuadrante existe un ángulo $\theta$ tal que $\theta + \alpha = 360°$ (Figura 3.105). Es decir, $\theta = 360° - \alpha$.

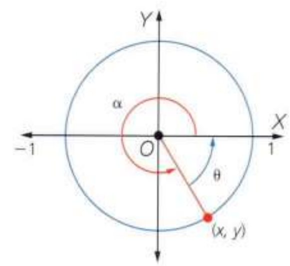



Figura 3.105

Si $\alpha$ es un ángulo en posición normal ubicado en el cuarto cuadrante, su ángulo de referencia es $360° - \alpha$ y se cumple que:

$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360° - \alpha)$ $\quad\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$ $\quad\tan\alpha = -\tan(360° - \alpha)$

$\cot\alpha = -\cot(360° - \alpha)$ $\quad\sec\alpha = \sec(360° - \alpha)$ $\quad\operatorname{cosec}\alpha = -\operatorname{cosec}(360° - \alpha)$

**Ejemplo 2**

Calcula las razones trigonométricas cotangente y cosecante de $\alpha$, si $\alpha = 315°$.

$$\cot 315° = -\cot(360° - 315°) = -\cot 45° = -1$$

$$\operatorname{cosec} 315° = -\operatorname{cosec}(360° - 315°) = -\operatorname{cosec} 45° = -\sqrt{2}$$

### Actividades de aprendizaje

#### Ejercitación

1. Calcula el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas usando ángulos de referencia.

a. sen 150° b. cos 225°

c. tan 330° d. cosec 135°

e. sec 240° f. cot 300°

g. sen 240° h. cos 135°

i. cosec 330° j. tan 300°

k. sen $\frac{3\pi}{4}$ l. cosec $\frac{11\pi}{6}$

#### Razonamiento

2. Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F). Justifica tus respuestas.

a. Si $\alpha$ es un ángulo del III cuadrante y $\beta$ es su ángulo de referencia, entonces sen $\alpha$ y sen $\beta$ tienen signos opuestos.

b. El coseno de un ángulo del IV cuadrante y el coseno de su ángulo de referencia tienen diferentes signos.

c. Para cualquier ángulo del II, III y IV cuadrante se cumple que su tangente es igual a la tangente de su ángulo de referencia.

#### Resolución de problemas

3. En la Figura 3.106 los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices de un rectángulo en el plano cartesiano cuyas diagonales miden dos unidades y $\beta = 30°$.

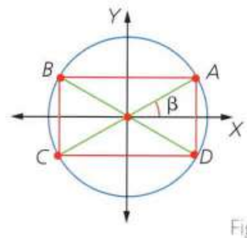



Figura 3.106

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del rectángulo?

b. ¿Cuánto mide cada lado del rectángulo?

### Evaluación del aprendizaje

Responde las siguientes preguntas. Justifica tus respuestas.

a. Si $\tan\theta = -\tan\gamma$ y $\gamma$ es el ángulo de referencia de $\theta$, ¿en qué cuadrantes puede estar el lado terminal de $\theta$?

b. Si $\cos\alpha = \cos\beta$ y $\beta$ es el ángulo de referencia de $\alpha$, ¿en qué cuadrante o cuadrantes puede estar el lado terminal de $\alpha$?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Razones trigonométricas para ángulos negativos, complementarios y coterminales

**Saberes previos**

Traza un ángulo en posición normal de 30º en sentido horario. ¿En qué cuadrante quedó el ángulo? ¿Cuáles son los signos de las razones trigonométricas que con él se pueden establecer cuando se interseca con la circunferencia unitaria?

**Analiza**

Compara los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y −30°.

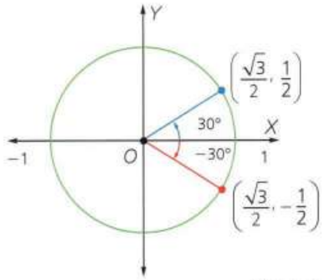



Figura 3.107

- ¿Qué relación tienen? Ten en cuenta la información de la Figura 3.107.

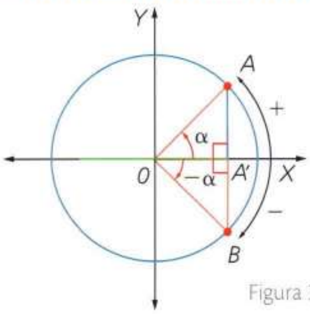



Figura 3.108

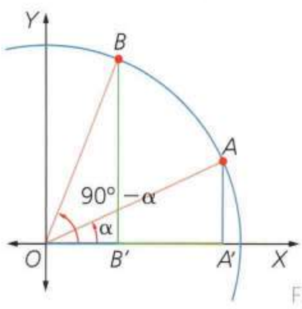



Figura 3.109

**Conoce**

## 10.1 Razones trigonométricas para ángulos negativos

Los ángulos de 30° y −30° en posición normal se intersecan con la circunferencia unitaria en los puntos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, respectivamente. A continuación se presenta la relación entre sus razones trigonométricas.

Como $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}(-30°) = -\frac{1}{2}$, entonces $\operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen} 30°$.

Como $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $\cos(-30°) = \cos 30°$

Como $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\tan(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces $\tan(-30°) = -\tan 30°$

De manera similar, se tiene que:

$\cot(-30°) = -\cot 30°$ $\quad \sec(-30°) = \sec 30°$ $\quad \operatorname{cosec}(-30°) = -\operatorname{cosec} 30°$

En la Figura 3.108 se observa que los puntos $A$ y $B$ son simétricos con respecto al eje $X$, de modo que $\triangle OA'A$ y $\triangle OA'B$ son congruentes. Por consiguiente:

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ | $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ | $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ | $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$ | $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$ |

## 10.2 Razones trigonométricas para ángulos complementarios

Los ángulos $\alpha$ y $90° - \alpha$ de la Figura 3.109 son complementarios.

Los triángulos $\triangle OA'A$ y $\triangle BB'O$ son congruentes, por lo cual se puede afirmar que:

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)$ | $\cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha)$ | $\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$ |
| $\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$ | $\sec\alpha = \operatorname{cosec}(90° - \alpha)$ | $\operatorname{cosec}\alpha = \sec(90° - \alpha)$ |

**Ejemplo 1**

Como los ángulos de 60º y 30º son complementarios, se cumple que:

| | |
|---|---|
| $\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos 60° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ |
| $\tan 60° = \cot 30° = \sqrt{3}$ | $\cot 60° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\sec 60° = \operatorname{cosec} 30° = 2$ | $\operatorname{cosec} 60° = \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ |

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 10.3 Razones trigonométricas para ángulos coterminales

Como dos ángulos $\alpha$ y $\beta$ en posición normal son coterminales si tienen el mismo lado terminal, entonces cualquier punto $P(x, y)$ del lado terminal de $\alpha$, está a la vez en el lado terminal de $\beta$ (Figura 3.110). En consecuencia, el valor de las razones trigonométricas de los dos ángulos coinciden.

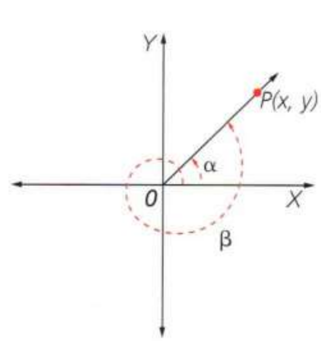


Figura 3.110

Si los ángulos $\alpha$ y $\beta$ en posición normal son coterminales, entonces:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \qquad \cos\alpha = \cos\beta \qquad \tan\alpha = \tan\beta$$

$$\cot\alpha = \cot\beta \qquad \sec\alpha = \sec\beta \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}\beta$$

**Ejemplo 2**

Observa cómo se calculan los valores de sen $1\,920°$ y $\tan 15\pi$.

$$\operatorname{sen} 1\,920° = \operatorname{sen}(5 \cdot 360° + 120°) = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 120°)$$

$$= \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 15\pi = \tan(7 \cdot 2\pi + \pi) = \tan\pi = 0$$

**Ejemplo 3**

Para calcular cot 225º, tan 300º y cos 150º, se pueden reducir al primer cuadrante como sigue.

- $\cot 225° = \cot(225° - 180°) = \cot 45° = 1$
- $\tan 300° = -\tan(360° - 300°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Ejemplo 4**

Las razones trigonométricas de $\alpha = -\frac{31\pi}{3}$ se hallan así:

Como $\alpha = -\frac{31\pi}{3} = -\left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$, se deduce que $-\frac{31\pi}{3}$ es coterminal con $-\frac{\pi}{3}$ (Figura 3.111).

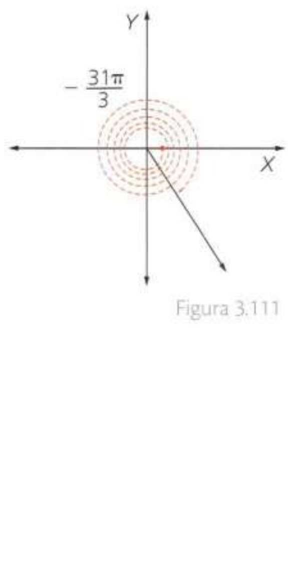


Figura 3.111

Aplicando la definición de las razones trigonométricas para un ángulo negativo, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \qquad \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Razones trigonométricas para ángulos negativos, complementarios y coterminales

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Calcula cada razón trigonométrica considerando la razón correspondiente del ángulo opuesto.

a. $\cos(-30°)$  b. $\operatorname{cosec}(-45°)$
c. $\operatorname{sen}(-45°)$  d. $\tan(-30°)$
e. $\sec(-60°)$  f. $\cot(-30°)$
g. $\operatorname{cosec}(-30°)$  h. $\operatorname{sen}(-30°)$

**2** Halla el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

a. $\operatorname{sen} 1215°$  b. $\cos(-600°)$
c. $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  d. $\cot 1830°$
e. $\tan(-15\pi)$  f. $\sec\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$

### Razonamiento

**3** Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Por qué en los cuadrantes I y II la razón seno es positiva y en los cuadrantes III y IV es negativa?

b. ¿Por qué en los cuadrantes I y IV la razón coseno es positiva y en los cuadrantes II y III es negativa?

c. ¿Cómo se puede recordar el signo de las razones seno y coseno en cada cuadrante?

d. ¿Cómo se puede determinar el signo de las demás razones trigonométricas a partir del signo de las razones seno y coseno?

**4** Responde y soluciona.

a. Si $\alpha$ es un ángulo del primer cuadrante, ¿en qué cuadrante está $-\alpha$?

b. Completa la Tabla 3.6 para responder la pregunta anterior, cuando $\alpha$ es un ángulo de cada uno de los cuatro cuadrantes.

| Ángulo | Cuadrante al que pertenece | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | I | II | III | IV |
| $-\alpha$ | | | | |

Tabla 3.6

**5** Analiza y responde.

¿Cómo se puede determinar la relación que existe entre las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha$ y $-\alpha$ a partir de las relaciones encontradas en la actividad 4 b y los resultados de la Tabla 3.6?

**6** Lee la siguiente información y responde las preguntas que se formulan a continuación.

$\beta$ es un ángulo de 1575° en posición normal.

a. ¿Cuántas vueltas completas da el lado terminal del ángulo alrededor del origen del plano cartesiano hasta ubicarse en su posición final?

b. Si $\theta$ es el ángulo en el intervalo [0°, 360°] que es coterminal con $\beta$, ¿cómo se puede hallar $\theta$?

c. ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de $\beta$ y $\theta$?

d. ¿Cuál es el ángulo de referencia de $\theta$?

e. ¿Cómo se pueden utilizar las razones trigonométricas del ángulo de referencia de $\theta$ para hallar las razones trigonométricas de $\beta$?

f. Si $\alpha = -\beta$, ¿cómo se pueden hallar las razones trigonométricas de $\alpha$?

### Comunicación

**7** Expresa cada una de las razones trigonométricas en términos de las razones seno o coseno del mismo ángulo.

a. $\sec 458°$  b. $\tan(-250°)$
c. $\operatorname{cosec} 1200°$  d. $\cot(-700°)$

### Razonamiento

**8** Utiliza las conclusiones de la actividad 7 para calcular cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a. $\tan(-30°)$  b. $\sec 780°$
c. $\operatorname{cosec}(-405°)$  d. $\cot 1215°$
e. $\sec 1860°$  f. $\tan(-765°)$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

9 Indica si cada igualdad es verdadera (V) o falsa (F). Justifica en cada caso.

a. $\cos 560° = -\cos 20°$

b. $\tan 1\,130° = -\tan 50°$

c. $\sec 1\,520° = \sec 80°$

d. $\cot 750° = \cot 30°$

e. $\text{cosec}\, 1\,105° = -\text{cosec}\, 25°$

## Comunicación

10 Sigue las instrucciones.

i. Dibuja cuatro ángulos en posición normal, cada uno de ellos en uno de los cuadrantes del plano cartesiano.

ii. Utiliza la gráfica de cada uno de los ángulos dibujados en el literal anterior para explicar por qué $\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$.

11 Lee la información y responde las preguntas. Justifica tus respuestas.

En la Figura 3.112, $\alpha$ y $\beta$ son ángulos positivos en posición normal tales que $\beta + 90° = \alpha$.

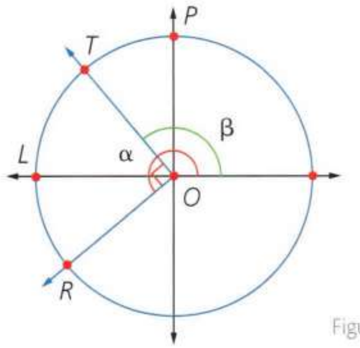



Figura 3.112

a. Halla el ángulo de referencia de $\alpha$.

b. Halla el ángulo de referencia de $\beta$.

c. ¿Qué condición debe cumplirse para que los ángulos de referencia de $\alpha$ y $\beta$ sean iguales?

d. ¿En qué caso $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,\beta$?

12 Propón dos maneras de justificar que $\text{sen}\, 20° = \cos 70°$ sin hallar los valores de estas razones.

## Resolución de problemas

13 En un concurso hay una pista circular de 9 m de radio en la que se halla un indicador en forma de flecha como se representó en la Figura 3.113.

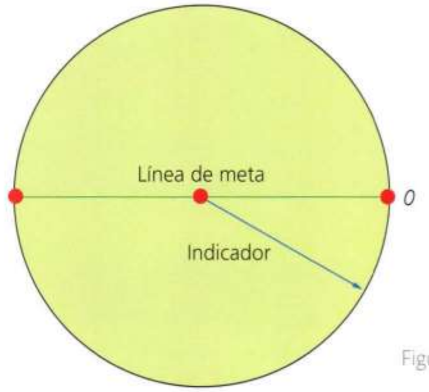



Figura 3.113

Cada participante debe hacer girar el indicador desde el punto O y, cuando este se detenga, el concursante debe ubicarse en el punto del borde del círculo señalado por el indicador; luego, desde ese punto, debe correr hasta la línea de meta. Quien lo haga en el menor tiempo posible es el ganador. Si el indicador se detiene sobre la línea de meta, el concursante pierde un turno.

Cuando Antonio hizo girar el indicador, este marcó un ángulo de 2 550°. ¿Qué distancia debe recorrer Antonio hasta la línea de meta?

## Evaluación del aprendizaje

i Calcula, en función de $h$, el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a. $\text{sen}\, 123°$, siendo $\text{sen}\, 57° = h$

b. $\cos 220°$, siendo $\tan 40° = h$

c. $\cos 247°$, siendo $\text{sen}\, 113° = h$

d. $\text{cosec}\, 701°$, siendo $\cot 199° = h$

ii Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$, según la condición dada.

a. $\alpha$ es un ángulo del primer cuadrante y $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

b. $\alpha$ pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}25$.

c. $180° < \alpha < 270°$ y $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

d. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec\alpha = \sqrt{2}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 11 Definición de las funciones trigonométricas

## Saberes previos

Halla valor de la razón seno de los ángulos notables y construye un plano para localizar los puntos correspondientes. ¿Cómo es la gráfica aproximada?

## Analiza

Observa la Figura 3.114, en la que se muestra una circunferencia unitaria.

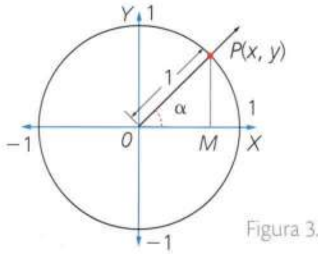



Figura 3.114

- ¿Cuál es la medida del ángulo $\alpha$ si su lado terminal corta a la circunferencia en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto $P$ si $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

## Conoce

En una circunferencia unitaria y en un punto $P(x, y)$ de la misma, se cumple que:

$\operatorname{sen}\alpha = y$ $\qquad \cos\alpha = x$ $\qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$

$\cot\alpha = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$ $\qquad \sec\alpha = \frac{1}{x}$, con $x \neq 0$ $\qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y}$, con $y \neq 0$

Si $y = \frac{1}{2}$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$; por lo tanto, $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Por su parte, como $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; por lo tanto, $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Se puede comprobar que el valor de las demás razones trigonométricas coinciden con las de $\frac{\pi}{6}$, por lo que se puede afirmar que $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, se sabe que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$, entonces $P(x, y) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

De esta manera, en una circunferencia unitaria a cada ángulo $\alpha$ le corresponde un único punto $P(x, y)$ de dicha circunferencia. De igual forma, a cada punto $P(x, y)$ le corresponde un ángulo $\alpha$.

Debido a lo anterior, es posible definir una función trigonométrica o función circular de acuerdo con las relaciones que presentan las razones trigonométricas.

En una circunferencia unitaria, a cada número real $t$ en $(0, 2\pi)$ le corresponde un ángulo de $t$ radianes en posición normal. A su vez, a un ángulo en $t$ radianes le corresponde el número real $t$. Por lo anterior, es posible definir las **funciones trigonométricas** de la siguiente manera:

$\operatorname{sen} t = y$ $\qquad \cos t = x$ $\qquad \tan t = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$

$\cot t = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$ $\qquad \sec t = \frac{1}{x}$, con $x \neq 0$ $\qquad \operatorname{cosec} t = \frac{1}{y}$, con $y \neq 0$

### Ejemplo 1

Si se sabe que $t = \frac{\pi}{3}$, y el lado terminal de $t$ corta a la circunferencia unitaria en el punto $P(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, entonces:

$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos t = \frac{1}{2}$ $\qquad \tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\cot t = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \sec t = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ $\qquad \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 11.1 Dominio de las funciones trigonométricas

El dominio de las funciones trigonométricas está definido como se muestra en la Tabla 3.7.

| Funciones | Dominio |
|---|---|
| Seno y coseno | Todos los números reales $t$. |
| Tangente y secante | No están definidas si $x = 0$, es decir, todos los números reales $t$ diferentes a $\frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n$ entero. |
| Cotangente y cosecante | No están definidas si $y = 0$, es decir, todos los números reales diferentes a $n\pi$ con $n$ entero. |

Tabla 3.7

## 11.2 Funciones trigonométricas para ángulos cuadrantales

Un ángulo cuadrantal es un ángulo en posición normal donde el lado final coincide con uno de los semiejes del plano cartesiano.

La Figura 3.115 muestra los ángulos cuadrantales 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ y $\frac{3\pi}{2}$ sobre la circunferencia unitaria. Además, se observa que el ángulo $2\pi$ es coterminal con 0; luego, $2\pi$ rad $= 0$ rad.

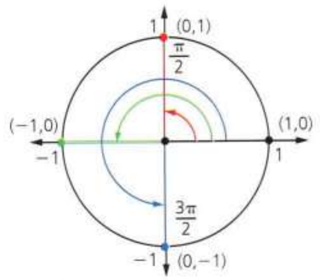



Figura 3.115

Para hallar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales sobre la circunferencia unitaria, se toman las coordenadas $P(x, y)$. La Tabla 3.8 resume los valores de las funciones para estos ángulos.

| Radián | Grados | $P(x, y)$ | Sen | Cos | Tan | Cot | Sec | Cosec |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | (1, 0) | 0 | 1 | 0 | Indef. | 1 | Indef. |
| $\frac{\pi}{2}$ | 90 | (0, 1) | 1 | 0 | Indef. | 0 | Indef. | 1 |
| $\pi$ | 180 | (−1, 0) | 0 | −1 | 0 | Indef. | −1 | Indef. |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 270 | (0, −1) | −1 | 0 | Indef. | 0 | Indef. | −1 |
| $2\pi$ | 0 | (1, 0) | 0 | 1 | 0 | Indef. | 1 | Indef. |

Tabla 3.8

**Ejemplo 2**

Para hallar $\operatorname{sen} t$ y $\tan t$, si $\cos t = \frac{2}{3}$ y $t$ es un ángulo del cuarto cuadrante, se usa la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \qquad \operatorname{sen}^2 t = 1 - \frac{4}{9} \qquad \operatorname{sen} t = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como $t$ se encuentra en el cuarto cuadrante, entonces $\operatorname{sen} t = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Luego, para hallar $\tan t$:

$$\tan t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{-3\sqrt{5}}{6} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

De acuerdo con la Figura 3.116, $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$.

De otra parte, en el triángulo rectángulo $OMP$, se tiene por el teorema de Pitágoras que:

$x^2 + y^2 = 1$, luego $(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$, que equivale a escribir $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ o $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

A esta igualdad se le conoce como **identidad pitagórica**.

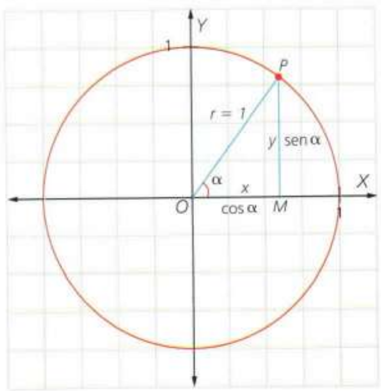



Figura 3.116

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 11 Definición de las funciones trigonométricas

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Halla, en cada caso, el valor de las funciones trigonométricas a partir de $P(x, y)$.

a. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

c. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ d. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

**2** Completa la Tabla 3.9 con los signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante.

| Cuadrante | sen $t$ | cos $t$ | tan $t$ | cot $t$ | sec $t$ | cosec $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | | | | | | |
| II | | | | | | |
| III | | | | | | |
| IV | | | | | | |

Tabla 3.9

### Comunicación

**3** Representa, en cada caso, el ángulo $t$ en posición normal y encuentra el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

a. $t = \frac{3\pi}{2}$ b. $t = 2\pi$ c. $t = \frac{\pi}{2}$

d. $t = \frac{2\pi}{3}$ e. $t = \frac{\pi}{6}$ f. $t = -\frac{\pi}{6}$

### Ejercitación

**4** Halla los valores de las demás funciones trigonométricas a partir de la función dada, con valores en el primer cuadrante.

a. $\tan t = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos t = \frac{1}{3}$ c. $\operatorname{cosec} t = 2$

d. $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ e. $\sec t = 3$ f. $\cot t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**5** Encuentra un ángulo que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

a. La tangente es negativa.

b. La cotangente es positiva.

c. El seno es negativo.

d. El coseno es positivo.

### Comunicación

**6** Halla los puntos $P(x, y)$ pertenecientes a la circunferencia unitaria de los ángulos más representativos en el primer cuadrante (Figura 3.117).

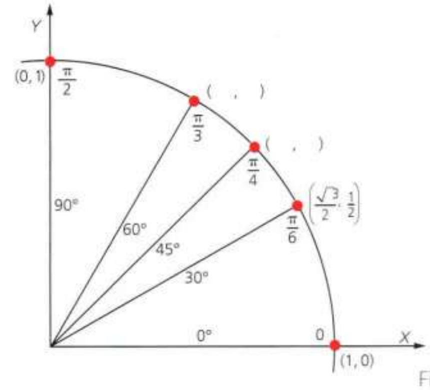



Figura 3.117

**7** Halla los puntos $P(x, y)$ pertenecientes a la circunferencia unitaria de los ángulos más representativos en el segundo cuadrante (Figura 3.118).

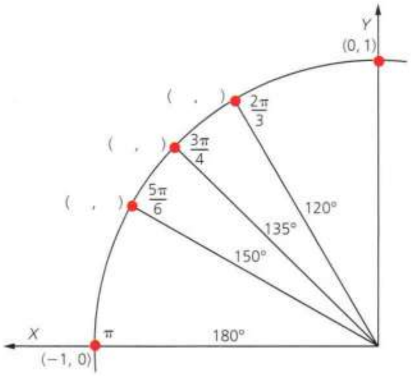



Figura 3.118

**8** Completa los puntos $P(x, y)$ pertenecientes a la circunferencia unitaria de los ángulos más representativos en el tercer y cuarto cuadrante (Figura 3.119).

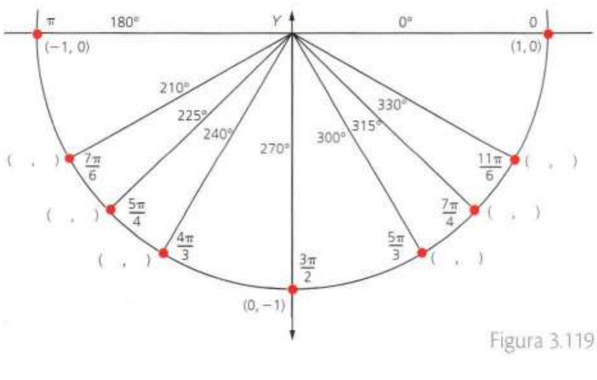



Figura 3.119

**9** Halla sen $t$ y tan $t$, si $\cos t = -\frac{2}{3}$ y $t$ se ubica en el segundo cuadrante.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**10** Halla $\cos t$ y $\cot t$, si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$ y $t$ se ubica en el segundo cuadrante.

**11** Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\tan(-250°)$ b. $\operatorname{sen}(-25°)$

c. $\cot 78°$ d. $\sec 10°$

### Ejercitación

**12** Completa las tablas.

a.

| $t$ | sen $t$ |
|---|---|
| 0° | |
| 30° | |
| 60° | |
| 90° | |
| 120° | |
| 150° | |
| 180° | |
| 210° | |
| 240° | |
| 270° | |
| 300° | |
| 330° | |
| 360° | |

Tabla 3.10

b.

| $t$ | cos $t$ |
|---|---|
| 0° | |
| 30° | |
| 60° | |
| 90° | |
| 120° | |
| 150° | |
| 180° | |
| 210° | |
| 240° | |
| 270° | |
| 300° | |
| 330° | |
| 360° | |

Tabla 3.11

c.

| $t$ | tan $t$ |
|---|---|
| 0° | |
| 30° | |
| 60° | |
| 90° | |
| 120° | |
| 150° | |
| 180° | |
| 210° | |
| 240° | |
| 270° | |
| 300° | |
| 330° | |
| 360° | |

Tabla 3.12

d.

| $t$ | cot $t$ |
|---|---|
| 0° | |
| 30° | |
| 60° | |
| 90° | |
| 120° | |
| 150° | |
| 180° | |
| 210° | |
| 240° | |
| 270° | |
| 300° | |
| 330° | |
| 360° | |

Tabla 3.13

**13** Completa tablas similares a las de la actividad 12 para las funciones $\sec t$ y $\operatorname{cosec} t$.

### Razonamiento

**14** Identifica distintos valores de $t$ para los cuales se cumple cada condición.

a. $\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} t$ b. $\cos 15° = \cos t$

c. $\tan 30° = \tan t$ d. $\cot 30° = \cot t$

**15** Identifica los valores de $t$ en el intervalo

$$0 < t < 2\pi$$

para los cuales $\tan t$ es indefinida.

### Resolución de problemas

**16** Halla el valor de cada expresión. Compara los resultados en cada literal. ¿Cómo explicas lo sucedido?

a. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$

b. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$

**17** Halla el valor de cada expresión. Compara los resultados en cada literal. ¿Cómo explicas lo sucedido?

a. $\tan 10°$ y $\tan(10° + 180°)$

b. $\tan 25°$ y $\tan(25° + 180°)$

c. $\tan 78°$ y $\tan(78° + 180°)°$

### Evaluación del aprendizaje

**i** Se sabe que el lado terminal de un ángulo $\alpha$ corta a la circunferencia unitaria en el punto $P(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

a. Determina todas las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$.

b. Halla la medida del ángulo $\alpha$.

**ii** Determina el valor de verdad de cada afirmación.

a. No existen ángulos para los cuales $\sec\alpha = \csc\alpha$.

b. $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.

c. El dominio de la función $\operatorname{sen} x$ es igual al recorrido de $\tan x$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 12 Teorema del seno

## Saberes previos

Supón que tomas una cuerda y construyes un triángulo. Si fijas dos de los vértices y mueves el tercero, ¿qué cambios ocurren sobre la medidas de los lados y de los ángulos?

## Analiza

Un águila vuela sobre un prado plano y despejado; desde allí observa dos ratones con ángulos de depresión de 32° y 48°, respectivamente. Los ratones están a 2 km uno del otro.

- ¿Cuál de los dos ratones está a menor distancia del águila?

## Conoce

Para resolver esta situación, se puede utilizar el teorema del seno.

El **teorema del seno** permite resolver un triángulo cualquiera, si se conoce un lado y otros dos elementos del triángulo (al menos un ángulo). Este teorema indica que dado un triángulo $ABC$ cualquiera se verifica que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Sea el triángulo $ABC$ con $h$ la altura sobre el lado $\overline{BC}$, como se observa en la Figura 3.120.

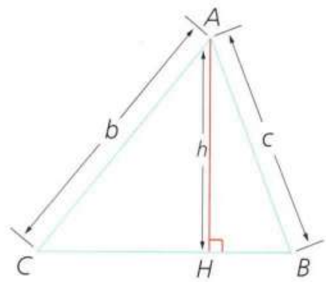



Figura 3.120

El triángulo $AHB$ es rectángulo en $H$; por lo tanto, $\operatorname{sen} B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen} B$.

El triángulo $AHC$ es rectángulo en $H$; por lo tanto, $\operatorname{sen} C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} C$.

De las dos igualdades se deduce que: $c \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} C \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$.

La otra igualdad se obtiene al considerar la altura sobre el lado $\overline{AB}$.

Para responder la pregunta planteada en la situación inicial, se puede utilizar la Figura 3.121 y plantear el teorema del seno como se muestra a continuación.

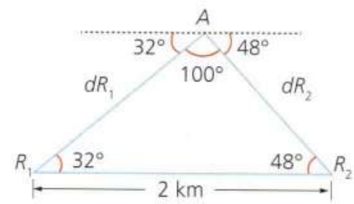



Figura 3.121

Para el ratón 1:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{dR_1}{\operatorname{sen} 48°}$$

Para el ratón 2:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{dR_2}{\operatorname{sen} 32°}$$

Al despejar $dR_1$ y $dR_2$ en cada una de las expresiones, se tiene que:

$$dR_1 = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 100°} \approx 1{,}509 \text{ km} \qquad dR_2 = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} 32°}{\operatorname{sen} 100°} \approx 1{,}076 \text{ km}$$

Por consiguiente, el águila está más cerca del ratón 2.

El teorema del seno se usa en dos situaciones específicas de triángulos: cuando se conocen un lado y dos ángulos y cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 1**

Para encontrar el ángulo $B$ del triángulo $ABC$ de la Figura 3.122, en el cual $b = 10$ cm, $c = 5$ cm y $m\measuredangle C = 65°$, se parte de $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$, de donde:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} \cdot \operatorname{sen} C = \left(\frac{10}{5}\right)\operatorname{sen} 65° \approx 1{,}81$$

La ecuación $\operatorname{sen} B = 1{,}81$ no tiene solución pues el seno de un ángulo cualquiera oscila entre $-1$ y 1. Se dice que el triángulo no tiene solución.

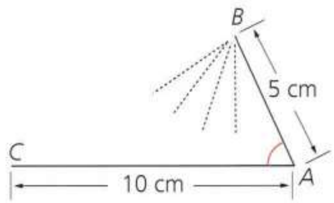



Figura 3.122

**Ejemplo 2**

Observa cómo se hallan los lados y ángulos que faltan en el triángulo de la Figura 3.123.

Como $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$, entonces:

$m\measuredangle B = 180° - (m\measuredangle A + m\measuredangle C) = 180° - (48° + 57°) = 75°$

Ahora, haciendo uso del teorema del seno $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$, se tiene que:

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \cdot \operatorname{sen} A = \left(\frac{47}{\operatorname{sen} 75°}\right)\operatorname{sen} 48° \approx \left(\frac{47}{0{,}97}\right)(0{,}74) \approx 36{,}2 \text{ cm}$$

Para hallar el valor de $c$, se puede usar la igualdad $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$, de donde:

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \cdot \operatorname{sen} C = \left(\frac{36{,}2}{\operatorname{sen} 48°}\right)\operatorname{sen} 57° \approx \left(\frac{36{,}2}{0{,}74}\right)(0{,}83) \approx 40{,}6 \text{ cm}$$

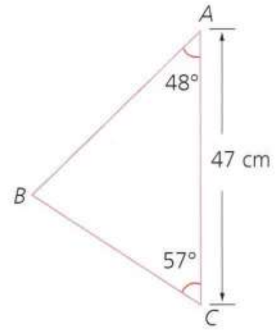



Figura 3.123

**Ejemplo 3**

- Se quiere calcular la longitud del lado $a$ de un triángulo $ABC$ con $b = 12$ cm, $m\measuredangle A = 60°$ y $m\measuredangle B = 40°$.

  Para ello, se aplica el teorema del seno $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$:

  $$a = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 40°} \approx 16{,}17 \text{ cm}$$

- Para determinar el valor de $b$ en la Figura 3.124 se debe calcular primero el valor de $c$. Se puede iniciar encontrando el ángulo $\alpha$:

  $\alpha = 180° - (60° + 75°) = 45°$

  Conocido el ángulo $\alpha$, es posible aplicar el teorema del seno así:

  $$\frac{c}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{200}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow c = \left(\frac{200}{\operatorname{sen} 45°}\right)\operatorname{sen} 60° \approx \left(\frac{200}{0{,}70}\right)(0{,}87) \approx 248{,}6$$

  Ya conocido el valor de $c$, se aplica de nuevo el teorema del seno.

  $$\frac{b}{\operatorname{sen} 50°} = \frac{248{,}6}{\operatorname{sen} 90°} \Rightarrow b = \left(\frac{248{,}6}{\operatorname{sen} 90°}\right)\operatorname{sen} 50° \approx \left(\frac{248{,}6}{1}\right)(0{,}77) \approx 191{,}42$$

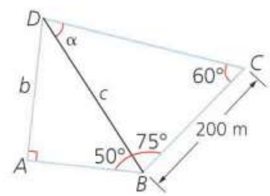



Figura 3.124

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 12 Teorema del seno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Dibuja el triángulo y halla los ángulos y los lados que se desconocen.

a. $b = 70$ cm; $m\measuredangle A = 80°$; $a = 100$ cm

b. $m\measuredangle A = 35°$; $m\measuredangle B = 65°$; $c = 98$ cm

c. $c = 36$ cm; $m\measuredangle C = 52°$; $b = 46$ cm

**2** Resuelve cada triángulo.

a.

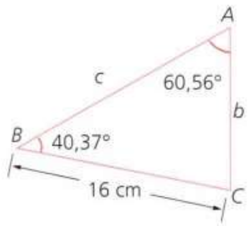



Figura 3.125

b.

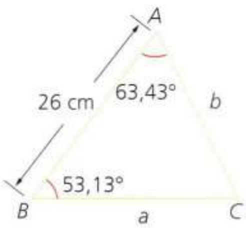



Figura 3.126

c.

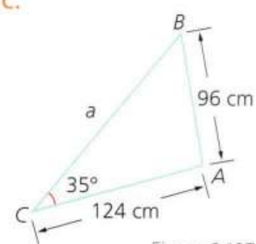



Figura 3.127

d.

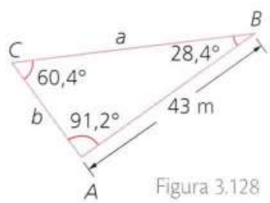



Figura 3.128

e.

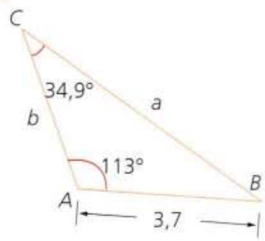



Figura 3.129

f.

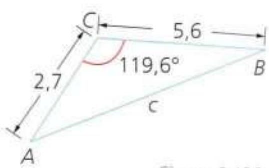



Figura 3.130

g.

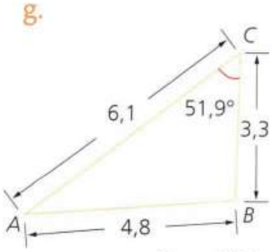



Figura 3.131

h.

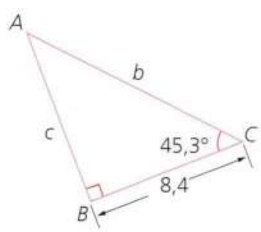



Figura 3.132

**3** Resuelve los siguientes triángulos. Utiliza la ley del seno, razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras según el caso.

a.

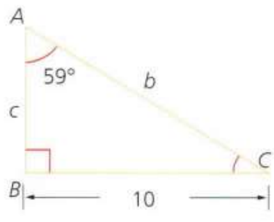



Figura 3.133

b.

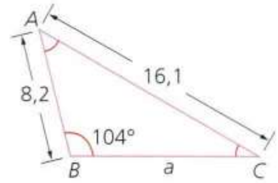



Figura 3.134

c.

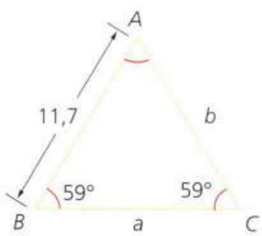



Figura 3.135

d.

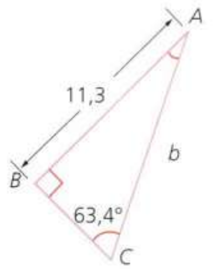



Figura 3.136

e.

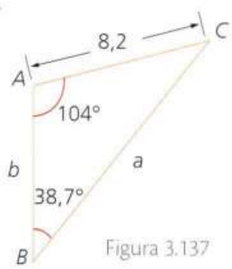



Figura 3.137

f.

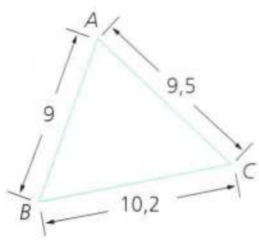



Figura 3.138

### Comunicación

**4** Responde a partir de la Figura 3.139.

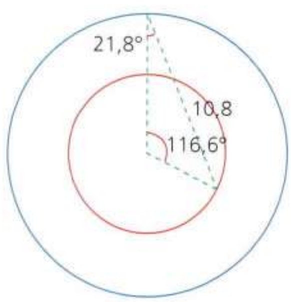



Figura 3.139

a. ¿Cuánto mide el radio de cada circunferencia?

b. ¿Cuál es la medida del ángulo que falta?



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Calcula la distancia entre los puntos $C$ y $D$ presentados en la Figura 3.140.

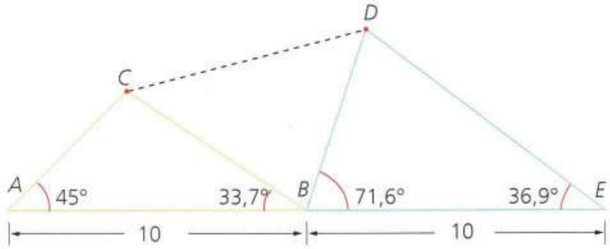



Figura 3.140

**Resolución de problemas**

6 Un avión viaja entre dos ciudades $B$ y $E$ con ángulos de elevación de 31° y 45°, respectivamente. La distancia entre las ciudades es de 1 500 km. Halla la distancia del avión a cada ciudad.

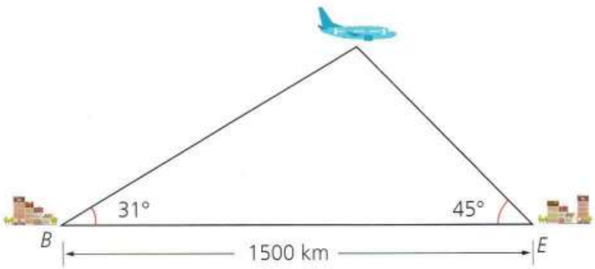



Figura 3.141

7 Un montañista observa dos pinos, $A$ y $B$, desde la cima de una montaña con un ángulo de 77°. El ángulo de elevación de $A$ al montañista es de 31° y la distancia entre los pinos $A$ y $B$ es de 12 km. ¿A qué distancia está el montañista de cada pino?

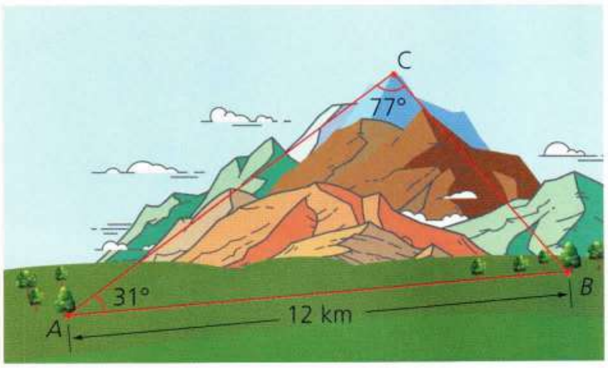



Figura 3.142

8 Halla la medida de la diagonal mayor de un paralelogramo con lados 7 cm y 8 cm, y el ángulo interno mayor de 145°.

9 Un avión vuela entre dos ciudades $A$ y $B$ que distan entre sí 75 km. Las visuales desde $A$ y $B$ hasta el avión forman ángulos de 36° y 12° con la horizontal. Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de $A$ y de $B$, si el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

10 Dos personas están separadas 2 km de distancia. Sobre su plano vertical y en el mismo momento, hay una nube bajo ángulos respectivos de 73° y 84°.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada una de las personas.

## Evaluación del aprendizaje

i Determina la longitud del puente de la Figura 3.143, si la distancia del punto $X$ al $Y$ es de 95 m.

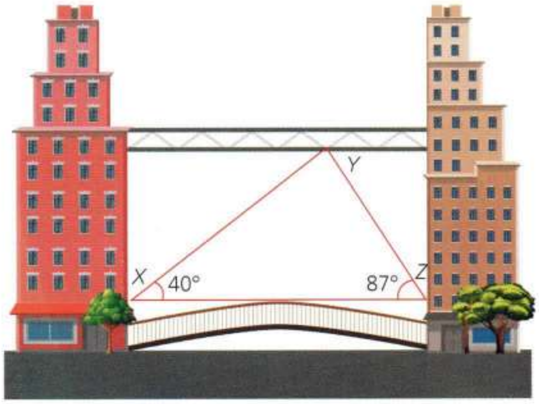



Figura 3.143

ii Si la embarcación $C$ de la Figura 3.144 se dirige a la embarcación $B$, ¿qué rumbo debe tomar la embarcación $C$ para ir a la embarcación $A$?

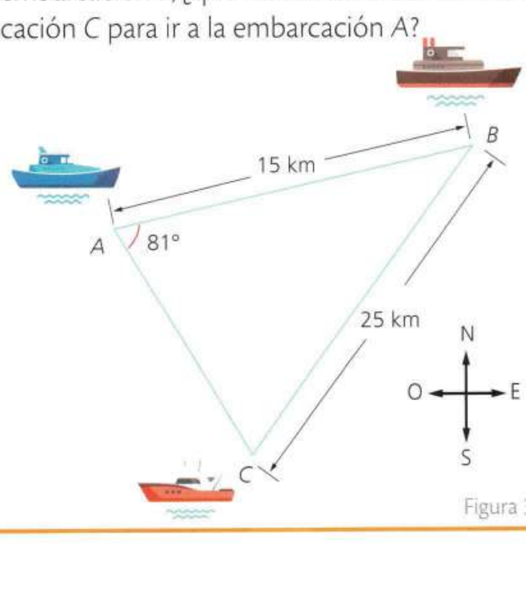



Figura 3.144

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 13 Teorema del coseno

## Saberes previos

Tres amigos están en un campo de fútbol. Entre Juan y Fernando hay 25 metros, y entre Fernando y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20°. Traza un dibujo a escala y determina la distancia que hay entre Juan y Camilo. ¿Depende esa distancia del ángulo?

## Analiza

En la Figura 3.145 las diagonales del paralelogramo miden 10 cm y 12 cm, y el ángulo entre ellas mide 50°.

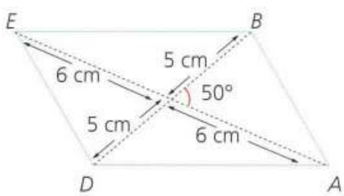



Figura 3.145

- ¿Cuánto mide cada uno de los lados del paralelogramo?

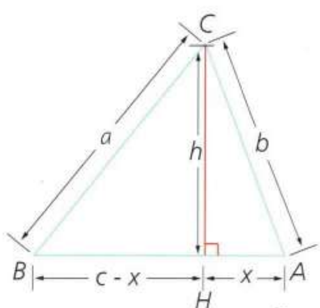



Figura 3.146

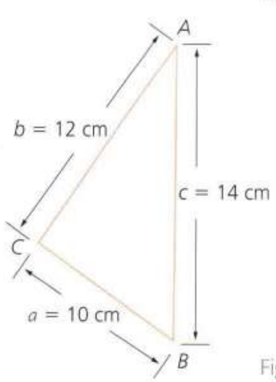



Figura 3.147

## Conoce

Antes de resolver la situación planteada es necesario formular un nuevo teorema.

El **teorema del coseno** permite resolver triángulos de los cuales se conocen tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Este teorema indica que, dado cualquier triángulo $ABC$, se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

En el triángulo de la Figura 3.146 se considera la altura $h$ sobre el lado $\overline{AB}$ que determina el segmento $x = AH$ sobre $\overline{AB}$.

El triángulo $AHC$ es rectángulo en $H$, así que: $b^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2$

El triángulo $BHC$ es rectángulo en $H$, así que:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 = h^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

Si se sustituye la primera relación en la segunda, se obtiene: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Como $\cos A = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos A$

Las otras igualdades se demuestran de manera similar tomando las otras alturas del $\triangle ABC$.

Retomando el paralelogramo de la Figura 3.146, se tiene que:

Para el lado de menor medida: $c^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5\cos 50° \approx 22{,}43$

Para el lado de mayor medida: $c^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5\cos 130° \approx 99{,}56$

**Ejemplo 1**

Para calcular la medida del ángulo $B$ del triángulo $ABC$ de la Figura 3.147, se puede usar la segunda fórmula proporcionada por el teorema y despejar $\cos B$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$= \frac{10^2 + 14^2 - 12^2}{2(10)(14)} = \frac{152}{280} \approx 0{,}54$$
$$\Rightarrow B \approx 57{,}31°$$

Para hallar la medida del ángulo $A$, se despeja $\cos A$ en la primera fórmula.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$= \frac{12^2 + 14^2 - 10^2}{2(12)(14)} = \frac{240}{336} \approx 0{,}71$$
$$\Rightarrow A \approx 44{,}76°$$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

Dos personas parten de un mismo punto $A$ y sus caminos forman un ángulo de 60°. Si una hora después han caminado 10 km y 12 km, respectivamente, ¿qué distancia los separa ahora?

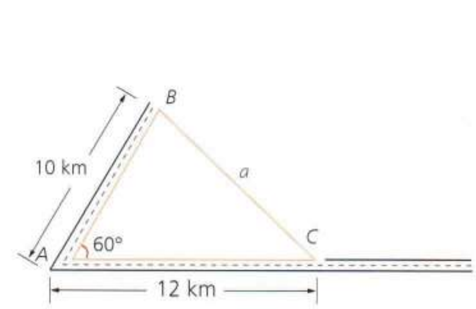


Figura 3.148

Si $A$ es el punto de partida, los puntos $B$ y $C$ corresponderán a los puntos de llegada de cada persona. Estos tres puntos determinan el triángulo $ABC$ de la Figura 3.148, en el cual la medida de $BC$ será la distancia que los separa luego de haber realizado su recorrido.

Como los datos conocidos son: $b = 12$ km, $c = 10$ km y $m\measuredangle A = 60°$, y $BC$ corresponde al valor de $a$, se utiliza la primera fórmula del teorema del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 12^2 + 10^2 - 2(12)(10)\cos 60°$$
$$= 144 + 100 - (240)(0{,}5) = 244 - 120 = 124 \Rightarrow a \approx 11{,}13$$

De acuerdo con lo anterior, la distancia que los separa una hora después de haber iniciado su recorrido es aproximadamente 11,13 km.

**Ejemplo 3**

- Se quiere calcular la medida del ángulo $B$ de un triángulo $ABC$ en el cual $a = 14$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm.

  Para ello se utiliza el teorema del coseno como sigue.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$= \frac{196 + 100 - 144}{2 \cdot 14 \cdot 10} \approx 0{,}543$$
$$B = \arccos(0{,}54) \approx 57{,}31°$$

- Se desea construir un túnel por debajo de una montaña y, para hacerlo, un topógrafo toma las medidas indicadas en la Figura 3.149.

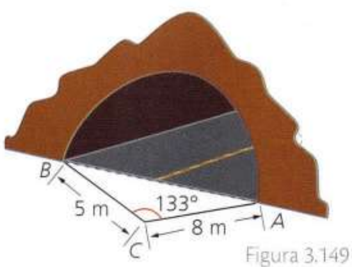


Figura 3.149

Los datos proporcionados indican que de un triángulo $ABC$, se desea conocer la medida de su lado $BA$, es decir el valor de $c$. Para ello, se puede utilizar la tercera fórmula del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$= 5^2 + 8^2 - 2(5)(8)\cos 133° \approx 25 + 64 - (80)(-0{,}68) \approx 143{,}4$$
$$c \approx \sqrt{143{,}4} = 11{,}97$$

Luego, la medida del túnel es aproximadamente 11,97 m.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 13 Teorema del coseno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Dibuja el triángulo y halla la medida de los ángulos y los lados que faltan.

a. $b = 70$ cm; $c = 85$ cm; $a = 100$ cm

b. $a = 18$ m; $m\measuredangle B = 65°$; $c = 26$ m

c. $c = 6$ dm; $a = 7{,}8$ dm; $b = 9{,}5$ dm

d. $m\measuredangle C = 41°$; $b = 105$ m; $a = 140$ m

e. $b = 98$ cm; $m\measuredangle A = 15°$; $c = 125$ cm

**2** Resuelve los siguientes triángulos.

a.

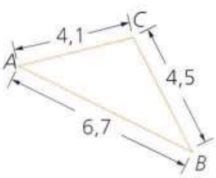



Figura 3.150

b.

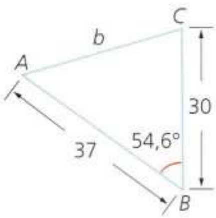



Figura 3.151

c.

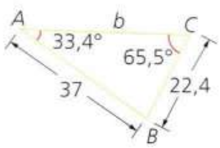



Figura 3.152

d.

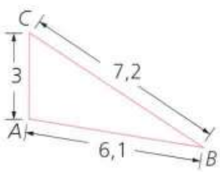



Figura 3.153

e.

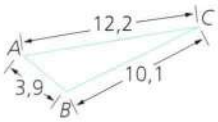



Figura 3.154

f.

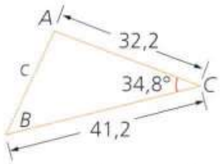



Figura 3.155

g.

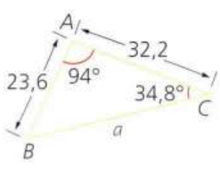



Figura 3.156

h.

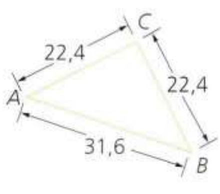



Figura 3.157

### Modelación

**3** Lee y resuelve.

Cuando se conocen dos lados $a$ y $b$ de un triángulo $ABC$ y el ángulo $B$ comprendido entre ellos, el área $A$ del triángulo se puede obtener mediante la expresión:

$$\text{Área del triángulo } ABC = A_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sen\, B$$

Calcula el área de cada triángulo.

a.

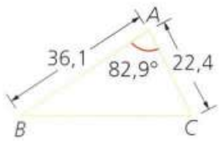



Figura 3.158

b.

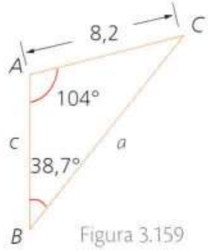



Figura 3.159

c.

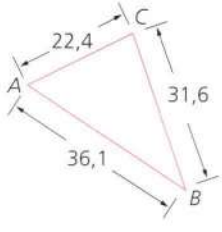



Figura 3.160

d.

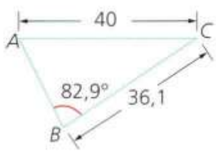



Figura 3.161

### Comunicación

**4** Explica en qué casos se utiliza el teorema del seno y en qué casos el teorema del coseno cuando se resuelve un triángulo.

**5** Halla el área de la región sombreada.

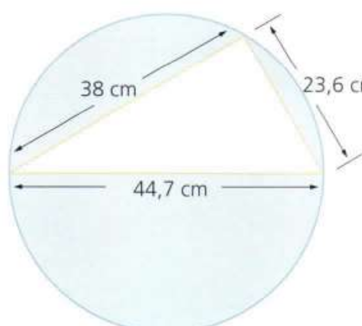



Figura 3.162

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Calcula la medida del ángulo β.

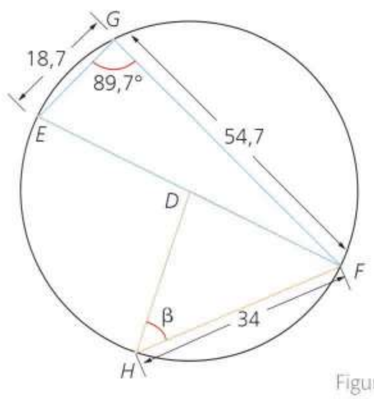



Figura 3.163

## Resolución de problemas

7 Dos escaladores se encuentran en los picos de dos montañas (Figura 3.164). El escalador *A* se encuentra a 5,6 km del campamento *C*, y el escalador *B* a 12,6 km. El ángulo de separación entre los dos es de 85°. ¿Qué distancia separa a los dos escaladores?

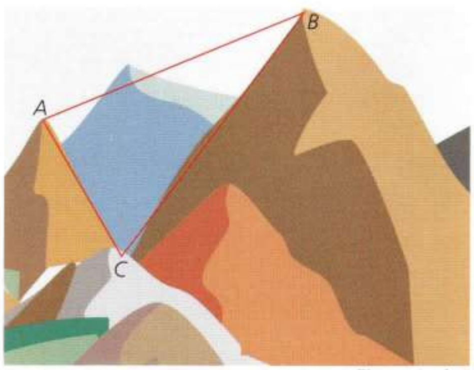



Figura 3.164

8 Felipe está en la azotea *B* de su edificio observando los dos edificios más altos *A* y *C* de la Figura 3.165. Si la distancia desde la azotea de su edificio a los otros dos es 80 m y 110 m, ¿cuál es la distancia entre las azoteas *A* y *C*?

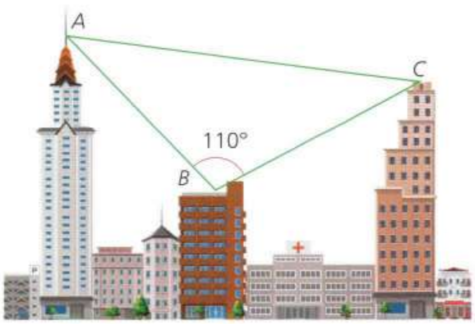



Figura 3.165

9 Halla el área de la región sombreada de la Figura 3.166, si *P* es el punto medio del segmento *CD* y la altura del paralelogramo es de 30 cm.

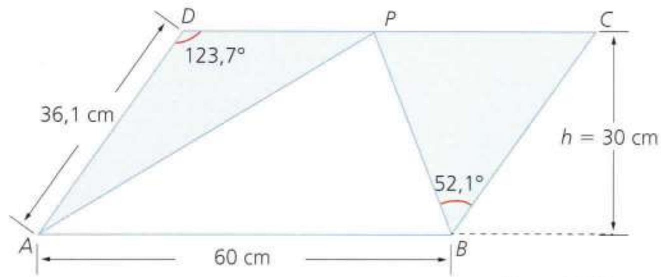



Figura 3.166

10 Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto *B* del campo de la Figura 3.167.

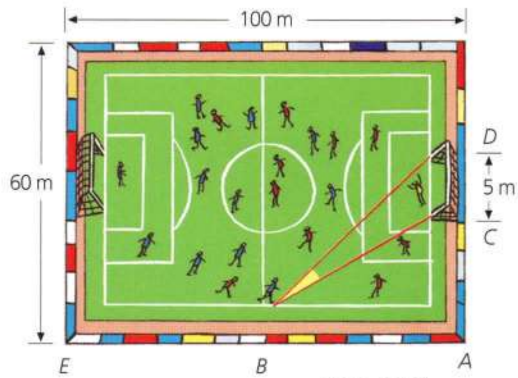



Figura 3.167

## Evaluación del aprendizaje

i ¿Qué distancia debe recorrer la bola blanca para impactar a la verde si se sabe que la distancia entre la bola blanca y la amarilla es de 25 cm, de la amarilla a la verde hay 38 cm y el ángulo entre las distancias es de 55°?

Figura 3.168

ii Plantea una situación que tenga los siguientes datos y propón a un compañero resolverla.

$b = 35$ km; $c = 48$ km; $a = 61$ km

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Medida de ángulos y triángulos

### Comunicación

**1** Completa la Tabla 3.14.

| Grados | Radianes | Rotaciones |
|---|---|---|
| 80° | | |
| | $\pi$ | |
| | | $\frac{2}{8}$ |
| 95° | | |
| | $\frac{\pi}{12}$ | |
| 150° | | |

Tabla 3.14

### Razonamiento

**2** Encuentra la medida de los ángulos y los lados faltantes en cada triángulo.

a.

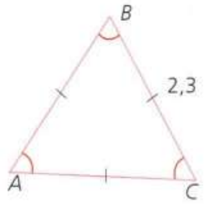


Figura 3.169

b.

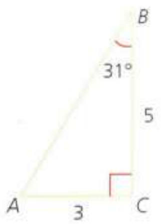


Figura 3.170

## Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

### Ejercitación

**3** Halla las razones trigonométricas de los ángulos dados.

a.

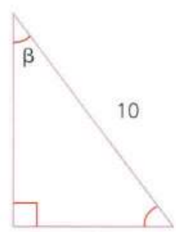


Figura 3.171

b.

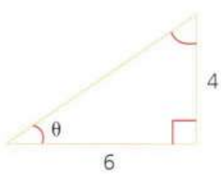


Figura 3.172

## Resolución de triángulos rectángulos

### Ejercitación

**4** Resuelve los siguientes triángulos.

a.

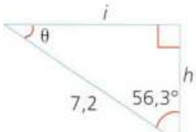


Figura 3.173

b.

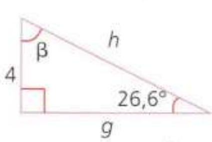


Figura 3.174

## Ángulo de elevación y ángulo de depresión

### Resolución de problemas

**5** ¿Cuál es la distancia entre dos ciudades $A$ y $B$, si desde la ciudad $A$ se observa un avión (que está a una altura de 1 500 pies del suelo) con un ángulo de elevación de 33°, y del avión se observa la ciudad $B$ con un ángulo de depresión de 27°?

Utiliza la Figura 3.175.

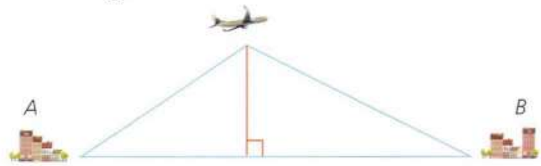


Figura 3.175

## Definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria y uso de los ángulos de referencia

**6** Indica cuáles son las razones trigonométricas del ángulo $B$ cuyo lado terminal pasa por cada punto.

a. $(8, -15)$  b. $(-7, -4)$  c. $(-6, -8)$

**7** Halla dos ángulos equivalentes al ángulo $\theta$ entre 0° y 360° en cada caso y represéntalos en el plano cartesiano.

a. $\theta = 2460°$  b. $\theta = -2460°$

c. $\theta = -1580°$  d. $\theta = 3260°$

## Definición de las funciones trigonométricas

**8** Representa, en cada caso, el valor del ángulo $t$ en posición normal y halla el valor de las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} t$, $\cos t$ y $\tan t$, si existen.

a. $t = \frac{\pi}{9}$  b. $t = \frac{2\pi}{3}$

c. $t = \frac{\pi}{9}$  d. $t = \frac{5\pi}{9}$

## Teoremas del seno y del coseno

**9** Calcula la distancia del punto $C$ al $D$.

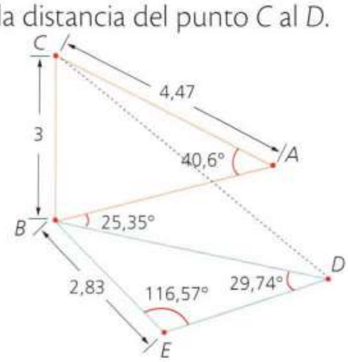


Figura 3.176

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Estrategia: Usar una fórmula

### Problema

La rueda panorámica de un parque de diversiones tiene un diámetro de 48 m. ¿Qué longitud ha recorrido una góndola si la rueda ha girado tres cuartos de vuelta?

### 1. Comprende el problema

- ¿Qué información encuentras en el enunciado?

  R: El diámetro de la rueda panorámica y el giro que ha dado.

- ¿Qué debes hallar?

  R: La longitud que recorre una góndola cuando la rueda ha girado tres cuartos de vuelta.

### 2. Crea un plan

- Utiliza la fórmula de la longitud de la circunferencia y la fórmula de la longitud de arco para resolver el problema. Compara los resultados que obtuviste en cada caso.

### 3. Ejecuta el plan

Observa los dos procedimientos.

- Al dar una vuelta completa, la góndola recorre una distancia igual a la longitud de la circunferencia de la rueda. Por lo tanto:

$$L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 24 = 150{,}72$$

  Luego, se calculan tres cuartos de esta distancia.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 150{,}72 = 113{,}04$$

- Al dar una vuelta completa, la rueda gira un ángulo $\theta$ de $2\pi$ rad. Entonces:

$$S = \theta \cdot r = 2\pi \cdot 24 = 150{,}72$$

  Lo que significa que, al girar tres cuartos de vuelta:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 150{,}72 = 113{,}04$$

**R:** La góndola recorre una longitud de 113,04 m.

### 4. Comprueba la respuesta

- Verifica que, si la rueda tuviese un radio de 20 m, en los tres cuartos de vuelta giraría 94,2 m.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Aplica la estrategia

1. Francisco observa el reloj que hay en la pared de un consultorio y calcula que la longitud del minutero es de 15 cm. Si Francisco llegó al consultorio a las 12:45 p. m. y fue llamado a su cita a la 1:00 p. m., ¿qué distancia recorrió el extremo del minutero mientras Francisco esperaba?

   a. Comprende el problema

   ..............................

   ..............................

   b. Crea un plan

   ..............................

   ..............................

   c. Ejecuta el plan

   ..............................

   ..............................

   d. Comprueba la respuesta

   ..............................

   ..............................

## Resuelve otros problemas

2. Dos personas observan al mismo tiempo un avión que vuela, en el mismo plano, a una altura de 1 200 m. Si lo observan con ángulos de elevación de 18° y 24°, respectivamente, ¿qué distancia separa a las dos personas?

## Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

> "Las razones trigonométricas de un ángulo dependen de su medida y no de la longitud de sus lados."

### Enriquece tu vocabulario

- Completa en tu cuaderno.

  Un triángulo .................... tiene mayor un ángulo recto, mientras que uno .................... tiene sus tres ángulos agudos.

## Medida de ángulos

### Ejercitación

**1** Une con una línea las medidas equivalentes.

ACTIVIDAD DE RELACIONAR

a. 163° 29′ 13,2″ — 164,225°

b. 163,5° — 163°30′

c. $\frac{11\pi}{12}$ — 164,25°

d. 163° 73′ 30″ — 163,487°

e. $\frac{73\pi}{80}$ — 165°

## Triángulos

### Modelación

**2** Completa la frase con base en la Figura 3.177.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

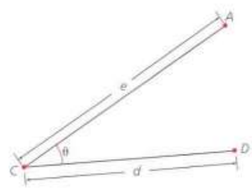



Figura 3.177

Para que la figura determine un triángulo rectángulo se debe cumplir que:

a. $\operatorname{sen}\theta = \frac{AD}{CD}$

b. $\operatorname{sen}\theta = \frac{AD}{CA}$

c. $\tan\theta = \frac{AD}{CA}$

d. $\tan\theta = \frac{CD}{CA}$

### Resolución de problemas

**3** Dos automóviles parten de un mismo punto simultáneamente por carreteras rectas que difieren 90° en dirección. Si el primer vehículo viaja a 62 km/h y el segundo a 55 km/h. ¿A qué distancia se hallarán el uno del otro al cabo de 10 minutos?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

### Modelación

**4** En la Figura 3.178, cosec β está definida por:

SELECCIÓN MÚLTIPLE

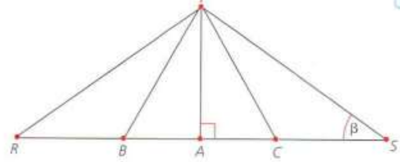



Figura 3.178

a. $\operatorname{cosec}\beta = \frac{RS}{TS}$

b. $\operatorname{cosec}\beta = \frac{ST}{AT}$

c. $\operatorname{cosec}\beta = \frac{ST}{CT}$

d. $\operatorname{cosec}\beta = \frac{AS}{ST}$

### Resolución de problemas

**5** En un triángulo isósceles la altura mide 9 cm, uno de los ángulos formado por la base y uno de los lados congruentes del triángulo mide 30°.

Las medidas de los lados ($l$) y la base ($b$) son:

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $l = 16$ cm y $b = 8\sqrt{3}$ cm

b. $l = 12$ cm y $b = 12\sqrt{3}$ cm

c. $l = 9$ cm y $b = 9\sqrt{3}$ cm

d. $l = 18$ cm y $b = 18\sqrt{3}$ cm

## Razones trigonométricas de ángulos especiales

### Resolución de problemas

**6** Observa la Figura 3.179 y responde.

¿A qué altura con respecto al suelo se encuentra la cometa?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

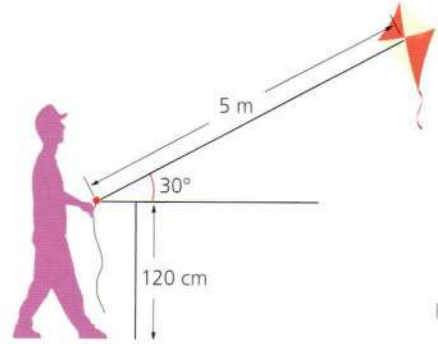



Figura 3.179

## Resolución de triángulos rectángulos

### Razonamiento

**7** Si en el triángulo rectángulo de la Figura 3.180 $n = 2{,}83$ m y m∡$A = 34{,}68°$, determina si las igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tu respuesta.

VERDADERO/FALSO

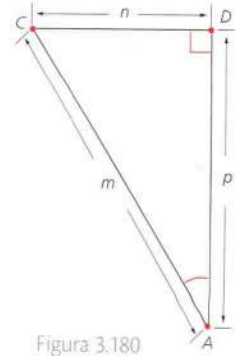



Figura 3.180

a. $m = 4{,}97$ m ( )

b. $\frac{n}{m} = 0{,}822$ ( )

c. $p = \tan 34{,}68°$ ( )

d. $\measuredangle C = 55{,}32°$ ( )

e. $\frac{p}{n} = \tan C$ ( )



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ángulo de elevación y ángulo de depresión

### Resolución de problemas

**8** Un mirador de 146 pies de altura está ubicado al borde de una piscina. Desde el punto más alto del mirador, el ángulo de depresión de un objeto en el borde opuesto de la piscina es de 32,6°, ¿cuánto mide el ancho de la piscina? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**9** Desde un punto en el suelo se determina un ángulo de elevación de 30° hasta la cima de una torre; 38 metros más cerca se determina un ángulo de elevación a la cima de la torre de 60° (Figura 3.181). Halla la altura de la torre. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

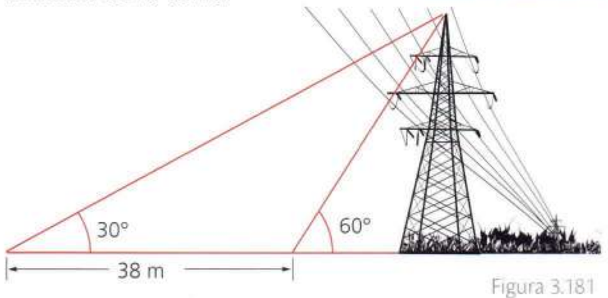


Figura 3.181

## Circunferencia unitaria

### Ejercitación

**10** El punto $P$ está en la circunferencia unitaria. Si la coordenada en $x$ es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la coordenada en $y$ es negativa. Las coordenadas del punto $P$ son: SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ b. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right)$

## Definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria

### Comunicación

**11** Determina si cada igualdad es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta. VERDADERO/FALSO

a. $\operatorname{sen} 90° = 0$ ( )

b. $\operatorname{cosec} 270° = -1$ ( )

c. $\tan 360° = 0$ ( )

d. $\cot 180° = 0$ ( )

e. $\cot 90° = 1$ ( )

## Cálculo de las razones trigonométricas usando ángulos de referencia

### Ejercitación

**12** Halla las razones trigonométricas del ángulo $Q$ si se sabe que $\tan Q = \frac{1}{4}$ y $Q$ está en el tercer cuadrante. ACTIVIDAD DE REFUERZO

## Razones trigonométricas para ángulos negativos, complementarios y coterminales

### Razonamiento

**13** Forma parejas entre las dos columnas, de tal manera que se determinen equivalencias. ACTIVIDAD DE RELACIONAR

| | |
|---|---|
| a. $\operatorname{sen} \frac{8\pi}{3}$ | $-\cos 30°$ |
| b. $\cos(-210°)$ | $\cos 60°$ |
| c. $\operatorname{sen} 45°$ | $\operatorname{sen} 120°$ |
| d. $\cos 150°$ | $\cos 45°$ |
| e. $\cos 780°$ | $\cos 150°$ |

## Definición de las funciones trigonométricas

### Ejercitación

**14** El lado terminal de un ángulo $\alpha$ coincide con la recta $y = -2x$ y se establece en el segundo cuadrante. Halla las seis funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

## Teorema del seno y teorema del coseno

### Resolución de Problemas

**15** Una torre inclinada 13,35° en sentido positivo con respecto a la vertical proyecta una sombra de 6,46 m cuando el ángulo de elevación del Sol con respecto a la horizontal es de 57°. Calcula la longitud de la torre. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

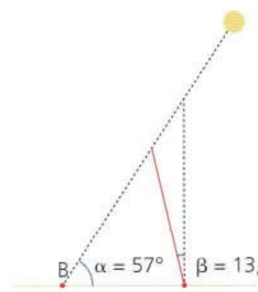
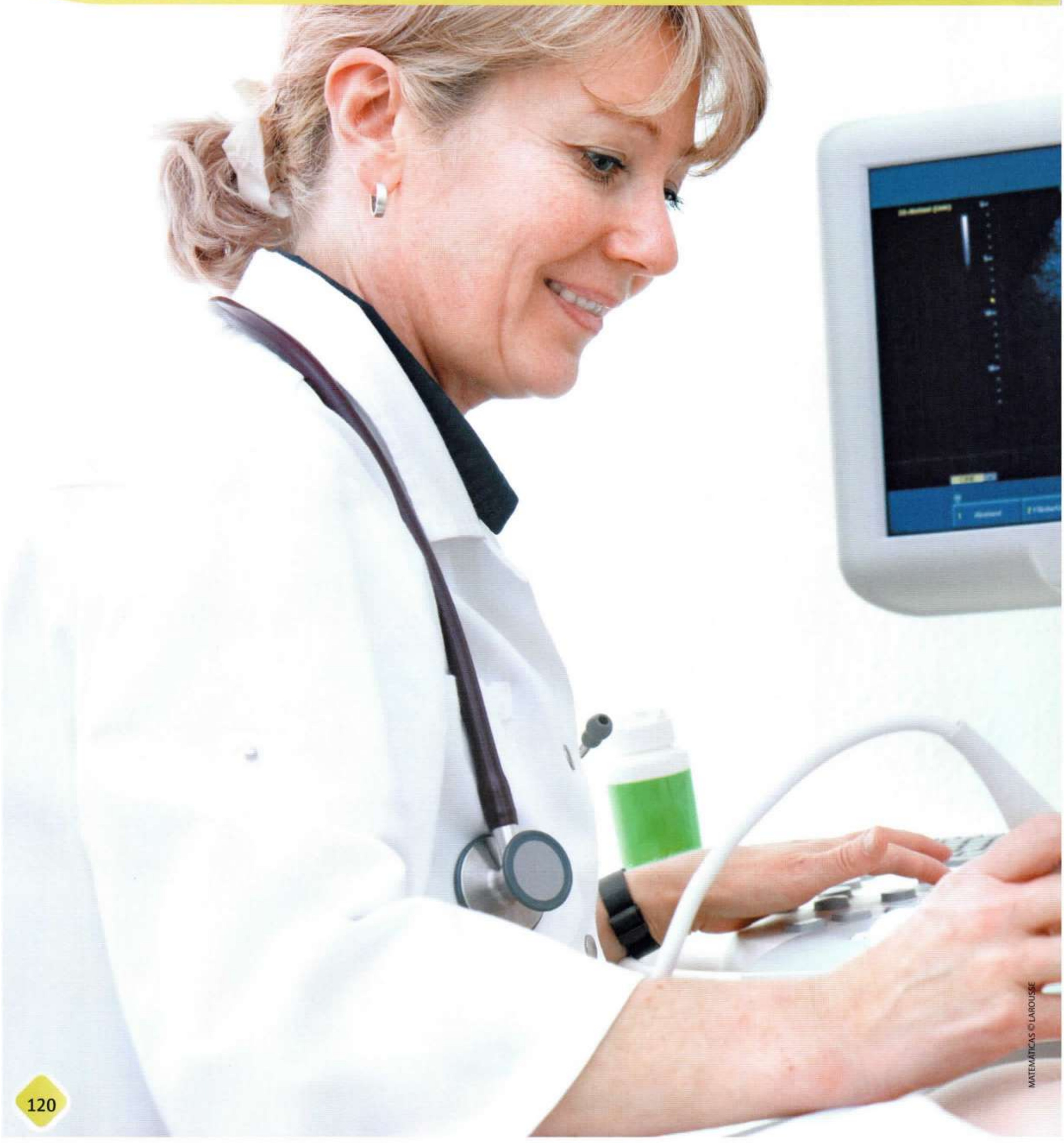


Figura 3.182

**16** Las medidas de un terreno triangular son 129,8 m, 107,8 m y 55,45 m. Calcula la medida del ángulo menor entre los lados del terreno.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Funciones e identidades trigonométricas



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ya sabemos

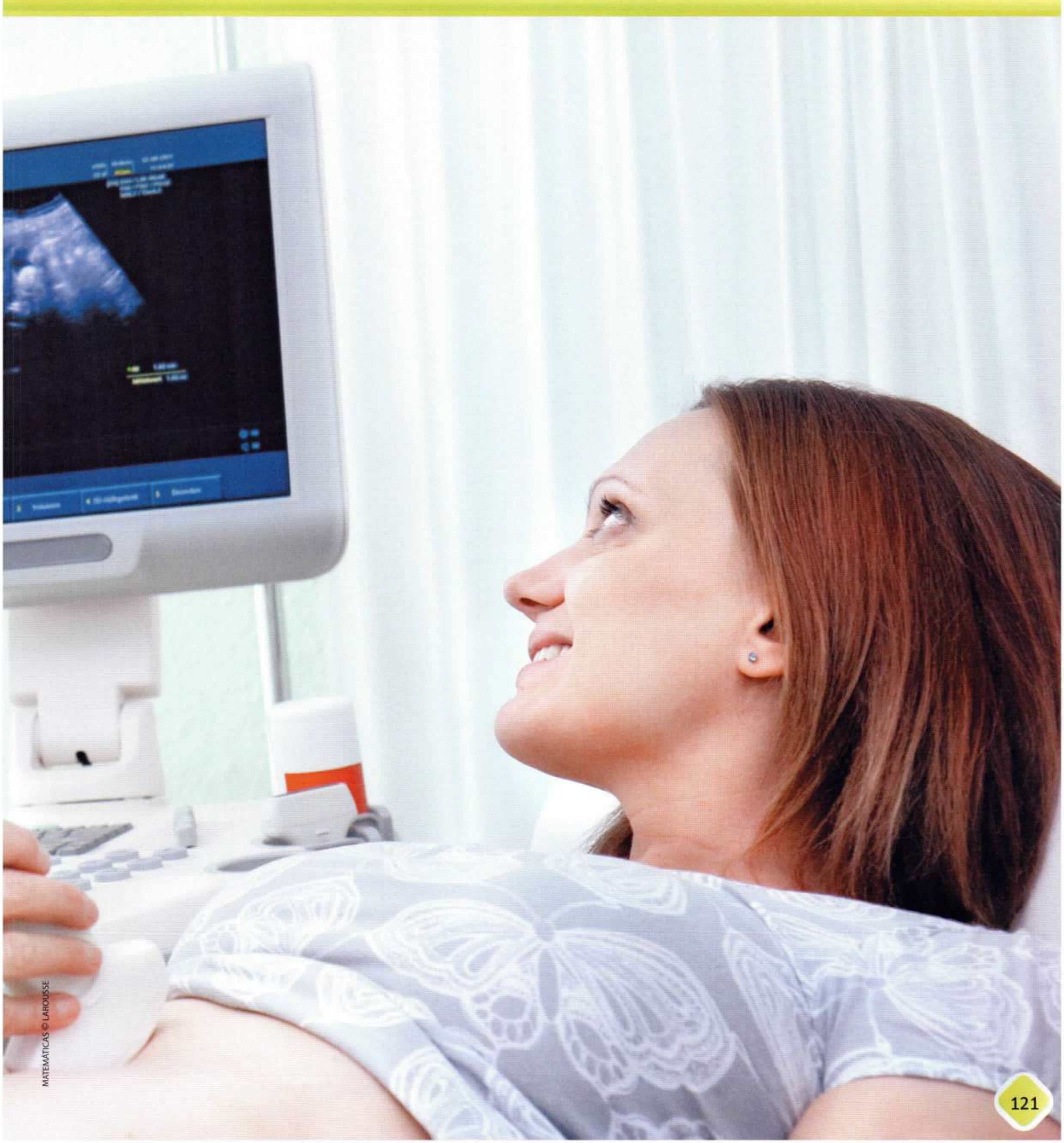
- Calcular las razones trigonométricas.
- Aplicar el teorema del seno y del coseno.

## Vamos a aprender

- A obtener la gráfica de las funciones trigonométricas a partir de sus características.

## Nos sirve para

- Solucionar situaciones que se modelen con las funciones sinusoidales.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Función seno

**Saberes previos**

En una oficina en Cartagena, se controla la temperatura con un ventilador electrónico inteligente. ¿Cómo crees que funcione este aparato?

**Analiza**

En la Figura 4.1 se presenta una circunferencia unitaria y un ángulo $\theta$.

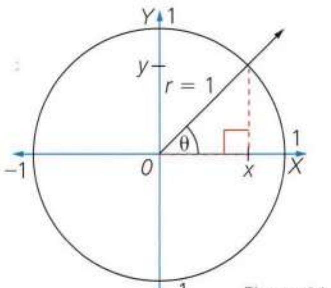



Figura 4.1

- ¿Cómo se obtienen las gráficas de las funciones trigonométricas a partir de esta circunferencia?

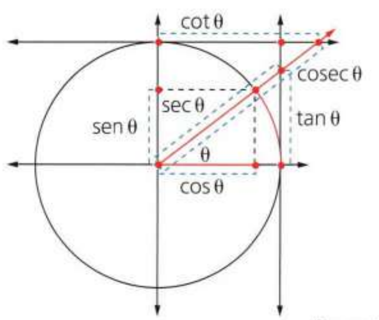



Figura 4.2

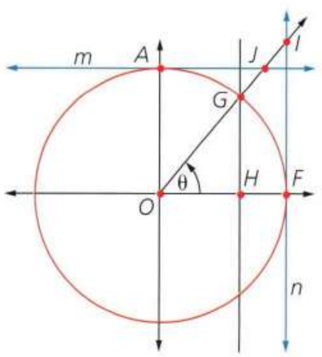



Figura 4.3

**Conoce**

## 1.1 Líneas trigonométricas

En la anterior unidad se definieron las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria. Con ayuda de esta, también es posible obtener el bosquejo de las gráficas de las funciones trigonométricas por medio de las **líneas trigonométricas**.

En la circunferencia unitaria de la Figura 4.3 se trazan las rectas $m$ y $n$ tangentes a la circunferencia en los puntos $A$ y $F$, respectivamente. Luego, se prolonga el radio hasta cortar las rectas $m$ y $n$ (puntos $J$ e $I$). Los triángulos $GOH$, $IOF$ y $AOJ$ son semejantes porque cumplen el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo al compartir las medidas de $\theta$ y el ángulo recto.

Por lo anterior, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{GH}}{1} = \overline{GH} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{\overline{IF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{IF}}{1} = \overline{IF} \qquad \cot\theta = \frac{\overline{AJ}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AJ}}{1} = \overline{AJ}$$

$$\sec\theta = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OI}}{1} = \overline{OI} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OJ}}{1} = \overline{OJ}$$

Las **líneas trigonométricas** de un ángulo en posición normal corresponden a los segmentos, donde su medida coincide con una de las razones trigonométricas tal como lo muestra la Figura 4.2.

## 1.2 Función seno

La variación del ángulo $\theta$ produce una variación en la medida de la línea trigonométrica seno (segmento $GH$ de la Figura 4.3). Al corresponder este hecho con la definición de función trigonométrica, se tiene que:

La **función seno**, denotada como $\boldsymbol{f(x) = \operatorname{sen} x}$ o $\boldsymbol{y = \operatorname{sen} x}$, asocia al número real $x$ el valor del seno de $x$ (si existe), para un ángulo de $x$ radianes.

Algunos valores relevantes de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, para $x$ en radianes y grados, se muestran en la Tabla 4.1.

| **x(rad)** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x(°)** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| **f(x)** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |

Tabla 4.1

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 1.3 Gráfica de la función seno

En una circunferencia unitaria se localizan los valores de algunos ángulos especiales. Luego en un plano cartesiano se construye la gráfica de la función seno en el intervalo $[0, 2\pi]$ trasladando la medida de las líneas trigonométricas correspondientes (valores sobre el eje $Y$) tal como muestra la Figura 4.4.

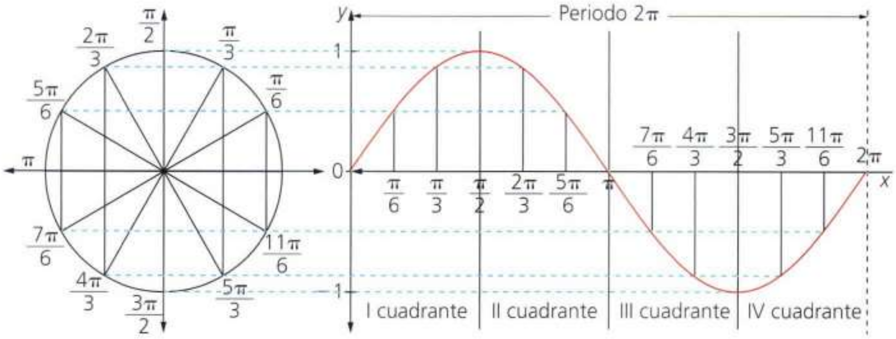



Figura 4.4

## 1.4 Características de la función seno

Con ayuda de la calculadora se obtienen rápidamente los valores de la función seno para otros intervalos (Figura 4.5).

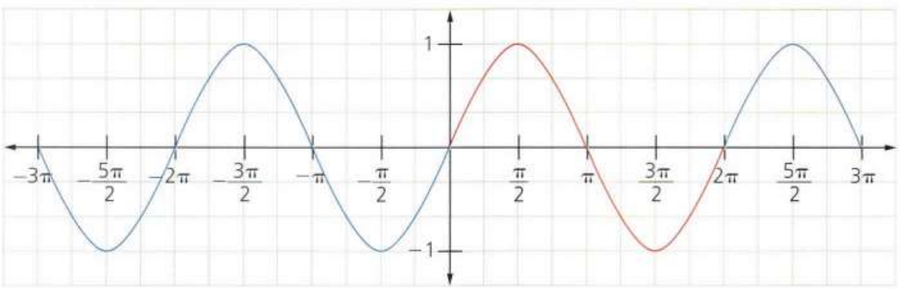



Figura 4.5

A partir de la gráfica de la función, se puede deducir que $y = \operatorname{sen} x$ tiene las siguientes características:

- El dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es el intervalo $[-1, 1]$.
- El periodo es $2\pi$, por tanto su estudio se puede realizar en el intervalo $[0, 2\pi]$ y después se extienden las características obtenidas a $\mathbb{R}$.
- El valor máximo es 1 y lo alcanza en $x = \frac{\pi}{2}$; el valor mínimo es $-1$ y lo alcanza en $x = \frac{3\pi}{2}$. Se dice, entonces, que la amplitud de la función es 1.
- Es continua en todo su dominio.
- Es simétrica con respecto al origen, ya que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.
- En el intervalo $[0, 2\pi]$, la función es creciente en los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Función seno

**Ejemplo 1**

Para la función $y = \operatorname{sen} x$ se verifica que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, pues, es una función periódica de periodo $T = 2\pi$.

**Ejemplo 2**

La Figura 4.6 muestra la gráfica sobre el comportamiento de la población de ranas en un estanque.

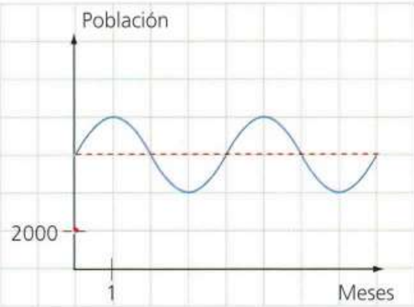


Figura 4.6

Al identificar aspectos relevantes de la gráfica, se tiene que:

**a.** La población máxima en el estanque es de 8 000 ranas, y se registra en el primer y el quinto mes.

**b.** La población mínima es de 4 000 ranas, y se registra en el tercer y en el séptimo mes.

**c.** La población inicial de ranas fue de 6 000.

**d.** El periodo de la función correspondiente al comportamiento de la población es de 4 meses.

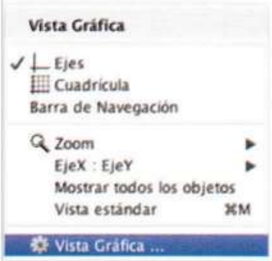
**e.** Durante el primer mes y del tercer al quinto mes la población crece. Del primer al tercer mes y del quinto al séptimo mes la población decrece.

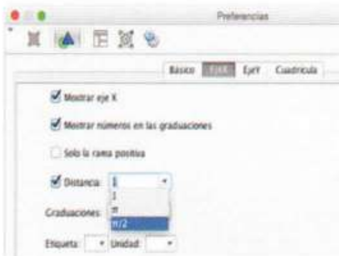
## MatemaTICS

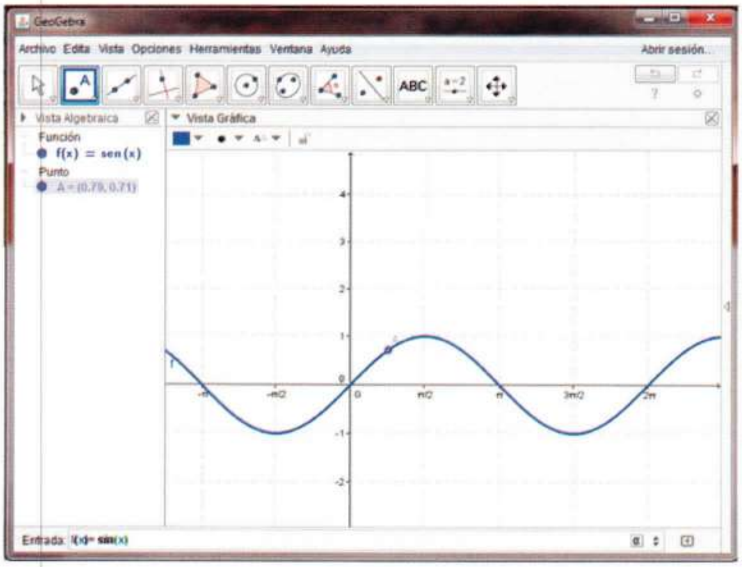
**Representa gráficamente la función seno en GeoGebra**

Para representar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en GeoGebra, sigue las instrucciones.

- Abre GeoGebra.
- Verifica que en la interfaz estén habilitadas las opciones *Vista Gráfica*, *Vista Algebraica* y *Entrada*; de lo contrario, habilítalas en el menú *Vista*.
- Escribe en *Entrada*: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y presiona *Enter*.
- Haz clic derecho con el mouse y selecciona *Vista Gráfica*.
- En la pestaña *Eje X*, habilita *Distancia* y selecciona la opción $\frac{\pi}{2}$. De esta manera se visualizará la numeración del eje $X$ en radianes.
- Ubica un punto $A$ sobre la gráfica. Mueve el punto y observa los valores $(x, y)$ de la función.




MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Identifica cuál es el signo de la función trigonométrica seno en cada cuadrante (Tabla 4.2). Justifica.

| Cuadrante | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| **Signo de sen $x$** | | | | |

Tabla 4.2

**2** Utiliza la calculadora para hallar el valor de la función seno de cada ángulo.

a. $f(45°)$ b. $f(-45°)$ c. $f(125°)$

d. $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ e. $f\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ f. $f\left(\frac{2\pi}{12}\right)$

**3** Identifica los valores de $x$ exactos o aproximados, según sea posible, en el intervalo $[0, 2\pi]$ para los cuales se cumple la igualdad. Explica en cuáles se tuvo que aproximar y por qué.

a. $\operatorname{sen} x = 0$ b. $\operatorname{sen} x = 0{,}2$

c. $\operatorname{sen} x = 0{,}5$ d. $\operatorname{sen} x = 0{,}8$

e. $\operatorname{sen} x = -0{,}5$ f. $\operatorname{sen} x = -0{,}9$

### Comunicación

**4** Representa la gráfica de la función $f(x) = -\operatorname{sen} x$. Indica las siguientes características.

a. Dominio y rango.

b. Periodo y amplitud.

c. Valores máximos y mínimos en el intervalo que define el periodo de la función.

d. Continuidad y simetría.

e. Intervalos crecientes y decrecientes en el intervalo que define el periodo.

**5** Completa la Tabla 4.3 para la función $y = 3\operatorname{sen} x$. Luego, represéntala gráficamente.

| $x$ | 0° | 90° | 135° | 180° | 270° | 315° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3sen $x$** | | | | | | | |

Tabla 4.3

### Resolución de problemas

**6** La Figura 4.7 muestra la gráfica del comportamiento de una población de peces durante un lapso de tiempo $t$ en un estanque.

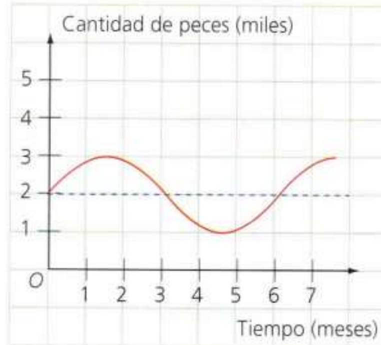



Figura 4.7

a. ¿Cuál es la cantidad mínima de peces en el estanque durante seis meses?

b. ¿Cuál es la cantidad máxima de peces en el estanque durante seis meses?

c. ¿Cada cuántos meses se repite la cantidad inicial de peces en el estanque?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Representa la gráfica de la función seno en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ en papel milimetrado. Utiliza valores representativos.

**ii** Realiza la gráfica de la función seno y trasládala según cada indicación.

a. Dos unidades arriba. b. Una unidad abajo.

## Estilos de vida saludable

Un electrocardiograma es un gráfico en el que se registra la actividad del corazón en función del tiempo. Estas representaciones siguen un patrón repetitivo. Dibuja en tu cuaderno un electrocardiograma y señala su periodo. ¿Tiene puntos máximos y mínimos? ¿Cómo puedes evitar enfermedades del corazón desde la juventud?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Función coseno

## Saberes previos

En algunos países con estaciones el día más largo es el 21 de junio con 15,7 horas de luz y el más corto, es el 21 de diciembre con solo 8,3 horas de luz. Imagina y traza una gráfica que relacione los días del año con la cantidad de horas de luz.

## Analiza

Observa la Figura 4.8 y responde.

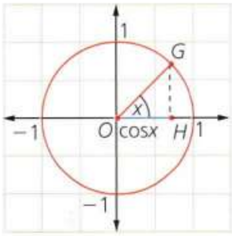



Figura 4.8

- ¿Cómo es el comportamiento de la función coseno en cada cuadrante de la circunferencia unitaria?

## Conoce

La variación del ángulo $x$ produce una variación de la medida de la línea trigonométrica coseno (segmento $OH$ de la Figura 4.8).

Para un ángulo $x$ situado en la circunferencia unitaria, se tiene que:

1. Del primer al segundo cuadrante, a medida que el valor del ángulo $x$ aumenta el valor del coseno disminuye de 1 a $-1$ (Figura 4.9).
2. Del tercer al cuarto cuadrante, a medida que el valor del ángulo $x$ aumenta el valor del coseno aumenta de $-1$ a 1 (Figura 4.10).

La **función coseno** se denota por $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$ o $\boldsymbol{y = \cos x}$. Esta asocia al número real $x$ el valor del coseno de $x$ (si existe), para un ángulo de $x$ radianes.

Algunos valores relevantes de la función $f(x) = \cos x$, para $x$ en radianes y grados, se muestran en la Tabla 4.4.

| **x(rad)** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x(°)** | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| **f(x)** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Tabla 4.4

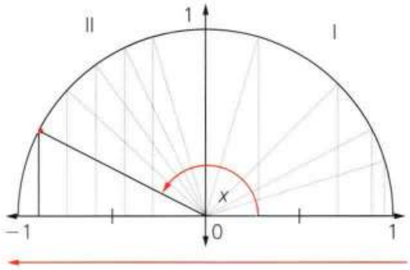



Figura 4.9

## 2.1 Gráfica de la función coseno

De manera similar a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, en una circunferencia unitaria se localizan los valores de algunos ángulos especiales. Luego se construye la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$ en un plano cartesiano trasladando la medida de las líneas trigonométricas correspondientes al coseno tal como muestra la Figura 4.11. Los valores sobre el eje $X$ corresponden con algunos de la Tabla 4.4.

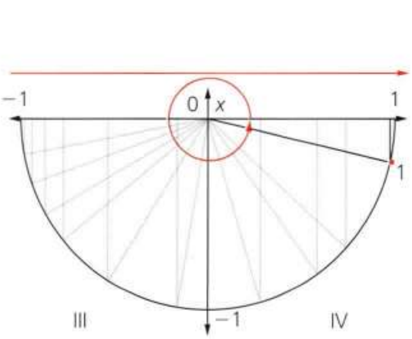



Figura 4.10

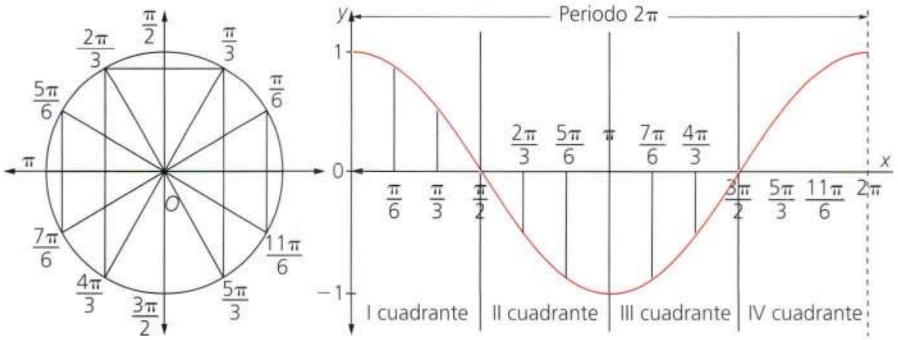



Figura 4.11

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 2.2 Características de la función coseno

Con ayuda de la calculadora se obtienen rápidamente los valores de la función coseno para otros intervalos (Figura 4.12).

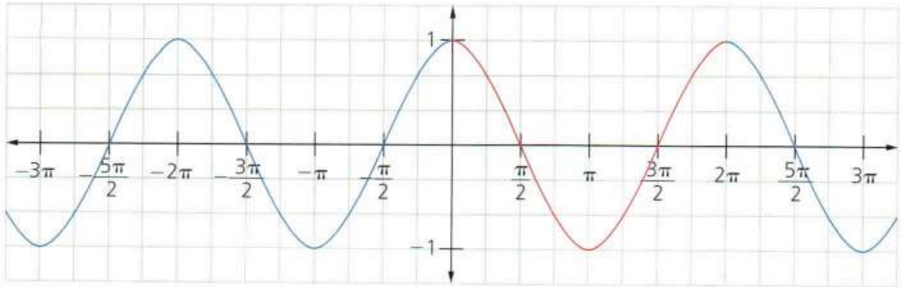



Figura 4.12

De acuerdo con la gráfica, la función $y = \cos x$ tiene las siguientes características:

- El dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica y su periodo es $2\pi$. Por lo tanto su estudio se puede realizar en el intervalo $[0, 2\pi]$ y después se extienden las características obtenidas a $\mathbb{R}$.
- El valor máximo es 1 y lo alcanza en $x = 0$ y en $x = 2\pi$; el valor mínimo es $-1$ y lo alcanza en $x = \pi$. Luego, la amplitud de la función es 1.
- Es continua en todo su dominio.
- Es simétrica con respecto al eje de ordenadas, ya que $\cos(-x) = \cos x$.
- En el intervalo $[0, 2\pi]$, la función es creciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ y decreciente en el intervalo $(0, \pi)$.

**Ejemplo 1**

Al representar las funciones $y = \cos x$ y $y = -\cos x$ en el mismo sistema de coordenadas, se obtiene la gráfica de la Figura 4.13.

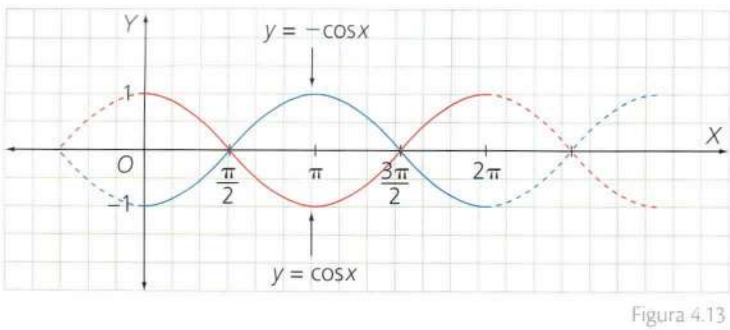



Figura 4.13

Las funciones tienen igual dominio, recorrido, periodo y amplitud, pero la función $y = -\cos x$ alcanza el valor máximo en $x = \pi$ y el mínimo en $x = 0$ y en $x = 2\pi$; además, es creciente en el intervalo $[0, \pi]$ y decreciente en $[\pi, 2\pi]$. Por lo tanto, $y = -\cos x$ es el reflejo de $y = \cos x$ con respecto al eje $X$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Función coseno

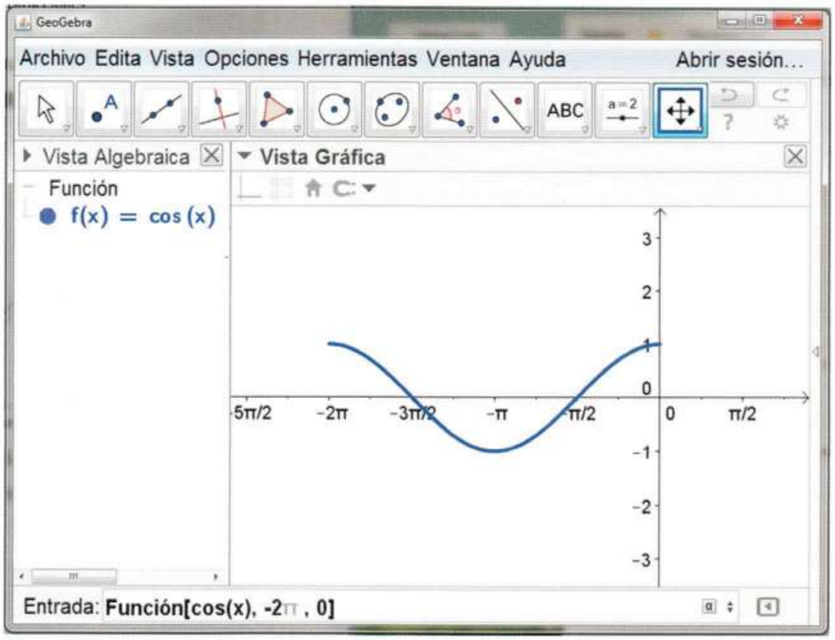
## MatemaTICS

**Representa gráficamente la función coseno en el intervalo $[-2\pi, 0]$ en GeoGebra**

Sigue las instrucciones para representar la función $f(x) = \cos x$ en GeoGebra en el intervalo $[-2\pi, 0]$.

- Abre GeoGebra.
- Verifica que en la interfaz estén habilitadas las opciones *Vista gráfica*, *Vista Algebraica* y *Entrada*. De lo contrario, habilítalas en el menú *Vista*.
- Cambia la numeración del eje $X$ a radianes, según lo visto en la sección anterior.
- Escribe en *Entrada*:

  Función[cos $(x)$, $-2\pi$, 0].
- Utiliza [icono] para acomodar la pantalla al intervalo deseado.




## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1. Identifica cuál es el signo de la función trigonométrica coseno en cada cuadrante (Tabla 4.5). Justifica.

| Cuadrante | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $\cos x$ | | | | |

Tabla 4.5

2. Utiliza la calculadora para hallar el valor de la función coseno en cada ángulo.

   a. $f(45°)$ b. $f(-45°)$

   c. $f(125°)$ d. $f(235°)$

   e. $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ f. $f\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

### Comunicación

3. Representa la gráfica de la función coseno en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ en papel milimetrado. Utiliza valores representativos.

4. Representa la gráfica de la función $f(x) = -\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Indica las siguientes características.

   a. Dominio y rango.

   b. Periodo y amplitud.

   c. Valores máximos y mínimos.

   d. Continuidad y simetría.

   e. Intervalos crecientes y decrecientes.

### Razonamiento

5. Construye en el mismo sistema de coordenadas y en el intervalo $[0, 2\pi]$ las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y de $y = \cos x$. Luego, contesta las preguntas.

   a. ¿Para qué valores de $x$ coinciden los valores de estas funciones?

   b. ¿Cuántas unidades se debe desplazar la gráfica de $\operatorname{sen} x$ para que coincida con la gráfica de $\cos x$? Explica.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**6** Observa la gráfica de la función coseno e identifica los valores exactos o aproximados de $x$, según sea posible, para los cuales se cumple cada igualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a. $\cos x = 0$

b. $\cos x = 0{,}2$

c. $\cos x = 0{,}5$

d. $\cos x = 0{,}8$

e. $\cos x = -0{,}5$

f. $\cos x = -0{,}9$

## Comunicación

**7** Lee y responde.

a. La gráfica de la función coseno puede obtenerse a partir de la del seno mediante una traslación. ¿Cuál es la magnitud y sentido de la traslación?

b. La gráfica de la función seno puede obtenerse a partir de la del coseno mediante una traslación. ¿Cuál es la magnitud y sentido de la traslación?

**8** Describe las diferencias entre las dos gráficas de la Figura 4.14. Utiliza las características de cada una de ellas.

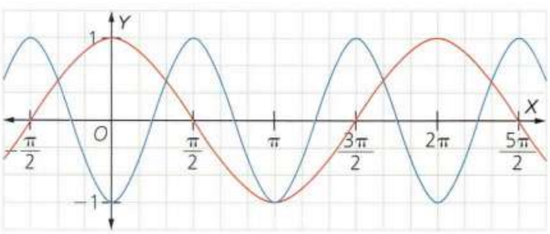



Figura 4.14

## Razonamiento

**9** Contesta las siguientes preguntas sin necesidad de representar las funciones. Justifica.

a. ¿Son iguales las gráficas de las funciones $y = \cos 2x$ y $y = \cos(-2x)$?

b. ¿Son iguales las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = \operatorname{sen}(-2x)$?

## Modelación

**10** Utiliza GeoGebra para representar las siguientes funciones en los intervalos dados.

a. $f(x) = \cos x$, para $x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

b. $f(x) = \cos x$, para $x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

c. $f(x) = \cos x$, para $x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

## Resolución de problemas

**11** La Figura 4.15 muestra el proceso rítmico de la respiración de un roedor durante un tiempo $t$ en segundos.

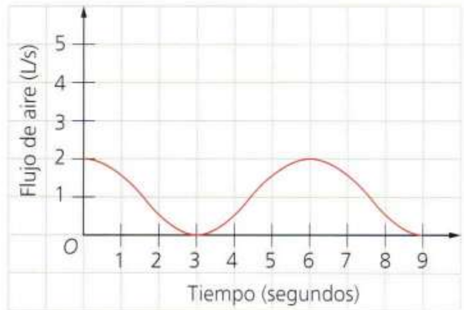



Figura 4.15

a. ¿Cada cuánto se lleva a cabo un ciclo de respiración del roedor?

b. ¿Cuál es la capacidad máxima y la capacidad mínima de aire que tiene el roedor?

## Evaluación del aprendizaje

Representa gráficamente la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. Luego, señala

a. el dominio y el recorrido de la función.

b. los intervalos donde es creciente la función.

c. los intervalos donde es decreciente la función.

d. los valores máximos y mínimos de la función.

e. los puntos de corte con el eje $X$ y con el eje $Y$.

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

La función $f(x) = 10\,000 \cos x$ modela la variación de las acciones de una empresa en los primeros 5 años. Si $x$ representa el tiempo en años y $f(x)$ el dinero en miles de pesos, ¿en qué año se obtuvo la mayor ganancia? ¿Qué estereotipos están asociados a las personas que negocian con acciones? ¿Estás de acuerdo con ellos?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Gráficas de las funciones sinusoidales

**Saberes previos**

¿Qué características comparten las funciones seno y coseno? Explica.

**Analiza**

Es posible obtener funciones a partir de otras conocidas.

- ¿Qué transformaciones se pueden realizar a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ para obtener otras funciones?

**Conoce**

A partir de las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ se pueden obtener las gráficas de otras más complejas, llamadas **funciones sinusoidales**. Para ello, se aplican transformaciones tales como dilataciones, contracciones, traslaciones y reflexiones sobre los ejes.

Las **funciones sinusoidales** son de la forma:

$$y = A\operatorname{sen} \omega(x - \phi) + B \text{ o } y = A\cos \omega(x - \phi) + B$$

Las características de las funciones sinusoidales son : amplitud ($A$), periodo ($T$), desfase ($\phi$) y desplazamiento vertical ($B$).

## 3.1 Amplitud ($A$)

Si $|A| > 1$, la gráfica se dilata verticalmente respecto a la gráfica inicial. Si $|A| < 1$, la gráfica se contrae verticalmente respecto a la gráfica inicial.

En las figuras 4.16 y 4.17 se observan dos ejemplos de funciones en las que se varía la amplitud de la función seno y de la función coseno, respectivamente.

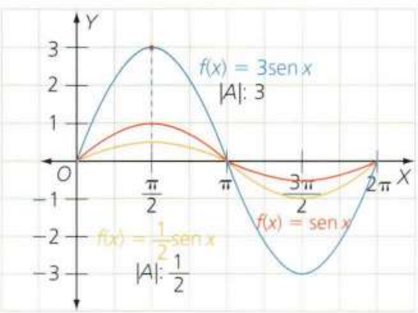



Figura 4.16

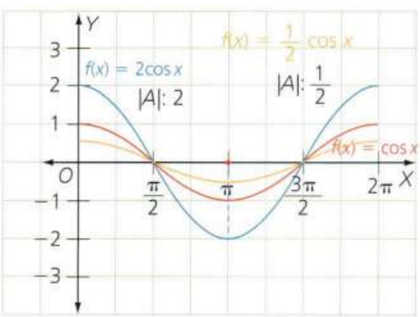



Figura 4.17

## 3.2 Periodo ($T$)

Si $|\omega| > 1$, la gráfica se contrae horizontalmente respecto a la gráfica inicial. Si $|\omega| < 1$, la gráfica se dilata horizontalmente respecto a la gráfica inicial. Para determinar el periodo de una función sinusoidal se utiliza la expresión $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$. La Figura 4.18 muestra dos ejemplos de funciones en las que se varía el periodo de la función coseno.

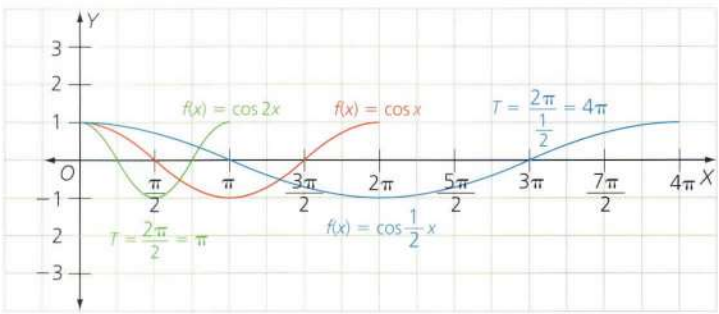



Figura 4.18

## 3.3 Desfase ($\phi$)

Es el desplazamiento horizontal. Si $\phi > 0$, el desplazamiento es de $\phi$ unidades a la derecha. Si $\phi < 0$, el desplazamiento es de $|\phi|$ unidades a la izquierda.

La Figura 4.19 muestra dos ejemplos de desfase de la función $\operatorname{sen} x$.

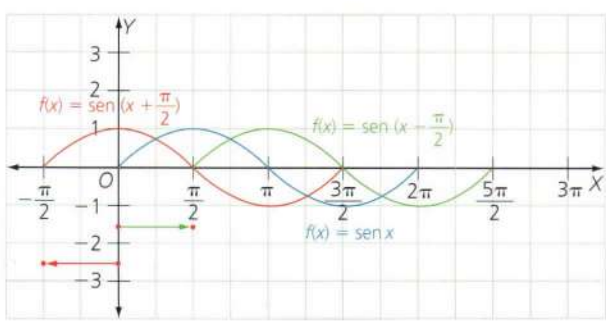



Figura 4.19



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 3.4 Desplazamiento vertical (*B*)

Si $B > 0$, el desplazamiento es de $B$ unidades hacia arriba. Si $B < 0$, el desplazamiento es de $|B|$ unidades hacia abajo.

En las figuras 4.20 y 4.21 se muestran dos ejemplos de funciones que presentan un desplazamiento vertical de la función seno.

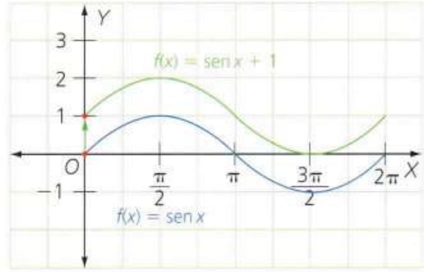



Figura 4.20

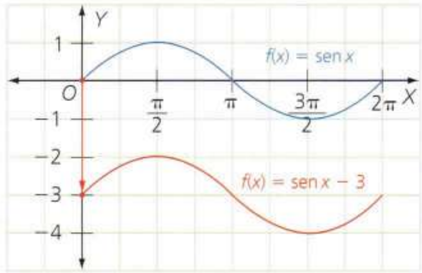



Figura 4.21

**Ejemplo 1**

Observa el procedimiento para obtener la gráfica de la función sinusoidal $f(x) = 5\text{sen}\, 2(x - \pi) + 4$.

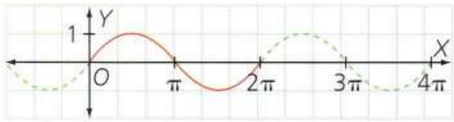


Figura 4.22

Se parte de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ en $[0, 2\pi]$ (Figura 4.22).

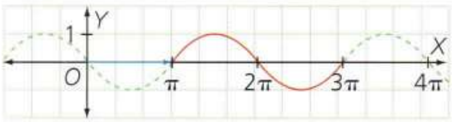


Figura 4.23

Como el desfase de la función es $\pi$ y $\pi > 0$, la gráfica se traslada horizontalmente a la derecha $\pi$ unidades y se obtiene la gráfica $f(x) = \text{sen}\,(x - \pi)$ (Figura 4.23).

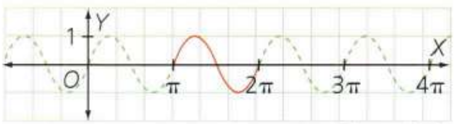


Figura 4.24

Como $\omega = 2$, el periodo de esta función es $\pi$. Por lo tanto, la gráfica se contrae horizontalmente a la mitad y se obtiene la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, 2(x - \pi)$ (Figura 4.24).

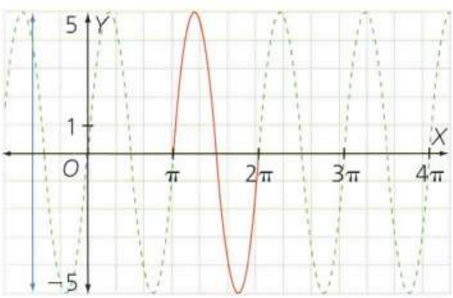


Figura 4.25

Como $A = 5$, la gráfica se dilata verticalmente y se obtiene la gráfica de $f(x) = 5\text{sen}\, 2(x - \pi)$ (Figura 4.25).

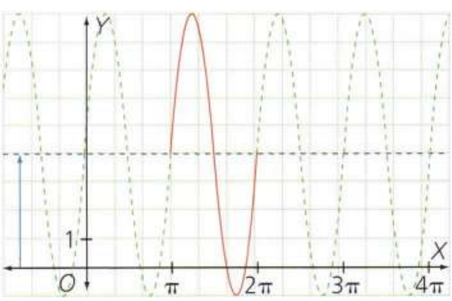


Figura 4.26

Como $B = 4$, la gráfica se traslada verticalmente cuatro unidades hacia arriba y se obtiene la gráfica de $f(x) = 5\text{sen}\, 2(x - \pi) + 4$ (Figura 4.26).

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

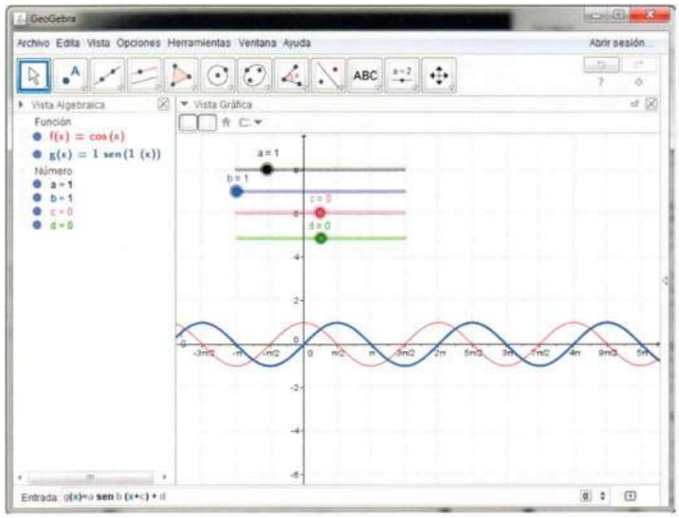
# 3 Gráficas de las funciones sinusoidales

## MatemaTICS

**Representa gráficamente las funciones sinusoidales en GeoGebra con deslizadores**

Para representar la función $f(x) = a\,\text{sen}\,b(x + c) + d$ en GeoGebra, sigue estas instrucciones.

- Abre GeoGebra. Verifica que en la interfaz estén habilitadas las opciones *Vista gráfica*, *Vista Algebraica* y *Entrada*; de lo contrario, habilítalas en el menú *Vista*.
- Cambia la numeración del eje $X$ a radianes.
- En la barra *Entrada* escribe la función $f(x) = \text{sen}\,x$.
- Construye deslizadores con la herramienta  y las siguientes condiciones.
  - Deslizador $a$:
    Mín: 0.1 Máx: 5 Incremento: 0.1
  - Deslizador $b$:
    Mín: 1 Máx: 5 Incremento: 0.1
  - Deslizador $c$:
    Mín: -5 Máx: 5 Incremento: 0.1
  - Deslizador $d$:
    Mín: -5 Máx: 5 Incremento: 0.1




- En *Entrada* escribe la función: $g(x) = a\,\text{sen}\,b\,(x + c) + d$.
- Mueve los deslizadores analizando la transformación sobre la función seno.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Halla la amplitud, el periodo, el desfase y los desplazamientos vertical y horizontal de cada función; luego, represéntala.

a. $y = -\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

b. $y = -3\,\text{sen}\,(3x - \pi) + 1$

c. $y = -3\cos(x + 2)$

d. $y = -\text{sen}\,x + 3$

### Comunicación

**2** Determina la amplitud, el periodo, el valor máximo y el valor mínimo de la función de la Figura 4.27.

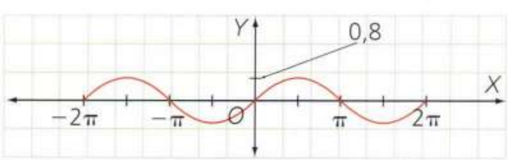



Figura 4.27

### Razonamiento

**3** Estudia los dominios y los recorridos de las siguientes funciones; después, ayudándote de la calculadora, estudia sus gráficas y sus periodos.

a. $y = \text{sen}\,(3x)$

b. $y = \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

c. $y = 5\cos x$

d. $y = 2 + 4\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$

**4** Representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas. Para ello, estudia su dominio, su recorrido y su periodo.

a. $y = -\text{sen}\,(3x)$

b. $y = 5\,\text{sen}\,x$

c. $y = \cos(2x)$

d. $y = 2 + 3\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**5** Utiliza la calculadora y representa las gráficas de las siguientes funciones.

a. $y = \operatorname{sen} x + 2$  b. $y = \operatorname{sen}(x + 2)$

c. $y = -\operatorname{sen} x$  d. $y = 2\operatorname{sen} x$

e. $y = \operatorname{sen} x - 2$  f. $y = \operatorname{sen}(x - 2)$

g. $y = \operatorname{sen}(-x)$  h. $y = \operatorname{sen}(2x)$

A continuación, indica cuál es el desplazamiento u operación que transforma la función $y = \operatorname{sen} x$ en cada una de las anteriores.

**6** Escribe una ecuación de la forma $y = A\operatorname{sen}\omega(x - \phi) + B$ o $y = A\cos\omega(x - \phi) + B$ que verifique las condiciones representadas en la gráfica de la Figura 4.28.

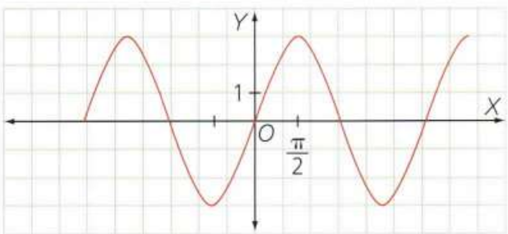



Figura 4.28

## Resolución de problemas

**7** Para simular la variación de la temperatura se usan funciones trigonométricas de la forma $y = a + b\operatorname{sen}\omega(t - t_0)$, donde $a, b, t_0, \omega$ son números reales. Por ejemplo, la ecuación mediante la cual se puede determinar la temperatura en grados Celsius de un lugar $F$, $t$ horas después de la medianoche de cierto día, es:

$$F(t) = 23 + 7\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 8)\right] \quad 0 \leq t \leq 24$$

a. ¿Cuál es la temperatura a las 8 a. m.?

b. ¿A qué hora la temperatura es 23 °C?

c. Representa gráficamente la función $F$.

d. ¿Cuáles son las temperaturas máximas? ¿A qué hora se registran?

e. ¿Cuál es la amplitud, el periodo y el desfase de la función $F(t)$?

**8** Para un péndulo que oscila de la vertical en un tiempo $t$ (en segundos), el desplazamiento angular $\theta$ se calcula mediante la expresión $\theta = \theta_0 \cos wt$, en la cual $\theta_0$ es el desplazamiento inicial en $t = 0$ s (Figura 4.29).

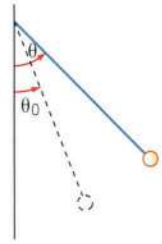



Figura 4.29

Elabora la gráfica de la función resultante para $w = 3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ en el intervalo $[0, \pi]$.

## Evaluación del aprendizaje

**i** Escribe una ecuación de la forma $y = A\operatorname{sen}\omega(x - \phi) + B$ o $y = A\cos\omega(x - \phi) + B$ que verifique las condiciones representadas en la gráfica de la Figura 4.30.

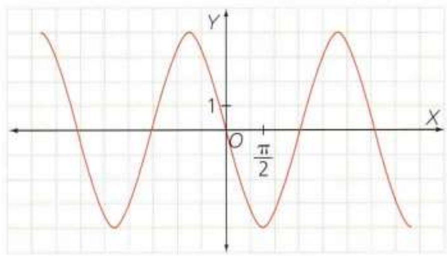



Figura 4.30

**ii** Indica qué transformaciones hay que aplicar a la función coseno para convertirla en la función $y = 4 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ y traza su gráfica.

## Educación ambiental

El uso de la función sinusoidal ayuda a medir la actividad de las olas marinas, lo que ha contribuido en parte a determinar los efectos del calentamiento global. Consulta de qué manera se usa la función sinusoidal para medir este fenómeno meteorológico. ¿Cómo puedes evitar el calentamiento global?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Función tangente

**Saberes previos**

Si se define $f(x) = \frac{3}{x}$, ¿existe $f(0)$? Explica.

**Analiza**

Observa la Figura 4.31.

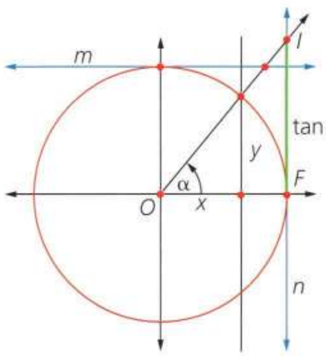



Figura 4.31

- ¿Para cuáles valores de $\alpha$ la función tangente no está definida?

**Conoce**

Al utilizar la definición de la función tangente a partir de la circunferencia unitaria y relacionándola con las funciones seno y coseno, se obtiene que:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

De la expresión anterior se puede deducir que la función tangente no está definida para los ángulos $\alpha$ donde $\cos\alpha = 0$. Algunos ángulos donde el coseno toma el valor cero son $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$; por tal razón, la función tangente no está definida para estos ángulos y muchos otros.

De manera general, la función tangente no está definida para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k$ entero.

La función que asocia al número real $x$ el valor de la tangente del ángulo $x$, medido en radianes, se denomina **función tangente** y se denota por:

$$f(x) = \tan x \text{ o } y = \tan x$$

Algunos valores relevantes de la función $f(x) = \tan x$, para $x$ en radianes y grados, se muestran en la Tabla 4.6.

| Tabla de valores de $y = \tan x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ (grados) | $x$ (radianes) | $\tan x$ |
| 0° | 0 | 0 |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | 0,58 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | 1,73 |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | N.D. |
| 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | −1,73 |
| 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | −0,58 |
| 180° | $\pi$ | 0 |
| 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | 0,58 |
| 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | 1,73 |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | N.D. |
| 300° | $\frac{5\pi}{3}$ | −1,73 |
| 330° | $\frac{11\pi}{6}$ | −0,58 |
| 360° | $2\pi$ | 0 |

Tabla 4.6

## 4.1 Gráfica de la función tangente

La función $f(x) = \tan x$ se construye en el intervalo $[0, 2\pi]$ en un plano cartesiano trasladando la medida de las líneas trigonométricas correspondientes a la tangente tal como se muestra en la Figura 4.32.

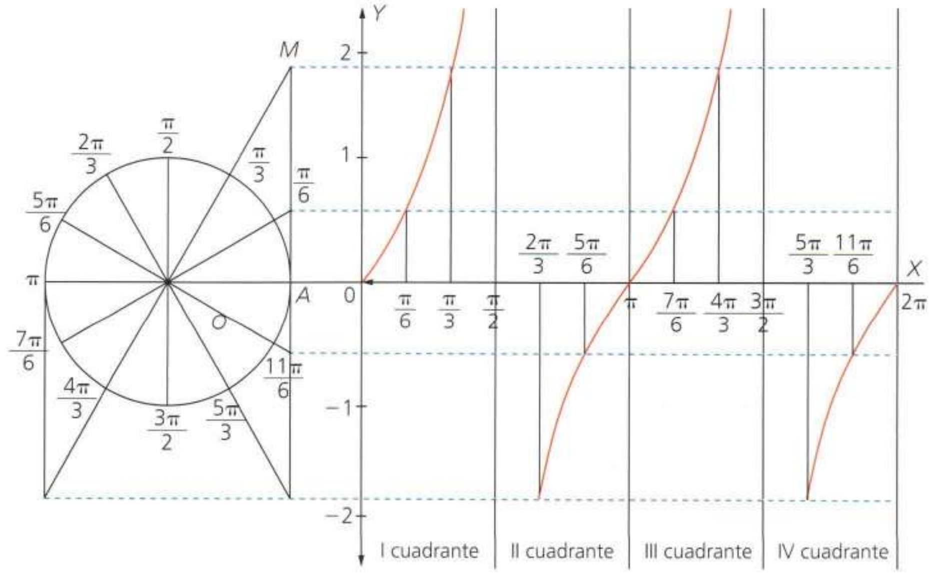



Figura 4.32

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 4.2 Características de la función tangente

Las características de la función $y = \tan x$ son las siguientes:

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entero}\right\}$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.
- Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k$ entero, son asíntotas verticales.
- Es periódica. El periodo es $T = \pi$, ya que se verifica que $\tan(x + \pi) = \tan x$.
- Es continua en todo su dominio y simétrica con respecto al origen.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio; por lo tanto, no tiene máximos ni mínimos.

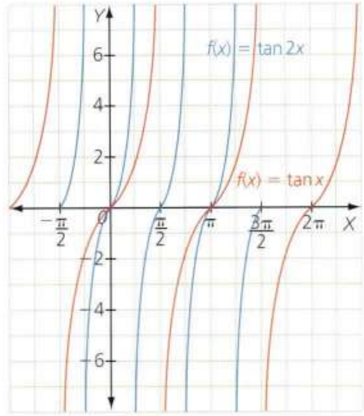


Figura 4.33

## 4.3 Funciones de la forma $f(x) = A\tan\omega(x - \phi) + B$

En las funciones de la forma $y = A\tan\omega(x - \phi) + B$ se identifican:

- **Periodo ($T$).** Si $|\omega| > 1$, la gráfica se contrae horizontalmente respecto a la gráfica de $y = \tan x$. Si $|\omega| < 1$, la gráfica se dilata horizontalmente respecto a la gráfica de $y = \tan x$. Para determinar el periodo se utiliza la expresión $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.
  La Figura 4.33 muestra la gráfica de $f(x) = \tan 2x$, con $T = \frac{\pi}{2}$.
- **Desfase ($\phi$).** Si $\phi > 0$, el desplazamiento es de $\phi$ unidades a la derecha. Si $\phi < 0$, el desplazamiento es de $|\phi|$ unidades a la izquierda.
  La Figura 4.34 muestra la gráfica de $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, con desfase $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

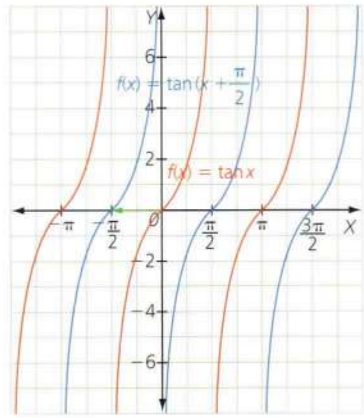


Figura 4.34

- **Desplazamiento vertical ($B$).** Si $B > 0$, el desplazamiento es de $B$ unidades hacia arriba. Si $B < 0$, el desplazamiento es de $|B|$ unidades hacia abajo.
  La Figura 4.35 muestra la gráfica de la función $f(x) = \tan(x) + 2$, con desplazamiento vertical de 2 unidades arriba.

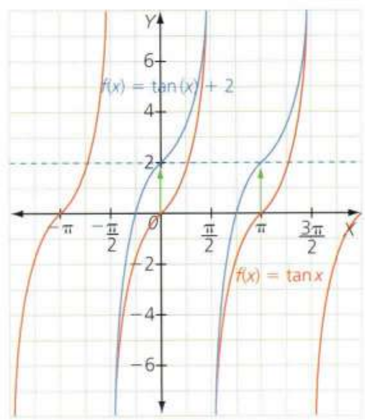


Figura 4.35

**Ejemplo 1**

La función $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ se expresa de la forma $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, por tanto $\omega = 2$ y $\phi = \frac{\pi}{4}$. Entonces, $T = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ y el desfase es de $\frac{\pi}{4}$ unidades a la derecha. La gráfica de la función se observa en la Figura 4.36.

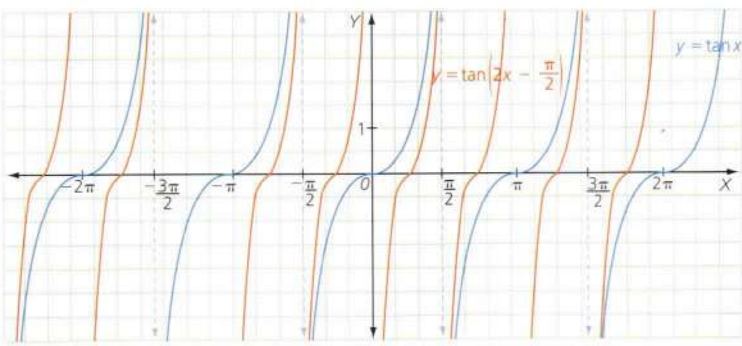


Figura 4.36

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

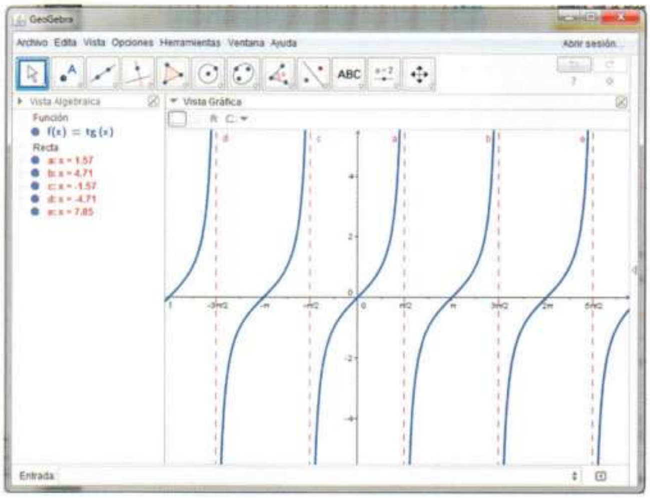
# 4 Función tangente

## MatemaTICS

**Representa las asíntotas de la función tangente en GeoGebra**

Las asíntotas de la función tangente son las rectas verticales que pasan por los puntos $x$ donde no está definida la función. Para representar las asíntotas, identifica los valores $x$ para los cuales no está definida la función y sigue las instrucciones.

- Abre GeoGebra. Verifica que en la interfaz estén habilitadas las opciones *Vista gráfica*, *Vista Algebraica* y *Entrada*. De lo contrario, habilítalas en el menú *Vista*.
- Cambia la numeración del eje $X$ a radianes.
- En la barra *Entrada* escribe la función $f(x) = \tan x$.
- Identifica los valores para los cuales no está definida la función, por ejemplo, $\frac{\pi}{2}$.
- En la barra *Entrada* escribe: $x = \frac{\pi}{2}$.
- Identifica otros valores y completa las asíntotas para el intervalo de $[-2\pi, 2\pi]$.




## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Identifica cuál es el signo de la función trigonométrica tangente en cada cuadrante (Tabla 4.7). Justifica.

| Cuadrante | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $\tan x$ | | | | |

Tabla 4.7

**2** ¿En cuáles de los siguientes ángulos no está definida la función tangente? Utiliza la calculadora.

a. $f(450°)$ b. $f(-450°)$ c. $f(180°)$

d. $f(235°)$ e. $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ f. $f\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

### Comunicación

**3** Representa la gráfica de la función $f(x) = -\tan x$. Señala las siguientes características.

a. Dominio y rango.

b. Periodo y amplitud.

c. Valores máximos y mínimos.

d. Continuidad y simetría.

### Razonamiento

**4** Identifica las características de estas funciones y elabora la gráfica.

a. $y = -\tan(x + \pi)$ b. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ d. $y = -\tan\left(3x - \frac{7}{2}\right)$

**5** Determina el periodo, el desfase y el desplazamiento vertical de las siguientes funciones.

a. $y = -\tan 2x$ b. $y = \tan(3x - \pi)$

c. $y = 2\tan \frac{1}{2}x$ d. $y = \tan 3x + 4$

e. $y = \tan(3x + \pi) - 2$ f. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

### Comunicación

**6** Represента la gráfica de la función $f(x)$ en cada caso a partir de la función $y = \tan x$.

a. Periodo $2\pi$.

b. Periodo $2\pi$, desfase $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.

c. Periodo $2\pi$, desfase $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda, desplazamiento vertical 2 unidades abajo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### Razonamiento

**7** Observa y resuelve. En la Figura 4.37 se muestran las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \tan 2x$, y en la Figura 4.38, las de $y = \tan x$ y $y = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

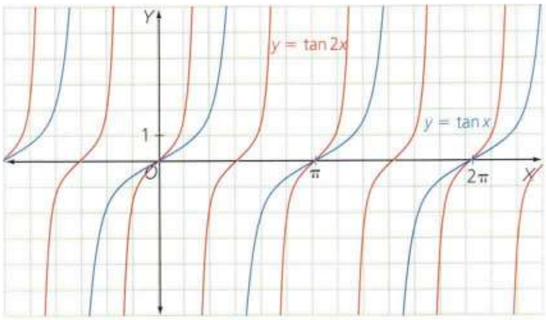



Figura 4.37

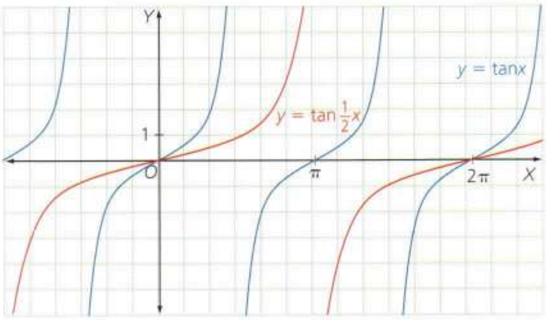



Figura 4.38

a. ¿Cómo es el periodo de $y = \tan 2x$ con respecto al de $y = \tan x$?

b. ¿Cómo es el periodo de $y = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ con respecto al de $y = \tan x$?

c. Haz una conjetura acerca de cómo varía el periodo de las funciones de la forma $y = \tan kx$ con relación al de $y = \tan x$, cuando $k$ es un número real positivo. Considera los casos $0 < k < 1$ y $k > 1$.

**8** ¿Qué transformación sufre la gráfica de la función $y = -\tan x$ con relación a la de $y = \tan x$?

**9** Encuentra una expresión general que determine los valores de los ángulos para los cuales $\tan x = 0$.

**10** Encuentra una expresión general que determine los valores de los ángulos para los cuales $\tan x = \sqrt{3}$.

### Modelación

**11** Determina la expresión de la función de color azul a partir de la función de color rojo $y = \tan x$.

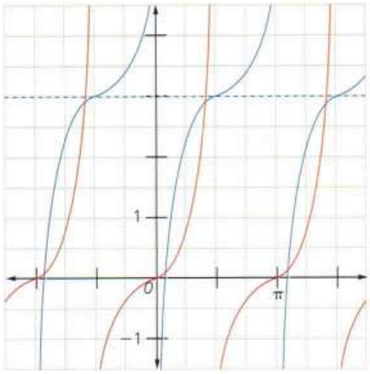



Figura 4.39

## Evaluación del aprendizaje

Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

$f(x) = -\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 3$

$f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 3$

$f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 1$

$f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

a.

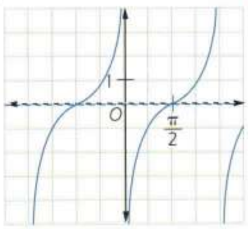



Figura 4.40

b.

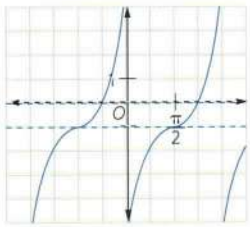



Figura 4.41

c.

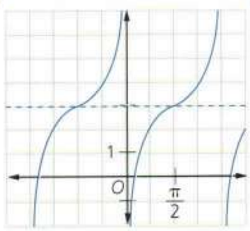



Figura 4.42

d.

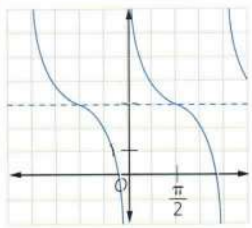



Figura 4.43

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Función cotangente

## Saberes previos

¿Para qué valores de $x$, $\operatorname{sen} x = 0$?

## Analiza

Observa la Figura 4.44.

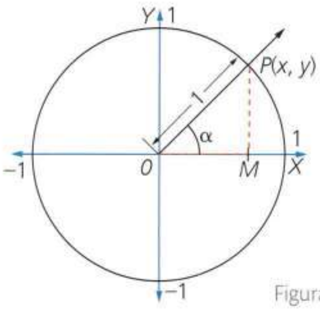



Figura 4.44

- ¿Cuál es el signo de los valores de la función cotangente en cada cuadrante?

## Conoce

Al utilizar la definición de la función cotangente a partir de la circunferencia unitaria y relacionándola con las funciones seno y coseno, se obtiene que:

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

En la Figura 4.45 se observa la anterior relación y el signo de las funciones seno y coseno en cada cuadrante. En consecuencia, en la Tabla 4.8 se presentan los signos de la función cotangente.

| Cuadrante | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $\cot x$ | + | − | + | − |

Tabla 4.8

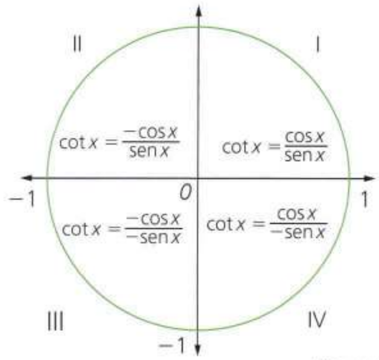



Figura 4.45

La **función cotangente** es aquella que asocia a cada número real $x$ el valor de la cotangente del ángulo $x$ medido en radianes (si dicho valor existe). Se denota por:

$$\boldsymbol{f(x) = \cot x \text{ o } y = \cot x}$$

| Tabla de valores de $y = \cot x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ (grados) | $x$ (radianes) | $\cot x$ |
| 0° | 0 | N.D. |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | 1,73 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | 0,58 |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 0 |
| 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | −0,58 |
| 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | −1,73 |
| 180° | $\pi$ | N.D. |
| 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | 1,73 |
| 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | 0,58 |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | 0 |
| 300° | $\frac{5\pi}{3}$ | −0,58 |
| 330° | $\frac{11\pi}{6}$ | −1,73 |
| 360° | $2\pi$ | N.D. |

Tabla 4.9

Algunos valores relevantes de la función $f(x) = \cot x$, para $x$ en radianes y grados, se muestran en la Tabla 4.9. En esta tabla se observa que la función $y = \cot x$ no está definida en $x = \pi$ y en $x = 2\pi$. Al considerar que $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, se concluye que la función no está definida cuando $\tan x = 0$, es decir para los valores de la forma $x = k\pi$ con $k$ entero.

### 5.1 Gráfica de la función cotangente

La función $f(x) = \cot x$ se construye en el intervalo $[0, 2\pi]$ en un plano cartesiano trasladando la medida de las líneas trigonométricas correspondientes a la cotangente tal como se muestra en la Figura 4.46.

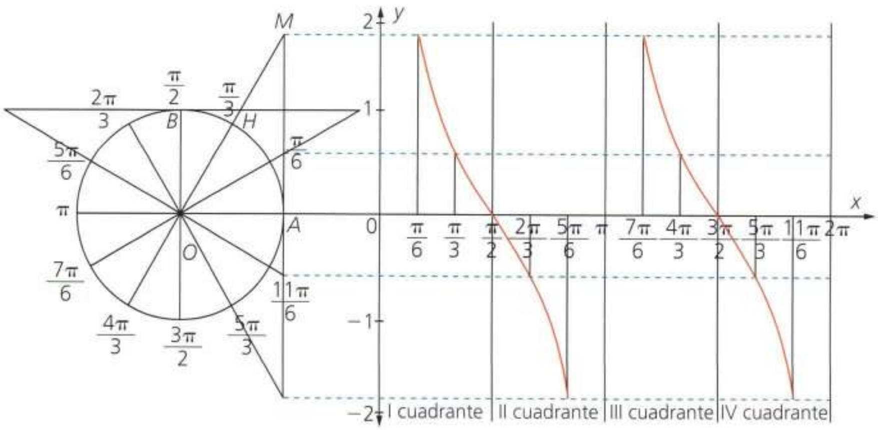



Figura 4.46

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 5.2 Características de la función cotangente

La función $y = \cot x$ tiene las siguientes características:

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{k\pi, k \text{ entero}\}$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.
- Las rectas $x = k\pi$ son asíntotas verticales.
- Es periódica. El periodo de la función es $T = \pi$, ya que $\cot(x + \pi) = \cot x$.
- Es continua en $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \text{ entero}\}$ y simétrica con respecto al origen.
- Es estrictamente decreciente en todo su dominio; por lo tanto, no tiene máximos ni mínimos.

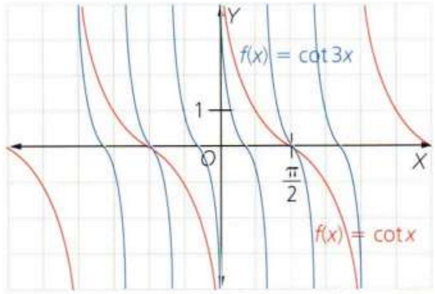


Figura 4.47

## 5.3 Funciones de la forma $y = A\cot \omega(x - \phi) + B$

En las funciones de la forma $y = A\cot \omega(x - \phi) + B$ se identifican los siguientes elementos:

- **Periodo ($T$).** Para determinar el periodo se utiliza la expresión $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

  La Figura 4.47 muestra la gráfica de la función $y = \cot 3x$, con $T = \frac{\pi}{3}$.

- **Desfase ($\phi$).** Si $\phi > 0$, el desplazamiento es de $\phi$ unidades a la derecha. Si $\phi < 0$, el desplazamiento es de $|\phi|$ unidades a la izquierda.

  La Figura 4.48 muestra la gráfica de la función $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, con desfase $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.

- **Desplazamiento vertical ($B$).** Si $B > 0$, el desplazamiento es de $B$ unidades hacia arriba. Si $B < 0$, el desplazamiento es de $|B|$ unidades hacia abajo.

  La Figura 4.49 muestra la gráfica de la función $y = \cot x - 2$, con desplazamiento vertical de 2 unidades abajo.

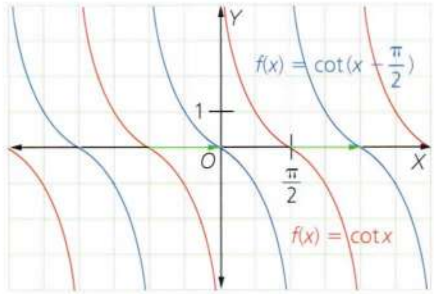


Figura 4.48

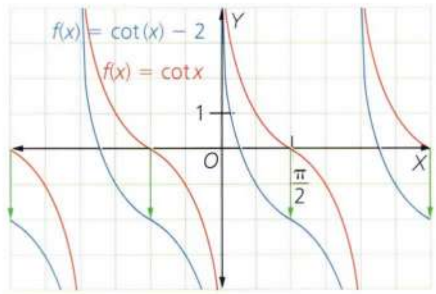


Figura 4.49

### Actividades de aprendizaje

**Razonamiento**

1. Halla el periodo, el desfase y el desplazamiento vertical de las siguientes funciones.

   a. $y = -\cot 3x$
   b. $y = \cot(2x - \pi)$
   c. $y = \cot(4x + \pi) + 3$
   d. $y = \cot 4x - 1$
   e. $y = \cot 2x - 3$
   f. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

**Comunicación**

2. Representa cada función teniendo en cuenta la gráfica de $y = \cot x$.

   a. $y = \cot 2x$
   b. $y = -\cot 2x$
   c. $y = 2\cot x$
   d. $y = -2\cot x$

**Resolución de problemas**

3. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

   a. El periodo de la función $y = \cot(2x - 2\pi)$ es $\frac{\pi}{2}$.
   b. El desfase de la función $y = \cot(2x - 2\pi)$ es $\pi$ unidades a la derecha.
   c. El desplazamiento vertical de la función $y = \cot(2x) + 2$ es de dos unidades hacia abajo.

### Evaluación del aprendizaje

Escribe una ecuación de la forma $y = A\cot \omega(x + \phi)$ que cumpla las condiciones dadas.

a. $T = \pi$ y $\phi = \frac{\pi}{2}$
b. $T = 2\pi$ y $\phi = \frac{\pi}{4}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Función secante

**Saberes previos**

Explica cómo hallarías el valor de $\frac{1}{\cos 45°}$ usando la calculadora.

**Analiza**

En la Figura 4.50 se presenta una circunferencia unitaria.

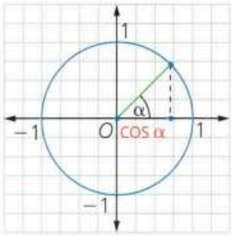



Figura 4.50

- ¿Qué relación existe entre la función coseno y la función secante?

| Tabla de valores de $y = \sec x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ (grados) | $x$ (radianes) | $\sec x$ |
| 0° | 0 | 1 |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | 1,15 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | 2 |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | N.D. |
| 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | −2 |
| 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | −1,15 |
| 180° | $\pi$ | −1 |
| 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | −1,15 |
| 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | −2 |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | N.D. |
| 300° | $\frac{5\pi}{3}$ | 2 |
| 330° | $\frac{11\pi}{6}$ | 1,15 |
| 360° | $2\pi$ | 1 |

Tabla 4.10

**Conoce**

Al utilizar la definición de la función secante a partir de la circunferencia unitaria y relacionándola con la función coseno, se obtiene la expresión:

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ con } \cos\alpha \neq 0$$

De la anterior expresión se deduce que la función secante no está definida cuando $\cos\alpha = 0$, lo cual influye en la gráfica de la función generando asíntotas en los valores $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $k$ entero.

La función mediante la cual a cada número real $x$ le corresponde el valor de la secante del ángulo $x$ medido en radianes (si este valor existe) es denominada **función secante**. Se denota por: $\boldsymbol{f(x) = \sec x}$ o $\boldsymbol{y = \sec x}$.

## 6.1 Gráfica de la función secante

En la Figura 4.51 aparecen las gráficas de las funciones coseno y secante, representada esta última con los valores de la Tabla 4.10.

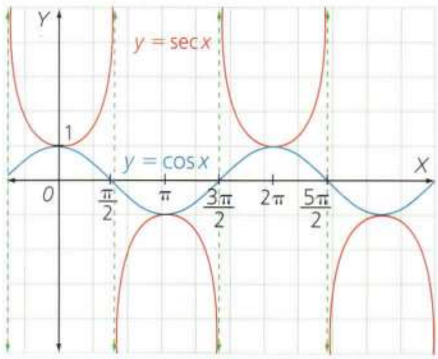



Figura 4.51

## 6.2 Características de la función secante

De acuerdo con la información anterior, se concluye que la función secante tiene las siguientes características:

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entero}\right\}$.
- El recorrido es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales.
- El periodo de la función es $T = 2\pi$, pues se verifica que $\sec(x + 2\pi) = \sec x$.
- Es continua en $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entero}\right\}$.
- Es simétrica con respecto al eje de ordenadas, ya que $\sec(-x) = \sec x$.
- En el intervalo $[0, 2\pi]$, la función es creciente en los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y decreciente en los intervalos $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## 6.3 Funciones de la forma $f(x) = A\sec\omega(x - \phi) + B$

En las funciones de la forma $y = A\sec\omega(x - \phi) + B$, se identifican los siguientes elementos:

- **Periodo ($T$).** Para determinar el periodo se utiliza la expresión $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

  La Figura 4.52 muestra la gráfica de la función $y = \sec 2x$, con $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

- **Desfase ($\phi$).** Si $\phi > 0$, el desplazamiento es de $\phi$ unidades a la derecha. Si $\phi < 0$, el desplazamiento es de $|\phi|$ unidades a la izquierda.

  La Figura 4.53 muestra la gráfica de la función $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, con desfase $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

- **Desplazamiento vertical ($B$).** Si $B > 0$, el desplazamiento es de $B$ unidades hacia arriba. Si $B < 0$, el desplazamiento es de $|B|$ unidades hacia abajo.

  La Figura 4.54 muestra la gráfica de la función $y = \sec(x) + 2$, con desplazamiento vertical de 2 unidades hacia arriba.

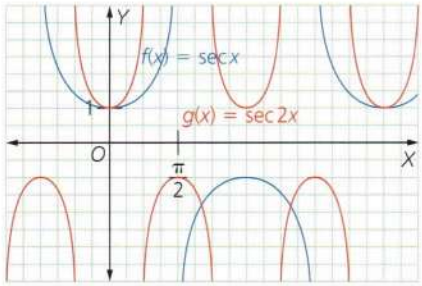



Figura 4.52

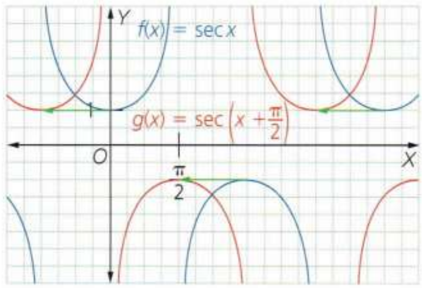



Figura 4.53

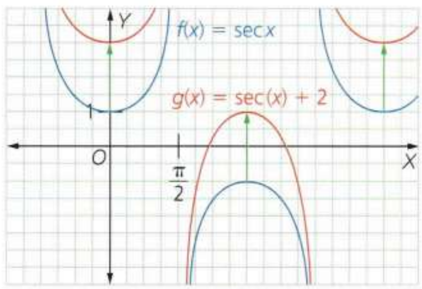



Figura 4.54

**Ejemplo 1**

Para determinar el periodo y el desfase de la función $y = \sec\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$ se observa que las ecuaciones $y = \sec\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$ y $y = \sec \frac{1}{2}\,[x - (-2\pi)]$ son equivalentes; por lo tanto, el periodo es $\frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ y el desfase es $|\phi| = |-2\pi| = 2\pi$ unidades a la izquierda.

### Actividades de aprendizaje

**Ejercitación**

1. Utiliza una calculadora para encontrar diversos valores de la función $f(x) = \sec x$ en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$; luego, grafica dicha función.

2. Determina el periodo, el desfase y el desplazamiento vertical de cada función.

   a. $y = \sec 2x$
   b. $y = \sec(2x - \pi)$
   c. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
   d. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
   e. $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$
   f. $y = \sec(x - \pi) - 2$

**Comunicación**

3. Traza la gráfica de cada función.

   a. $y = \sec(x - \pi)$
   b. $y = \sec(x + 1)$
   c. $y = \sec(x - 2\pi)$

4. Representa la gráfica de la función $f(x) = -\sec x$ e indica en ella las siguientes características.

   a. Dominio y rango.
   b. Periodo y amplitud.
   c. Valores máximos y mínimos en el intervalo $[0, 2\pi]$.
   d. Continuidad y simetría.
   e. Intervalos crecientes y decrecientes en el intervalo $[0, 2\pi]$.

### Evaluación del aprendizaje

✓ Escribe una función de la forma $f(x) = A\sec\omega(x - \phi) + B$ que cumpla con las condiciones dadas. Luego, elabora la gráfica.

a. Periodo: $\pi$ Desfase: $\frac{\pi}{2}$

b. Periodo: $2\pi$ Desfase: $\frac{\pi}{4}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Función cosecante

## Saberes previos

¿Es $\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \cos x$? Si es así, compruébalo; si no lo es, muestra un valor de $x$ para el que no se cumpla la igualdad.

## Analiza

La función cosecante en una circunferencia unitaria es definida como $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y}$, con $y \neq 0$.

- Teniendo en cuenta la anterior expresión, ¿cuáles son los valores de $x$ donde $\operatorname{sen} x = \operatorname{cosec} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$?

| Tabla de valores de $y = \operatorname{cosec} x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ (grados) | $x$ (radianes) | $\operatorname{cosec} x$ |
| 0° | 0 | N.D. |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | 2 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | 1,15 |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | 1,15 |
| 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | 2 |
| 180° | $\pi$ | N.D. |
| 210° | $\frac{7\pi}{6}$ | −2 |
| 240° | $\frac{4\pi}{3}$ | −1,15 |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | −1 |
| 300° | $\frac{5\pi}{3}$ | −1,15 |
| 330° | $\frac{11\pi}{6}$ | −2 |
| 360° | $2\pi$ | N.D. |

Tabla 4.11

## Conoce

Al utilizar la definición de la función cosecante a partir de la circunferencia unitaria y relacionándola con la función seno, se obtiene la expresión:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \text{ con } \operatorname{sen} \alpha \neq 0$$

De la anterior expresión se deduce que la función cosecante no está definida cuando $\operatorname{sen} \alpha = 0$.

La **función cosecante** le hace corresponder a cada número real $x$ el valor de la cosecante de $x$, siendo este un ángulo medido en radianes (si dicho valor existe). Se denota como $\boldsymbol{f(x) = \operatorname{cosec} x}$ o $\boldsymbol{y = \operatorname{cosec} x}$.

## 7.1 Gráfica de la función cosecante

En la Figura 4.55 aparecen las gráficas de las funciones seno y cosecante, representada esta última con los valores de la Tabla 4.11.

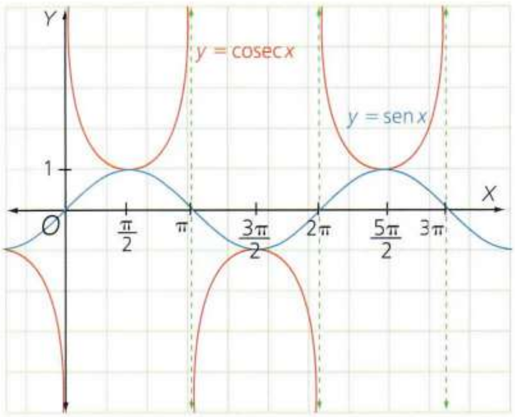



Figura 4.55

Se observa que en el intervalo $[0, 2\pi]$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{cosec} x$ en $\frac{\pi}{2}$ y en $\frac{3\pi}{2}$.

## 7.2 Características de la función cosecante

La función cosecante tiene las siguientes características:

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{k\pi, k \text{ entero}\}$.
- El recorrido es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- Las rectas $x = k\pi$ son asíntotas verticales.
- El periodo de la función es $T = 2\pi$, pues $\operatorname{cosec}(x + 2\pi) = \operatorname{cosec} x$.
- Es continua en $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \text{ entero}\}$.
- Es simétrica con respecto al origen, ya que $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$.
- En el intervalo $[0, 2\pi]$, la función es creciente en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y decreciente en los intervalos $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 7.3 Funciones de la forma $f(x) = A\operatorname{cosec}\omega(x - \phi) + B$

En las funciones de la forma $y = A\operatorname{cosec}\omega(x - \phi) + B$, se identifican estos elementos:

- **Periodo ($T$).** Para determinar el periodo se utiliza la expresión $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

  La Figura 4.56 muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{cosec} 2x$, con $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

- **Desfase ($\phi$).** Si $\phi > 0$, el desplazamiento es de $\phi$ unidades a la derecha. Si $\phi < 0$, el desplazamiento es de $|\phi|$ unidades a la izquierda.

  La Figura 4.57 muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{cosec}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, con desfase $\dfrac{\pi}{2}$ a la izquierda.

- **Desplazamiento vertical ($B$).** Si $B > 0$, el desplazamiento es de $B$ unidades hacia arriba. Si $B < 0$, el desplazamiento es de $|B|$ unidades hacia abajo. La Figura 4.58 muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{cosec}(x) + 2$, con desplazamiento vertical de 2 unidades arriba.

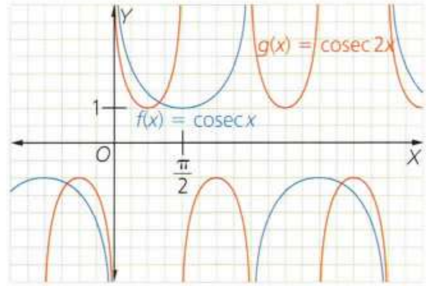


Figura 4.56

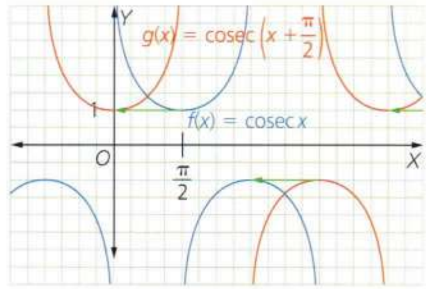


Figura 4.57

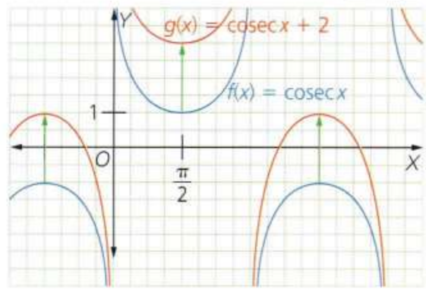


Figura 4.58

**Ejemplo 1**

Las ecuaciones $y = \operatorname{cosec}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ y $y = \operatorname{cosec} 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + 3$ son equivalentes; por lo tanto, el periodo está dado por $\dfrac{2\pi}{|\omega|} = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$, el desfase es $|\phi| = \left|-\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda y el desplazamiento vertical es de 3 unidades hacia arriba.

### Actividades de aprendizaje

**Ejercitación**

1. Utiliza una calculadora para encontrar diversos valores de la función $f(x) = \operatorname{cosec} x$ en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$; luego, grafica dicha función.

**Modelación**

2. Escribe una ecuación de la forma $y = A\operatorname{cosec}\omega(x - \phi) + B$ que cumpla con las características de la Figura 4.59.

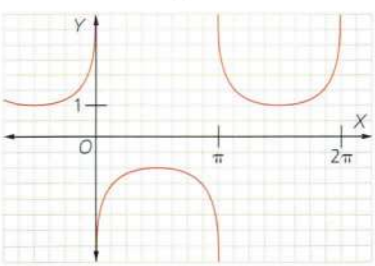


Figura 4.59

**Razonamiento**

3. Observa las funciones que se presentan a continuación y para cada una de ellas determina el periodo, el desfase y el desplazamiento vertical.

   a. $y = -\operatorname{cosec} 3x$
   b. $y = \operatorname{cosec}(2x - \pi)$
   c. $y = \operatorname{cosec} 2x - 5$
   d. $y = \operatorname{cosec}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 1$

### Evaluación del aprendizaje

Construye la gráfica de las siguientes funciones a partir de la gráfica de la función $y = \operatorname{cosec} x$.

a. $y = \operatorname{cosec} 3x$

b. $y = \operatorname{cosec}(3x - \pi)$

c. $y = \operatorname{cosec}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 2$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 8 Identidades trigonométricas fundamentales



**Saberes previos**

¿Cuál es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto igual a 1 m?

**Analiza**

En los cañones de los barcos piratas se involucraba mucha trigonometría. Por ejemplo, dependiendo del ángulo de tiro, la bala del cañón salía disparada a cierta distancia. Esa distancia, que recibe el nombre de *alcance*, es posible calcularla así:

$$\textit{alcance} = \frac{1}{16}\, v_0^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

- ¿Es posible que $\frac{1}{32}\, v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha$ determine también el alcance?

**Conoce**

En trigonometría, al igual que en álgebra, es posible plantear igualdades que se verifican para todos los valores en los números reales. Por ejemplo, en el caso del cañón en los barcos, se puede verificar que las expresiones

$$\frac{1}{16}\, v_0^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \text{ y } \frac{1}{32}\, v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha \text{ son equivalentes}$$

Suponiendo que la bala es lanzada con una velocidad inicial de 100 pies por segundo y el ángulo de tiro es 35º, se tiene que:

$$\text{alcance} = \frac{1}{16}\,(100)^2 \operatorname{sen} 35º \cos 35º = 293{,}65 \text{ pies}$$

$$\text{alcance} = \frac{1}{32}\,(100)^2 \operatorname{sen} 2(35º) = 293{,}65 \text{ pies}$$

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que involucran funciones trigonométricas y se cumplen para todos los ángulos.

A lo largo de este tema se presentarán diferentes tipos de identidades y algunas estrategias para demostrarlas.

## 8.1 Identidades pitagóricas

En la circunferencia goniométrica de la Figura 4.60, aparece representado un ángulo $\alpha$ y sus razones trigonométricas.

La identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo $OA''A'$.

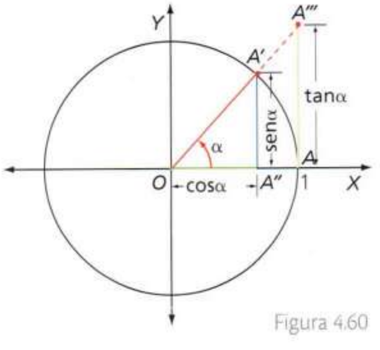




Figura 4.60

Las identidades $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ y $\cot^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$ se deducen de la siguiente manera:

Si se dividen los dos miembros de la primera identidad pitagórica entre $\cos^2\alpha$, se obtiene:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

Análogamente, si se divide entre $\operatorname{sen}^2\alpha$ se tiene que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

Las expresiones $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ y $\cot^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$ se conocen como **identidades pitagóricas**.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 1**

Para hallar el valor de $\cos\alpha$ conociendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y que el ángulo se encuentra en el primer cuadrante, se puede utilizar una identidad pitagórica.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \longrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \longrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

## 8.2 Identidades de cociente

Las funciones tangente y cotangente pueden ser expresadas en términos de las funciones seno y coseno. Si se analizan las líneas trigonométricas en la circunferencia goniométrica que se muestra en la Figura 4.61, los triángulos $OA''A'$ y $OAA'''$ son semejantes y, por el teorema de Tales, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{A'A''}{OA''} = \frac{A'''A}{OA} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

De manera similar, se puede determinar que $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

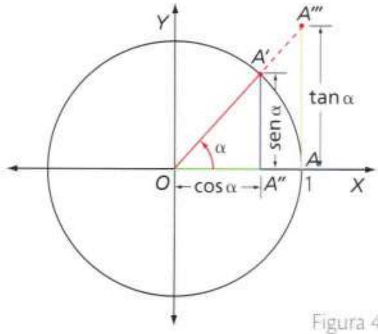



Figura 4.61

De las definiciones de las funciones trigonométricas se derivan las **identidades de cociente** que se indican a continuación.

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

**Ejemplo 2**

Para hallar el valor de $\tan\alpha$ y $\cot\alpha$ si se sabe que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ y que $\alpha$ está en el primer cuadrante, se procede de la siguiente manera.

Primero se utiliza la identidad pitagórica.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{22}{25}} = \frac{\sqrt{22}}{5}$$

Luego se utilizan las identidades de cociente.

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{22}}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{5}} = \frac{\sqrt{66}}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \frac{\sqrt{66}}{22}$$

**Ejemplo 3**

Para determinar el valor de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$, si $\tan\alpha = 1$, se tiene que:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \text{ y } \tan\alpha = 1\text{; entonces, } \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 1$$

Para que el cociente entre seno y coseno sea igual a 1, el triángulo en el que se plantean las funciones debe ser isósceles y el ángulo $\alpha = 45°$. Así, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En la Figura 4.62 se puede observar la situación.

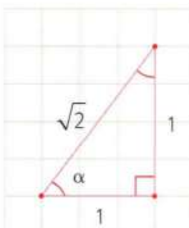



Figura 4.62

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 8.3 Identidades recíprocas

Se conocen como **identidades recíprocas**:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

**Ejemplo 4**

Utilizando las identidades es posible simplificar expresiones. Por ejemplo, para simplificar la expresión $\frac{\tan\alpha \cdot \cot\alpha}{\cos\alpha}$ se procede como sigue:

$$\frac{\tan\alpha \cdot \cot\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

**Ejemplo 5**

Si $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan 60° = \sqrt{3}$, es posible hallar $\sec 30°$ y $\cot 60°$ utilizando las identidades recíprocas.

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\tan 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Ejemplo 6**

Si se sabe que $\alpha$ es un ángulo del primer cuadrante ($0 < \alpha < 90°$) y que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$, para calcular el valor de las demás razones trigonométricas de $\alpha$ se tiene en cuenta que al ser $\alpha$ un ángulo que está en el primer cuadrante, todas las razones trigonométricas son positivas (Figura 4.63).

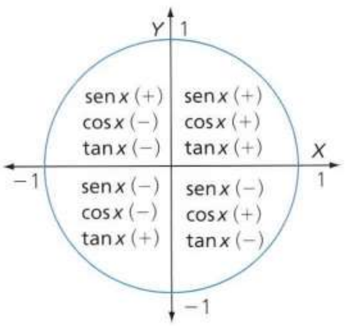



Figura 4.63

Si se aplica la identidad pitagórica: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, entonces:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5};\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{3}{2}$$

**Ejemplo 7**

Para calcular $\cos\alpha$ si $\tan\alpha = -3$ y sabiendo que $\alpha$ está en el segundo cuadrante se tiene en cuenta que el coseno y su razón inversa, la secante, son negativos en el segundo cuadrante. Por tanto:

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\tan^2\alpha} = -\sqrt{1+(-3)^2} = -\sqrt{10}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Verifica que las identidades pitagóricas se cumplen para los siguientes ángulos.

a. $\alpha = 30°$
b. $\alpha = 60°$
c. $\alpha = 45°$
d. $\alpha = 135°$

**2** Calcula las razones de un ángulo si se sabe que la tangente es $\sqrt{3}$ y el ángulo está ubicado en el primer cuadrante.

**3** Determina el valor de las razones trigonométricas de $\alpha$ teniendo en cuenta que $\text{cosec}\,\alpha = -7$ y que $180° < \alpha < 270°$.

**4** Halla las razones trigonométricas de un ángulo $\alpha$, en el IV cuadrante, si se conoce que $\tan\alpha = -3$.

**5** Calcula la razón que se pide en cada caso.

a. $\text{sen}\,\alpha$, si $\tan\alpha = -3$ y $\alpha$ está en el II cuadrante.

b. $\tan\alpha$, si $\cos\alpha = 1$ y $\alpha$ está en el IV cuadrante.

c. $\text{sen}\,\alpha$ si se sabe que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ para un ángulo $\alpha$ en el primer cuadrante.

d. $\cos\alpha$ si se sabe que $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para un ángulo $\alpha$ en el primer cuadrante.

### Comunicación

**6** Utiliza la calculadora para dar valores a $\alpha$ y verificar las siguientes identidades.

a. $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
d. $\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$
e. $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
f. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

### Razonamiento

**7** Encuentra el valor de cada expresión sin utilizar la calculadora.

a. $\tan 30° \cot 45°$
b. $\text{sen}\,30° + \cos 90°$
c. $\text{cosec}\,30° \cot 60°$
d. $\sec 60° \div \cos 30°$

**8** Halla las razones trigonométricas que determinan el punto $B$ y el ángulo $\alpha$.

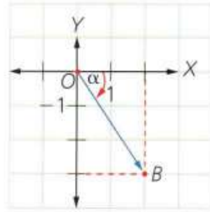



Figura 4.64

### Resolución de problemas

**9** Encuentra todas las razones trigonométricas para un ángulo $\alpha$ ubicado en un triángulo rectángulo *ABC*, en el cual el cateto opuesto mide 16 cm y el cateto adyacente mide 7 cm.

**10** Halla el valor de todas las razones trigonométricas para un ángulo $\alpha$ de un triángulo rectángulo *ABC*, en el cual el cateto opuesto mide 12 cm y la hipotenusa mide 15 cm.

**11** ¿Cuáles son las razones trigonométricas para un ángulo $\alpha$ de un triángulo rectángulo *ABC*, en el cual el cateto opuesto mide 13 cm y el cateto adyacente mide 14 cm?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Simplifica las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{\tan\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}$

b. $\sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$

c. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 1$

d. $\sec\alpha(\text{cosec}\,\alpha + 1)$

**ii** Despeja en cada identidad la función que se pide.

a. $\text{sen}\,\alpha$ de $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
b. $\cos\alpha$ de $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
c. $\tan\alpha$ de $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
d. $\sec\alpha$ de $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
e. $\cot\alpha$ de $1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$
f. $\text{cosec}\,\alpha$ de $1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 9 Funciones trigonométricas en términos de las otras



## Saberes previos

Se sabe que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ cuando $\cos x$ es diferente de 0. De acuerdo con esa igualdad, ¿a qué es igual $\cos x$ y qué restricciones deben tenerse en cuenta?

## Analiza

La altura de un proyectil que se lanza con un ángulo $\alpha$ a una velocidad $v_0$ bajo la aceleración de la gravedad, está dada por:

$$h = \frac{v_0^2 \tan^2\alpha}{2g \sec^2\alpha}$$

- ¿Es posible escribir de una forma más simple la expresión de la altura de un proyectil?

## Conoce

En el proceso de análisis de las identidades trigonométricas, resulta ser una estrategia interesante escribir expresiones trigonométricas en función de seno y coseno. Este proceso, en algunos casos, simplifica las expresiones y hace más fáciles los cálculos.

Por ejemplo, la expresión que determina la altura de un proyectil se puede escribir como se muestra a continuación.

$$h = \frac{v_0^2 \tan^2\alpha}{2g\sec^2\alpha} = \frac{v_0^2 \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{2g\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{2g}{\cos^2\alpha}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha \cdot g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

A partir del proceso anterior, se evidencia que una expresión más simple para determinar la altura de un proyectil es $h = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$.

Para **escribir una expresión trigonométrica en términos de alguna función específica**, se usan las identidades fundamentales y los procesos algebraicos de simplificación.

**Ejemplo 1**

- Para escribir $\cos\alpha$ en función de seno, se procede de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

- Para escribir $\cos\alpha$ en función de tangente, se usa la identidad

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}.$$

Como $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$, se tiene que $\sec\alpha = \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ ; entonces:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

- Para escribir $\cos\alpha$ en función de cotangente, se procede como sigue:

Se parte de que $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ y $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\cot^2\alpha}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cot^2\alpha+1}{\cot^2\alpha}}} = \pm\frac{1}{\dfrac{\sqrt{\cot^2\alpha+1}}{\cot\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1 Expresa $\tan\alpha$ en términos de las demás razones trigonométricas.

2 Expresa $\text{cosec}\,\alpha$ en términos de coseno.

3 Expresa $\cot\alpha$ en términos de coseno.

4 Expresa la identidad pitagórica

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

a. en términos de seno.

b. en términos de coseno.

5 Expresa la identidad pitagórica

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

a. en términos de seno.

b. en términos de coseno.

6 Expresa la identidad pitagórica

$$1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$$

a. en términos de seno.

b. en términos de coseno.

### Comunicación

7 Escribe cada expresión en términos de seno.

a. $\cos\alpha$ b. $\tan\alpha$

c. $\tan\alpha \cdot \cos\alpha$ d. $\sec\alpha \cdot \cot\alpha$

e. $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$ f. $\dfrac{\tan\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

g. $\dfrac{\sec\alpha}{\text{cosec}\,\alpha}$ h. $\dfrac{\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

i. $\tan^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ j. $\sec^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \cot\alpha$

### Razonamiento

8 Calcula el valor de $\cos\alpha$ usando la expresión

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},\ \text{si } \alpha = 45°.$$

9 Escribe cada expresión en términos de coseno.

a. $\text{sen}\,\alpha$ b. $\cot\alpha$

c. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha$ d. $\text{sen}\,\alpha \cdot \cot\alpha$

e. $\dfrac{\cot\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ f. $\dfrac{\tan\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

### Resolución de problemas

10 Identifica cuáles de estas identidades trigonométricas equivalen a 1. Explica tu respuesta.

a. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$

b. $\tan^2\alpha + \sec^2\alpha$

c. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha$

d. $\text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha$

## Evaluación del aprendizaje

Completa la Tabla 4.12 con las columnas para las funciones $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$.

| | **sen** $\alpha$ | **cos** $\alpha$ | **tan** $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| **sen** $\alpha$ | $\text{sen}\,\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ |
| **cos** $\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$ | $\cos\alpha$ | $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ |
| **tan** $\alpha$ | $\pm\dfrac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | $\tan\alpha$ |
| **cosec** $\alpha$ | $\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ | $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$ |
| **sec** $\alpha$ | $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ |
| **cot** $\alpha$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\alpha}$ | $\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\tan\alpha}$ |

Tabla 4.12

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Simplificación de expresiones trigonométricas

## Saberes previos

Halla la expresión que resulta de sumar los polinomios $x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ y $2x^2 - 8x + 7$. ¿Qué tuviste en cuenta a la hora de efectuar la suma?

## Analiza

La siguiente expresión involucra cuatro funciones trigonométricas.

$$\cos\theta\left(\sec\theta - \frac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta}\right)$$

- ¿Es posible escribir esta expresión usando menos funciones?

## Analiza y conoce

En ocasiones, hacer uso de las diferentes herramientas algebraicas permite plantear expresiones de manera más sencilla.

Por ejemplo, en la expresión $\cos\theta\left(\sec\theta - \dfrac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta}\right)$ es posible usar las identidades básicas para escribirla de otra forma:

$$\cos\theta\left(\sec\theta - \frac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta}\right) = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}\right) = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1}\right) = \cos\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right) = \cos\theta\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right) = \operatorname{sen}^2\theta$$

Así, la expresión inicial simplemente es equivalente al $\operatorname{sen}^2\theta$.

**Simplificar expresiones trigonométricas** es un procedimiento basado en el álgebra, que consiste en escribir dicha expresión en términos más sencillos.

**Ejemplo 1**

Para simplificar la expresión $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}$, se inicia escribiendo la suma de fracciones:

$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}$. En esta es posible simplificar algunos términos; al hacerlo, se tiene que dicha expresión resulta ser: $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Como $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, al sustituir se obtiene:

$$\frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha + \sec\alpha$$

| Identidades pitagóricas |
|---|
| $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ |
| $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ |
| $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ |

Tabla 4.13

| Identidades cocientes |
|---|
| $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ |
| $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ |

Tabla 4.14

| Identidades recíprocas |
|---|
| $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ |
| $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ |
| $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ |

Tabla 4.15

## 10.1 Demostración de identidades

Para demostrar una identidad trigonométrica, se puede trabajar con el siguiente procedimiento:

- Elegir un miembro de la igualdad, generalmente el más complejo, para simplificarlo.
- Escribir las funciones trigonométricas en términos de seno y coseno.
- Aplicar las identidades fundamentales (tablas 4.13 a 4.15) y usar la factorización, los productos notables o las operaciones indicadas cuando se requiera.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 2**

Para demostrar la identidad $\frac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta} = \sec\beta + \tan\beta$ se multiplica la expresión del miembro izquierdo de la igualdad por $\frac{1+\operatorname{sen}\beta}{1+\operatorname{sen}\beta}$.

$\frac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}\beta}{1+\operatorname{sen}\beta}$ ← Se escribe la expresión más compleja y se multiplica por $\frac{1+\operatorname{sen}\beta}{1+\operatorname{sen}\beta}$

$\frac{\cos\beta(1+\operatorname{sen}\beta)}{1-\operatorname{sen}^2\beta}$ ← Se multiplican las expresiones

$\frac{\cos\beta(1+\operatorname{sen}\beta)}{\cos^2\beta}$ ← Se usa la identidad pitagórica

$\frac{(1+\operatorname{sen}\beta)}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$ ← Se simplifica y se escribe la suma de fracciones

$= \sec\beta + \tan\beta$ ← Se usan las identidades y se obtiene la igualdad

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1 Simplifica cada expresión utilizando identidades fundamentales.

a. $\cos\theta \cdot \sec\theta + \cot^2\theta$

b. $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$

c. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

d. $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \tan x - 1}$

2 Demuestra las siguientes identidades.

a. $\operatorname{sen}\theta \cdot \cot\theta = \cos\theta$

b. $\operatorname{sen}\alpha(\tan\alpha + \operatorname{cosec}\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}$

c. $(\tan\alpha + \cot\alpha) = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha$

d. $\operatorname{sen}\alpha(1 + \cot^2\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$

e. $(\tan\theta + \cot\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}$

f. $\frac{\sec\beta - 1}{1 - \cos\beta} = \sec\beta$

g. $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\alpha} = \sec^2\alpha + \sec\alpha \cdot \tan\alpha$

h. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

### Razonamiento

3 Escribe una expresión para que se verifique la identidad.

a. $\cos\theta \cdot \tan\theta \cdot \boxed{\phantom{xx}} = \operatorname{cosec}\theta$

b. $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\boxed{\phantom{xx}}} = \cot\alpha$

### Resolución de problemas

4 Plantea una identidad trigonométrica a partir de la siguiente expresión. Luego, propón a un compañero que demuestre la identidad que escribiste.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} - \frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

## Evaluación del aprendizaje

Verifica las identidades.

a. $\frac{1+\cot^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$

b. $\frac{\tan^2\alpha + 1}{\tan^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$

c. $\sec^2\alpha + 4 = \tan^2\alpha + 5$

d. $\frac{\cos^2 x}{\sec^2 x(\tan^2 x - 1)} = \operatorname{cosec}^2 x$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 11 Coordenadas polares y cartesianas

**Saberes previos**

Traza las rectas $y = x$ y $y = -x$ en el mismo plano cartesiano y halla el ángulo que forman con el eje positivo de las $X$.

**Analiza**

Un avión en vuelo está desaparecido y desde la torre de control se informa que sus coordenadas son (175, 203).

- ¿Es suficiente esa información para determinar la ubicación del avión?

La inversa de la función $y = \tan x$, se denomina función arcotangente, es aquella que asocia cada $x \in \mathbb{R}$ con un único valor $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, y verifica que $\tan y = x$. Se simboliza como $y = \arctan x$ o $y = \tan^{-1} x$.

Para calcular el valor de $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ en la calculadora científica, en modo grados (DEG), se digita la secuencia:


Así, para $y = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$, se tiene que $y = 53{,}1°$.

**Conoce**

Los datos que suministra la torre de control, no permiten saber con exactitud la ubicación del avión. Además de las coordenadas, se requiere de la identificación de su rumbo, es decir, la dirección que lleva el avión.

## 11.1 Coordenadas cartesianas

El **sistema de coordenadas cartesianas** para ubicar el punto $(x, y)$ en el plano, se define un punto de origen $O$, y, a partir de este, se avanzan $x$ unidades en sentido horizontal y luego, $y$ unidades en el sentido vertical, como sugiere la (Figura 4.65).

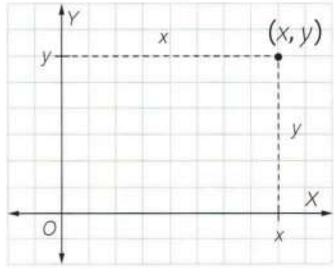



Figura 4.65

## 11.2 Coordenadas polares

Un punto en el sistema de coordenadas polares se puede determinar a partir de una distancia $r$ y un ángulo $\theta$. Esto es, se considera un punto $O$ del plano, al que se le llama **origen o polo**, y una recta dirigida (o rayo, o segmento $OL$) que pasa por $O$ y forma un ángulo $\theta$ con el eje $X$, llamada **eje polar**, como sistema de referencia . Sobre dicha recta se mide la distancia $r$ y el punto donde finaliza se identifica como el punto $(r, \theta)$ (Figura 4.66).

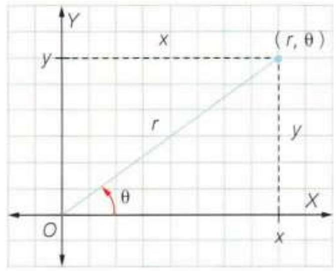



Figura 4.66

## 11.3 Conversión de coordenadas

En algunos casos es necesario realizar conversiones entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares.

- Las expresiones para convertir un punto expresado en coordenadas cartesianas $(x, y)$ a polares $(r, \theta)$ son: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Las expresiones para convertir un punto dado en coordenadas polares $(r, \theta)$ a cartesianas $(x, y)$ son $x = r \cdot \cos\theta$ y $y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$.

**Ejemplo 1**

Para expresar el punto (3, 4) en coordenadas polares, se tiene que: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ y $\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}1°$. Así que (3, 4) en coordenadas cartesianas corresponde a (5, 53,1°) en coordenadas polares.

**Ejemplo 2**

Para expresar el punto (13, 25°) en coordenadas cartesianas, se tiene que:

$x = 13\cos 25° = 11{,}78$ y $y = 13\operatorname{sen} 25° = 5{,}5$

De esa forma al punto (13, 25°) en coordenadas polares le corresponde el punto (11,78; 5,5) en coordenadas cartesianas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Modelación

**1** Relaciona cada una de las siguientes gráficas construidas en coordenadas polares con la ecuación que le corresponde. Toma cinco puntos en cada una de estas gráficas y halla sus coordenadas cartesianas.

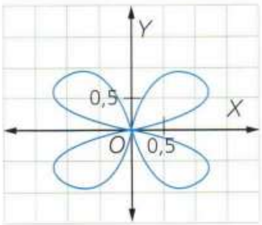
a.


Figura 4.67

$r = 2\text{sen}\,3\theta$

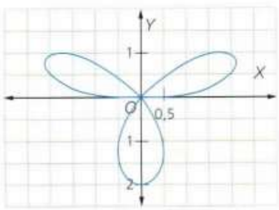
b.


Figura 4.68

$r = 1 - 2\text{sen}\,3\theta$

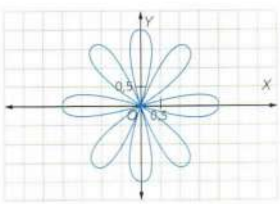
c.


Figura 4.69

$r = \text{sen}\,2\theta$

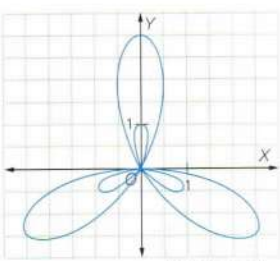
d.


Figura 4.70

$r = \cos 4\theta$

### Ejercitación

**2** Expresa las coordenadas cartesianas de cada punto dado en coordenadas polares.

a. $(2\sqrt{3}, 2)$ b. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**3** Expresa en coordenadas cartesianas cada punto dado en coordenadas polares.

a. $(-2, \pi)$ b. $\left(2 - \sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

### Comunicación

**4** Traza la curva cuya ecuación polar es $r = 8\cos\theta$ completando la Tabla 4.16.

| $\theta$ | $r$ |
|---|---|
| $0$ | |
| $\frac{\pi}{6}$ | |
| $\frac{\pi}{3}$ | |
| $\frac{\pi}{2}$ | |
| $\frac{2\pi}{3}$ | |
| $\frac{5\pi}{6}$ | |
| $\pi$ | |

Tabla 4.16

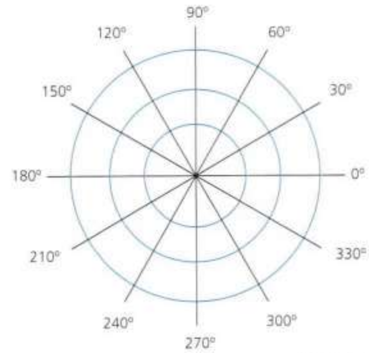


Figura 4.71

### Resolución de problemas

**5** Un radar registra la posición polar de varios aviones como se muestra en la Figura 4.72.

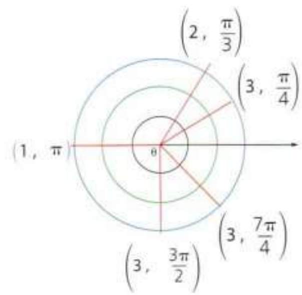


Figura 4.72

a. Halla las coordenadas cartesianas de cada posición.

b. Encuentra la distancia de cada avión a la torre de control ubicada en el punto (0, 0).

c. Encierra las coordenadas de la posición del avión que se encuentra más lejos de la torre de control.

## Evaluación del aprendizaje

Ubica los siguientes puntos en el sistema de coordenadas polares y encuentra las coordenadas cartesianas de cada uno.

a. $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ b. $(2, 3\pi)$

c. $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ d. $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Función seno y función coseno

### Comunicación

1. Describe el comportamiento de la función seno en cada cuadrante. ¿Qué diferencias tiene con la función coseno?

2. Grafica las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = -\operatorname{sen} x$, y responde.
   a. ¿Para qué valores de $x$ coinciden los valores de estas funciones?
   b. ¿Cuántas unidades debe desplazarse la gráfica de $g(x) = -\operatorname{sen} x$ para que coincida con $f(x) = \operatorname{sen} x$?

## Gráficas de las funciones sinusoidales

### Razonamiento

3. Determina la amplitud, el periodo y el desplazamiento vertical de las siguientes funciones. Luego grafícalas.
   a. $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1$
   b. $f(x) = 2\cos(2x) + 3$
   c. $f(x) = -4\operatorname{sen} 3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

4. Determina la amplitud y el periodo de las siguientes funciones.

a.

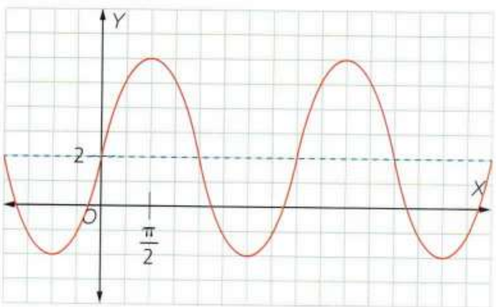



Figura 4.73

b.

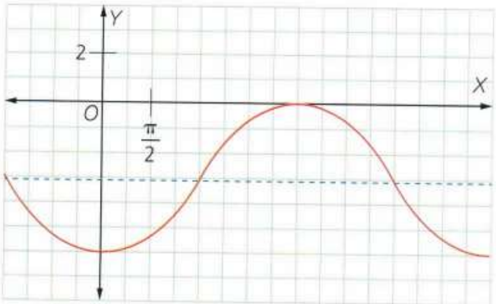



Figura 4.74

## Función tangente y función cotangente

### Comunicación

5. Representa las siguientes funciones y descríbelas a partir de sus características.
   a. $f(x) = 2\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1$
   b. $f(x) = -2\cot(2x)$
   c. $f(x) = -2\tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
   d. $f(x) = \cot\left(\dfrac{1}{2}x\right) - 1$

## Función secante y función cosecante

### Comunicación

6. Grafica las funciones $f(x) = \sec x$ y $g(x) = \operatorname{cosec} x$ y responde.
   a. ¿Para qué valores de $x$ coinciden los valores de estas funciones?
   b. ¿Qué transformaciones se le deben hacer a la gráfica de $f(x) = \sec x$ para que coincida con $f(x) = \operatorname{cosec} x$?

## Identidades trigonométricas fundamentales

### Ejercitación

7. Halla el valor de las razones trigonométricas.
   a. Si $\tan\alpha = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\alpha$ está en el III cuadrante.
   b. Si $\sec\alpha = \left(\dfrac{-\sqrt{6}}{3}\right)$ y $\alpha$ está en el II cuadrante.

## Funciones trigonométricas en términos de las otras

### Comunicación

8. Escribe cada expresión según la condición dada.
   a. $\tan^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$, en términos del seno.
   b. $(\tan^2\alpha + 1)\sec\alpha$ en términos del coseno.

## Simplificación de expresiones trigonométricas

### Razonamiento

9. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.
   a. $\sec^2\theta \cdot \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$
   b. $\sec^2\theta + 4 = \tan^2\theta + 5$
   c. $\operatorname{cosec}^2\theta \cdot \tan^2\theta - \tan^2\theta = 1$
   d. $\sec\beta + \sec\beta \cdot \cot^2\beta = \dfrac{1}{\cos\beta(1 - \cos^2\beta)}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Estrategia: Obtener información de una gráfica

### Problema

La gráfica de la Figura 4.75 muestra una transformación de la función $\cos x$.

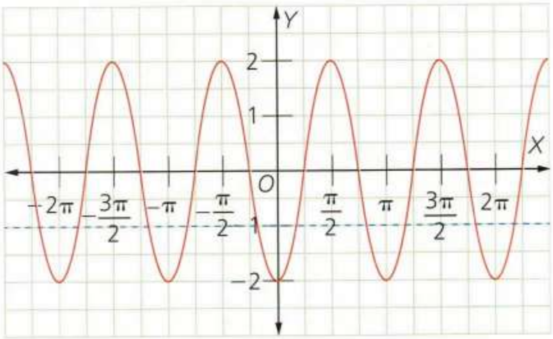


Figura 4.75

¿Cuál es la posible expresión que modela la función que genera la gráfica?

### 1. Comprende el problema

- ¿Qué información puede obtenerse de la gráfica?
  Las transformaciones que se le aplicaron a la gráfica de la función coseno para obtener la gráfica.

### 2. Crea un plan

- Recuerda las transformaciones que puede experimentar la gráfica de la función $\cos x$ y analiza la gráfica dada.

### 3. Ejecuta el plan

- En la gráfica se observa que el máximo valor que toma la función es 2 y el mínimo, $-2$, por lo tanto, la amplitud es 2. La gráfica es una reflexión con respecto al eje $X$ de la gráfica de la función $y = 2\cos x$.
- El periodo de la gráfica es $\pi$. Como $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, entonces $\omega = 2$. La gráfica no experimenta ningún desplazamiento vertical.

**R:** Una posible expresión para la función que genera la gráfica dada es $y = -2\cos 2x$.

### 4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la expresión $y = -2\cos(2x - 2\pi)$ también genera esta gráfica.

## Aplica la estrategia

1. Observa la Figura 4.76.

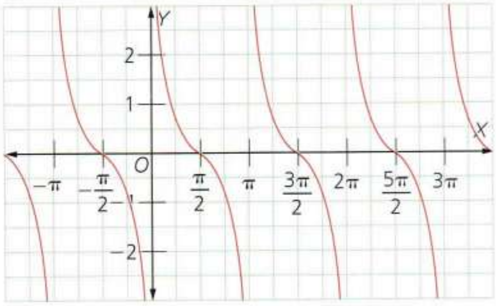


Figura 4.76

¿Cuál es la posible expresión que modela la función de la gráfica?

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

## Resuelve otros problemas

2. La función $f(t) = 0{,}6\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}t$ ($t$ en segundos) corresponde al proceso rítmico de la respiración humana. Según esta función, ¿cuál es el ciclo de la respiración?

3. En la función $f(t) = 3 + \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$, ¿cuál es el desplazamiento vertical?

4. Sin trazar la gráfica, identifica el periodo de la función $f(x) = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

## Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la gráfica de la función coseno y resuélvelo.

### Enriquece tu vocabulario

- ¿Qué palabra es la intrusa? ¿Por qué?
  trasladar - dilatar - contraer - rotar

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Evaluación del aprendizaje

## Función seno y función coseno

### Ejercitación

**1** Relaciona cada función con su recorrido.

ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ • $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

b. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$ • $[-1, 1]$

c. $y = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{3}$ • $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$

### Modelación

**2** Identifica la función equivalente a $f(x) = \cos x$.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $f(x) = 2\cos x$

b. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c. $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $f(x) = \operatorname{sen} x + \dfrac{\pi}{2}$

## Gráficas de las funciones sinusoidales

### Razonamiento

**3** Observa la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

VERDADERO/FALSO

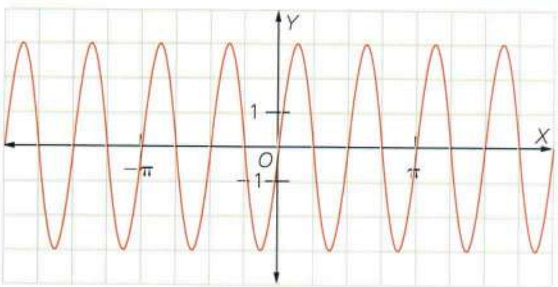



Figura 4.77

a. El dominio de la función es igual a $\mathbb{R}$. ( )

b. El recorrido de la función es igual a $\mathbb{R}$. ( )

c. La función es impar. ( )

### Resolución de problemas

**4** La onda que determina un sonido antes de chocar contra un muro se representa mediante la expresión $y = 4\operatorname{sen}(x + \pi)$. La onda reflejada se representa mediante la expresión

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

$$g(x) = -\frac{\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{2}.$$

Grafica las funciones y responde, ¿qué transformación tiene la onda inicial luego de ser reflejada?

**5** Determina las características de la función representada en la Figura 4.78.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

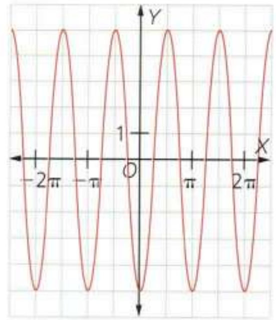



Figura 4.78

## Función tangente y función cotangente

### Ejercitación

**6** Las asíntotas verticales de la función $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ son:

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $x_1 = \dfrac{\pi}{2}; x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$

b. $y_1 = \dfrac{\pi}{2}; y_2 = \dfrac{3\pi}{2}$

c. $x_1 = \dfrac{\pi}{4}; x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$

d. $y_1 = \dfrac{\pi}{4}; y_2 = \dfrac{5\pi}{4}$

### Razonamiento

**7** Analiza la expresión $f(x) = 2\cot\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ y determina cuál es su gráfica aproximada.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a.

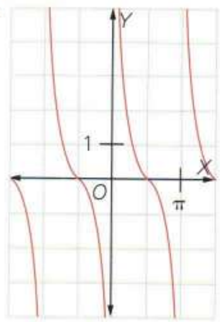



Figura 4.79

b.

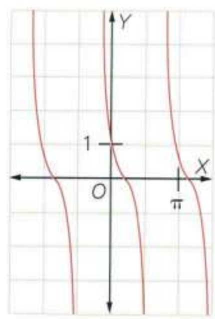



Figura 4.80

c.

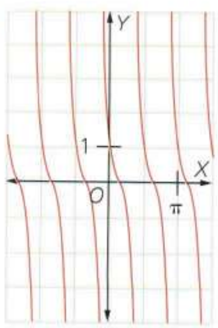



Figura 4.81

d.

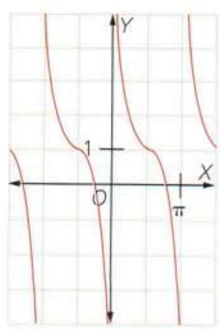



Figura 4.82

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### Modelación

**8** Determina una expresión utilizando la función cotangente que tenga la misma gráfica de la función $f(x) = \tan x$. PREGUNTA ABIERTA

## Función secante y función cosecante

### Comunicación

**9** Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) a partir de la expresión $f(x) = 3\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Justifica tu respuesta. VERDADERO/FALSO

a. La gráfica de $f(x)$ no tiene asíntotas.

b. El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$.

c. El periodo de $f(x)$ es igual a $\pi$.

d. El recorrido de $f(x)$ es igual a $\mathbb{R} - (-3, 3)$.

### Comunicación

**10** Observa la gráfica de la función $f(x) = \text{cosec}\, x$ para los $x \in (0, \pi)$. ¿Es una parábola? Justifica tu respuesta. ACTIVIDAD DE REFUERZO

## Identidades trigonométricas fundamentales

### Razonamiento

**11** Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) a partir de la figura. Justifica tu respuesta. VERDADERO/FALSO

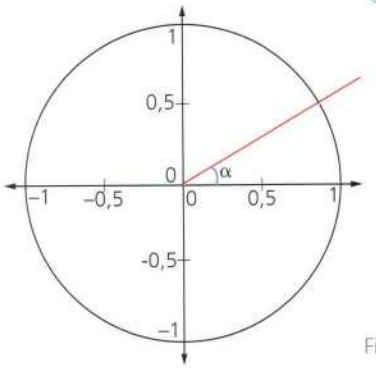



Figura 4.83

a. $\tan\alpha = 1$

b. $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$

c. $\cos\alpha = 0{,}5$

d. $\cos(90 - \alpha) = \frac{1}{2}$

e. $\text{cosec}\,\alpha = 2$

## Funciones trigonométricas en términos de las otras

### Ejercitación

**12** Selecciona la expresión equivalente a $\sec x$ en términos de $\text{sen}^2 x$. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $\dfrac{\sqrt{1+\text{sen}^2 x}}{1-\text{sen}^2 x}$

b. $\dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{1-\text{sen}^2 x}$

c. $\dfrac{1}{1-\text{sen}^2 x}$

d. $\dfrac{1}{1+\text{sen}^2 x}$

## Simplificación de expresiones trigonométricas

### Ejercitación

**13** Une cada expresión con su expresión equivalente. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $\dfrac{\cos^2 x - 2\cos x\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}$ • $2\,\text{cosec}\,x$

b. $(\sec x + \tan x)^2$ • $2\sec^2 x$

c. $\dfrac{\cos^3 x - \text{sen}^3 x}{\cos x - \text{sen}\,x}$ • $\dfrac{\cos x - \text{sen}\,x}{\cos x + \text{sen}\,x}$

d. $\dfrac{\text{cosec}\,x}{1+\text{cosec}\,x} - \dfrac{\text{cosec}\,x}{1-\text{cosec}\,x}$ • $1 + \cos x\,\text{sen}\,x$

e. $\dfrac{1+\sec x}{\tan x} + \dfrac{\tan x}{1+\sec x}$ • $\dfrac{1+\sec x}{1-\sec x}$

### Razonamiento

**14** Si $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, y $\cos\beta = -\frac{15}{17}$ y $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, halla el valor de cada una de las siguientes expresiones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\text{sen}(\alpha + \beta)$

b. $\cos 2\beta$

c. $\tan(\alpha - \beta)$

d. $\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

e. $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

f. $\tan(2\beta)$

## Coordenadas polares y cartesianas

### Comunicación

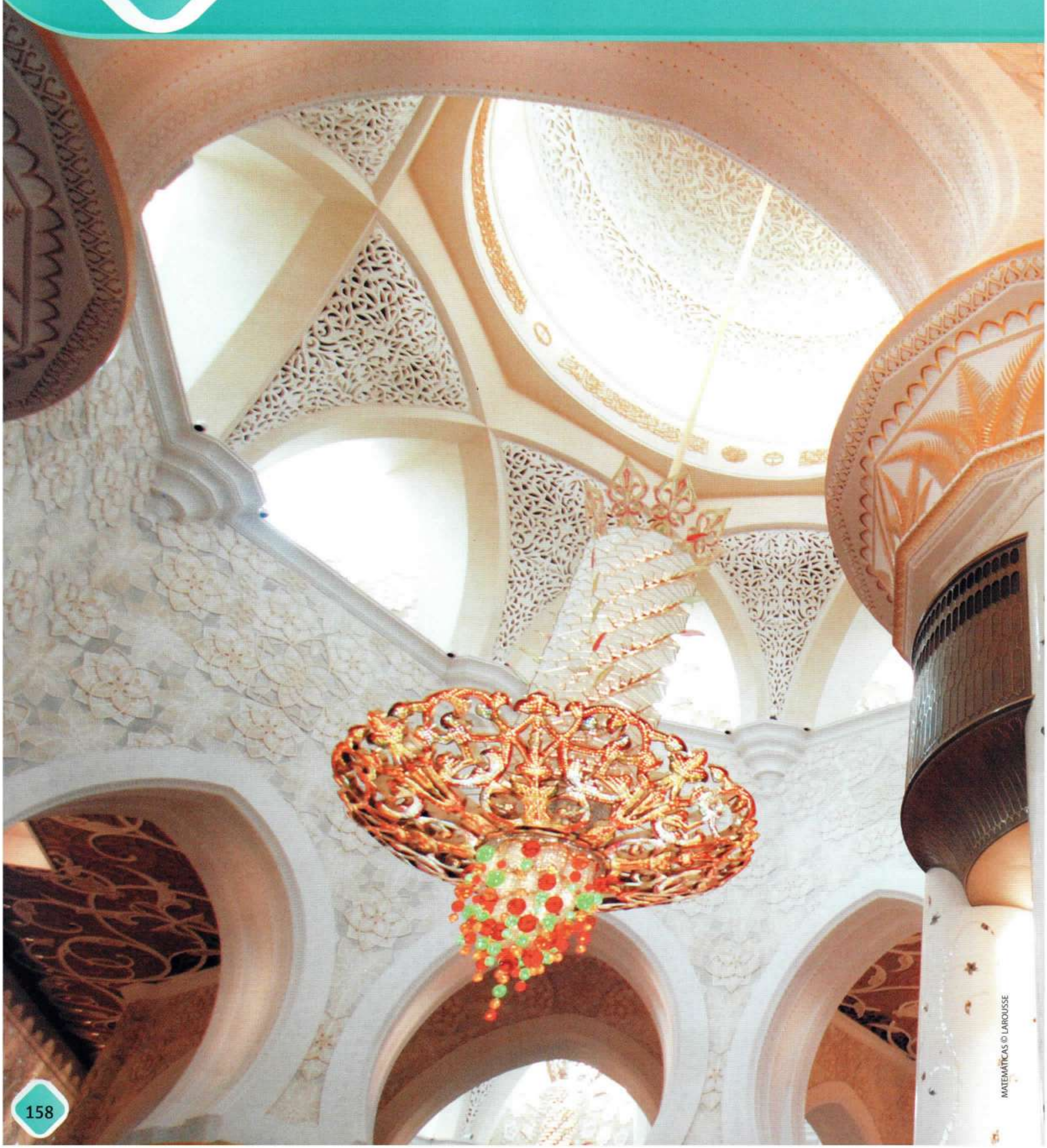
**15** Traza las curvas cuya ecuación polar es: ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $r = -1 + \cos\theta$

b. $r = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Geometría analítica



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ya sabemos

- Ubicar puntos en el plano cartesiano.
- Identificar los elementos de la circunferencia.

## Vamos a aprender

- A identificar los elementos y las características de la línea recta y las secciones cónicas.

## Nos sirve para

- Solucionar situaciones de la vida que se modelen con la línea recta o las secciones cónicas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Coordenadas cartesianas



**Saberes previos**

¿Qué distancia hay entre los puntos $-3$ y 5 sobre la recta numérica?

**Analiza**

Camilo ha ubicado en un plano cartesiano (Figura 5.1) la posición de las casas de sus amigos.

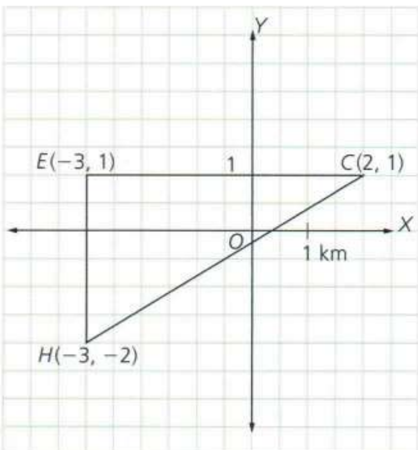



Figura 5.1

- ¿Qué distancia hay entre la casa de cada uno?

**Conoce**

## 1.1 Distancia entre dos puntos

En el plano, la casa de Camilo está ubicada en el primer cuadrante y sus coordenadas son (2, 1), donde 2 corresponde a la distancia sobre el eje $X$ (**abscisa**) desde el **origen** $\boldsymbol{O}$ y 1, a la distancia sobre el eje $Y$ u **ordenada** desde $\boldsymbol{O}$.

Para saber la distancia entre la casa de Camilo y la de Erika ($E(-3, 1)$) se halla la distancia horizontal, ya que sus coordenadas tienen la misma ordenada.

$$CE = |2 - (-3)| = |5| = 5 \text{ km}$$

Dados dos puntos $P$ y $Q$ con la misma ordenada, la **distancia entre $P$ y $Q$** es el valor absoluto de la diferencia entre las abscisas. Así, la distancia entre $P(x_1, y)$ y $Q(x_2, y)$, es:

$$PQ = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Para saber la distancia entre la casa de Hernán ($H(-3, -2)$) y la casa de Erika se halla la distancia vertical, puesto que sus coordenadas tienen la misma abscisa.

$$HE = |-2 - 1| = |-3| = 3 \text{ km}$$

Dados dos puntos $P$ y $Q$ con la misma abscisa, la **distancia entre $P$ y $Q$** es el valor absoluto de la diferencia entre las ordenadas. Así, la distancia entre $P(x, y_1)$ y $Q(x, y_2)$, es:

$$PQ = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

Finalmente, para encontrar la distancia entre la casa de Camilo y la casa de Hernán se construye el triángulo rectángulo $CEH$ y se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el valor de la hipotenusa que corresponde a tal distancia:

$$(CH)^2 = (CE)^2 + (HE)^2$$

Se reemplazan $CE$ y $HE$ que corresponden a los catetos del triángulo $CEH$:

$$(CH)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Se despeja $CH$:

$$CH = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Como $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ y $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$, entonces:

$$CH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ya que las coordenadas de la casa de Camilo son (2, 1) y las de la casa de Hernán son $(-3, -2)$, la distancia entre estas es:

$$d(C, H) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{34} \text{ km}$$

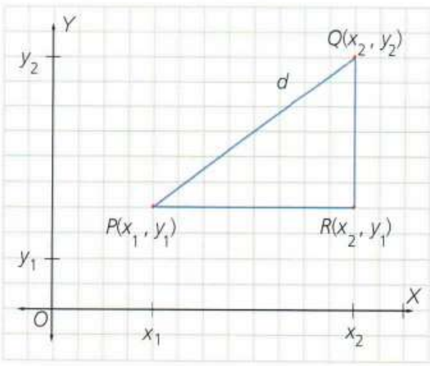



Figura 5.2

La **distancia entre dos puntos** cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano (Figura 5.2), se denota $d(P, Q)$ y se determina mediante la fórmula:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 1.2 Punto medio de un segmento

Dado un segmento de extremos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, las coordenadas de su **punto medio *M*** vienen dadas por la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

**Ejemplo 1**

Para hallar las coordenadas del punto medio $M$ del $\overline{AB}$, donde $A(-14, 54)$ y $B(46, 120)$, se calculan:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-14 + 46}{2} = 16$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{54 + 120}{2} = 87$$

Por consiguiente, $M(x_M, y_M) = (16, 87)$.

## 1.3 Inclinación y pendiente

Al representar una recta en el plano cartesiano se pueden dar varios casos.

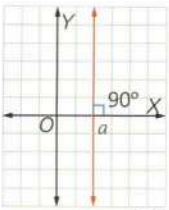



Figura 5.3

La recta es paralela al eje $Y$, su ecuación es $x = a$ y su **inclinación** es de 90°.

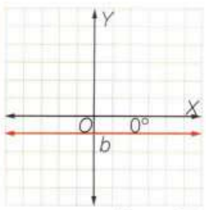



Figura 5.4

La recta es paralela al eje $X$, su ecuación es $y = b$ y su **inclinación** es de 0°.

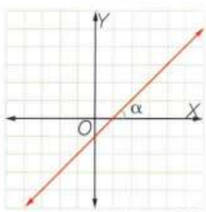



Figura 5.5

La recta corta a los dos ejes y su **inclinación** es de $\alpha < 90°$.

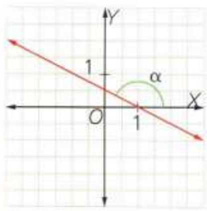



Figura 5.6

La recta corta a los dos ejes y su **inclinación** es de $90° < \alpha < 180°$.

La **pendiente de una recta** indica la variación entre los incrementos en el eje $Y$ respecto de los incrementos en el eje $X$. Si se toman dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ pertenecientes a una recta, la pendiente $(m)$ es la razón de cambio entre el desplazamiento vertical respecto del desplazamiento horizontal (Figura 5.7) y está dada por:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

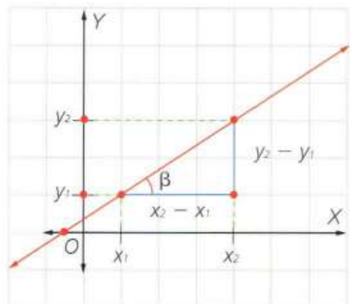



Figura 5.7

Además, para cualquier par de puntos se forma un triángulo rectángulo, donde la razón entre los catetos está relacionada con el **ángulo de inclinación de la recta**.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Cateto opuesto a } \beta}{\text{Cateto adyacente a } \beta} = \tan \beta$$

Es decir que $m = \tan \beta$; por lo tanto, para hallar el ángulo se tiene que $\beta = \tan^{-1} m$.

Al utilizar la notación $\tan^{-1} m$ se está haciendo referencia a la función inversa de la tangente, es decir, aquella que dado el valor de la tangente determina el ángulo para el cual se da dicho valor.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

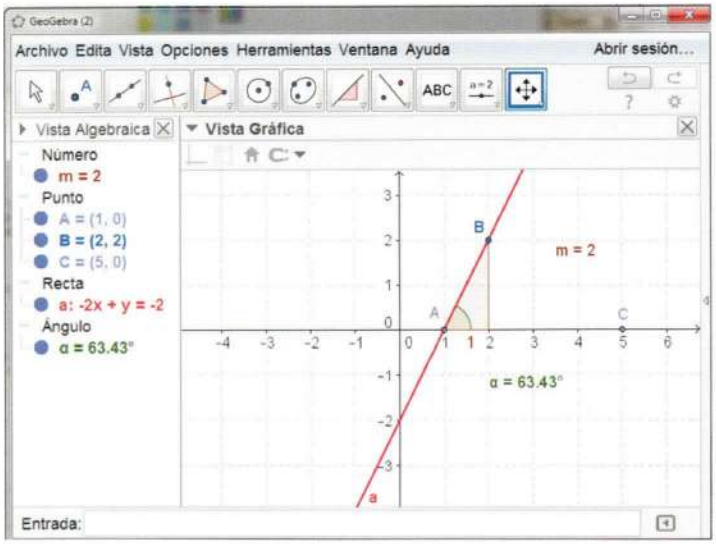
# 1 Coordenadas cartesianas

## MatemaTICS

**Halla la inclinación y la pendiente de una recta en GeoGebra**

• Sigue las instrucciones que se muestran a continuación y halla la inclinación y la pendiente de una recta.

- Abre GeoGebra. GeoGebra
- Verifica que en la interfaz estén habilitadas las opciones *Vista Gráfica* y *Vista Algebraica*; de lo contrario, habilítalas en el menú *Vista*.
- Selecciona para representar una recta que pase por los puntos (1, 0) y (2, 2).
- Ubica un punto en (5, 0) y con halla el ángulo de inclinación dando clic primero en el punto *C*, luego en *A* y finalmente en *B*.
- Selecciona y haz clic sobre la recta para hallar la pendiente *m*.




- Explora la construcción realizada seleccionando . Mueve el punto *B* y determina los valores α para los cuales la pendiente es positiva y para los cuales es negativa.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Encuentra, en cada caso, la distancia que hay del punto *P* al origen del plano cartesiano.

a. $P(2, 5)$ b. $P(-2, 3)$

c. $P(7, -6)$ d. $P(-4, -8)$

**2** Observa el plano y determina la distancia entre el par de puntos indicados en cada caso.

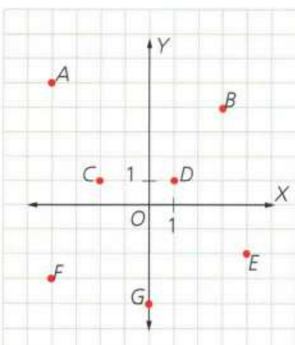



Figura 5.8

a. $d(A, B)$ b. $d(A, C)$ c. $d(B, F)$

d. $d(A, G)$ e. $d(D, A)$ f. $d(A, E)$

g. $d(A, F)$ h. $d(B, D)$ i. $d(C, D)$

### Comunicación

**3** Grafica los puntos, únelos siguiendo el orden alfabético y halla el perímetro de la figura resultante.

$A(1, 3)$ $B(-1, 2)$ $C(-3, 2)$

$D(0, -1)$ $E(1, 1)$ $F(3, 1)$

### Ejercitación

**4** Halla el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 0)$, $B(1, 23)$ y $C(3, 4)$.

### Razonamiento

**5** Encuentra el valor de *x* si la distancia entre los puntos $M(3, 29)$ y $N(x, 25)$ es 10.

**6** Halla los vértices restantes de las siguientes figuras.

a. De un cuadrado de lado 5 cm, donde dos vértices consecutivos tienen por coordenadas $A(-3, 2)$ y $B(-1, -1)$.

b. El tercer vértice de un triángulo rectángulo si los vértices que son extremos de la hipotenusa tienen coordenadas $A(2, -1)$ y $B(-1, 3)$.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ejercitación

**7** Encuentra las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$, dada su representación en el plano.

a.

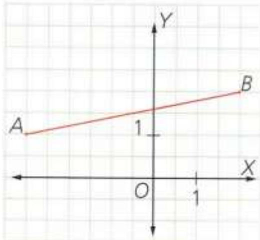



Figura 5.9

b.

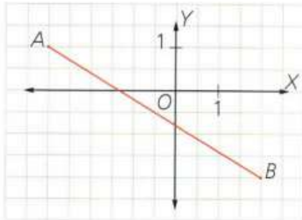



Figura 5.10

**8** Representa el segmento determinado por los puntos y halla las coordenadas del punto medio.

a. $A(2, 5)$ y $B(-1, -4)$ b. $A(5, -4)$ y $B(2, 5)$

c. $A(-3, -2)$ y $B(4, 4)$ d. $A(3, 6)$ y $B(0, -6)$

## Razonamiento

**9** Halla las coordenadas de uno de los extremos del segmento si se sabe que el otro extremo tiene coordenadas (8, 3) y que las coordenadas del punto medio del mismo segmento son (1, 22).

**10** Halla las coordenadas del punto $B$ si se conoce que $K$ es el punto medio de $\overline{AB}$. Traza $\overline{AB}$ en tu cuaderno.

a.

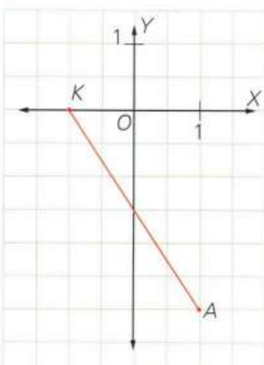



Figura 5.11

b.

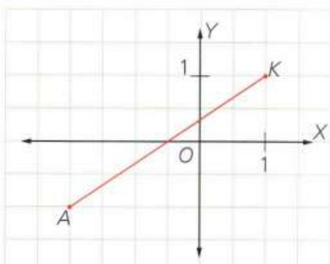



Figura 5.12

## Ejercitación

**11** Halla la pendiente de cada recta, dada su inclinación.

a. $\beta = 12°$ b. $\beta = 35°$ c. $\beta = 170°$ d. $\beta = 90°$

**12** Halla el ángulo la inclinación de cada recta, dada su pendiente.

a. $m = -2$ b. $m = \frac{1}{2}$ c. $m = -0{,}3$ d. $m = \frac{5}{4}$

## Modelación

**13** Representa cada recta según las condiciones dadas.

a. Pasa por los puntos $A(0{,}5, 4)$ y $B\left(\frac{3}{2}, -5\right)$.

b. $m = 3$ y corta el eje $X$ en 4.

c. Su inclinación es de 40° y pasa por (0, 0).

d. $m = \frac{3}{4}$ y corta el eje $Y$ en $-1$.

e. Su inclinación es de 135° y pasa por $(-2, 3)$.

f. $m = -\frac{1}{5}$ y pasa por $(2, -1)$.

**14** Determina las pendientes de las rectas que pasan por cada par de puntos.

a. $A(0, -2)$ y $B(-3, -2)$ b. $A(1, 4)$ y $B(-2, 1)$

c. $A(1, -2)$ y $B(-2, 3)$ d. $A(0, 6)$ y $B(0, 0)$

## Resolución de problemas

**15** Halla los puntos medios de los lados de cada figura. Únelos y halla el perímetro del polígono resultante.

a.

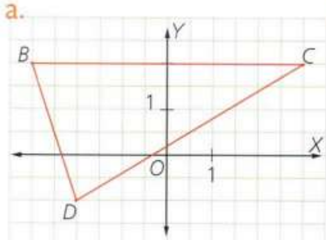



Figura 5.13

b.

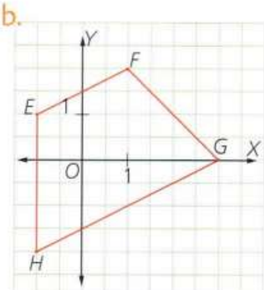



Figura 5.14

## Evaluación del aprendizaje

Mide en cada caso el ángulo de inclinación de las rectas dadas. Luego, calcula su pendiente.

a.

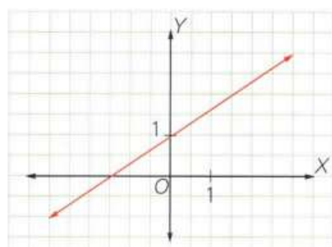



Figura 5.15

b.

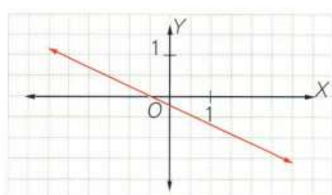



Figura 5.16

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 La línea recta

**Saberes previos**

Diana paga \$ 100 por cada minuto de llamada a celular. ¿Cuánto paga por una llamada de 3 minutos? ¿Cuánto paga por una llamada de 5 minutos? ¿Cuántos minutos duró una llamada por la que pagó \$ 1 200?

**Analiza**

El costo del servicio de gas natural de un hogar en estrato 3 lo determina el valor de los metros cúbicos consumidos más un cargo fijo de \$ 2 739.

- Si el valor de 1 m³ es de \$ 1 227,75, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular la relación entre el consumo y el costo mensual de gas?

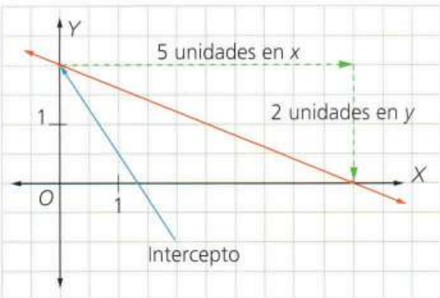



Figura 5.17

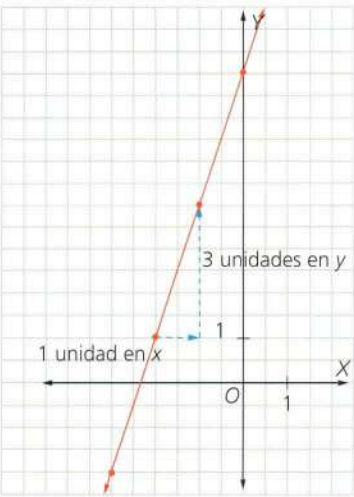



Figura 5.18

**Conoce**

El valor que se debe pagar por el servicio de gas natural se calcula mediante una relación lineal de la forma $y = mx + b$. En esta relación, $y$ corresponde al valor del servicio, $m$ al valor de un metro cúbico de gas, $x$ a la cantidad de metros cúbicos consumidos y $b$ al valor del cargo fijo. Como $m = 1\,227{,}75$ y $b = 2\,739$, se tiene que:

$$y = 1\,227{,}75x + 2\,739$$

Así, para un consumo de 3 $m^3$, $x = 3$ y el valor a pagar está dado por:

$$y = 1\,227{,}75(3) + 2\,739 = 6\,422{,}25$$

## 2.1 Ecuación de la recta cuando se conocen la pendiente y el intercepto con el eje *Y*

La expresión $y = mx + b$ recibe el nombre de **ecuación cartesiana de la recta**, y es la expresión algebraica que relaciona las coordenadas $(x, y)$ de los puntos $P$ que pertenecen a la recta. En la anterior ecuación, $m$ es la pendiente de la recta y $b$ es el valor en el que la recta interseca al eje $Y$ (intercepto).

**Ejemplo 1**

Para determinar la ecuación de una recta cuya pendiente ($m$) es $-\frac{2}{5}$ y el intercepto en $Y$ ($b$) es 2, se reemplazan los valores $m$ y $b$ en la ecuación cartesiana.

$$y = mx + b \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 2$$

Para representar la ecuación, se ubica el punto del intercepto en $Y$; es decir, $(0, 2)$ y se halla otro punto a partir de la pendiente: por cada 5 unidades que avanza $x$, $y$ baja 2 unidades (Figura 5.17).

## 2.2 Ecuación de la recta cuando se conocen un punto y la pendiente

La expresión $m(x - x_1) = (y - y_1)$ se conoce como **ecuación de la recta** en la forma **punto-pendiente**, y se obtiene conociendo un punto $A(x_1, y_1)$ de la recta y la pendiente $m$ de la misma.

**Ejemplo 2**

Para determinar la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ que pasa por el punto $(-3, -2)$, se reemplazan los valores en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$3(x - (-3)) = (y - (-2))$$
$$3x + 9 = y + 2$$

Despejando $y$ de la ecuación, se obtiene:

$$y = 3x + 7$$

Para representar la ecuación, se ubican el intercepto: $(0, 7)$ y la coordenada $(-3, -2)$. Luego se verifica gráficamente la pendiente (Figura 5.18).

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 3**

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(2, \sqrt{3}\right)$ cuya inclinación es 60°, se halla la pendiente utilizando la expresión $\tan 60° = \sqrt{3}$ y luego se reemplazan los valores en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$\sqrt{3}(x - 2) = \left(y - \sqrt{3}\right)$$
$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = y - \sqrt{3}$$

Despejando $y$ de la ecuación, se obtiene que:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

## 2.3 Ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos

A fin de determinar la **ecuación de una recta cuando se conocen las coordenadas de dos puntos** que pertenecen a la misma, primero se halla la pendiente $m$ y luego se utiliza la ecuación punto-pendiente.

**Ejemplo 4**

Para determinar la ecuación de la recta de la Figura 5.19 que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(-2, 1)$, se lleva a cabo el siguiente procedimiento.

- Se halla la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{-2 - 3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

- Se reemplazan los valores en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$-\frac{3}{5}(x - 3) = (y - (-2))$$
$$-\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} = y + 2$$
$$-\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} - 2 = y$$
$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$$

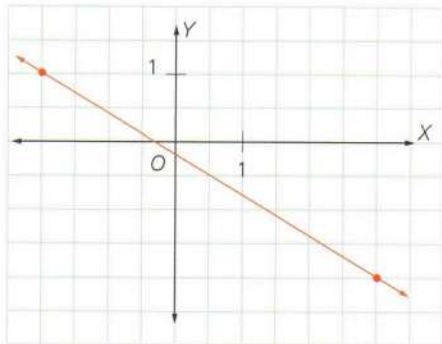


Figura 5.19

## 2.4 Ecuación general de la recta

La expresión $Ax + By + C = 0$, donde $A$, $B$ y $C$ son números reales, se denomina **ecuación general de la recta**.

Al despejar $y$ de la ecuación general, es posible obtener la ecuación cartesiana de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

De esta manera se puede concluir que, dada una ecuación en su expresión general, la **pendiente** es $-\frac{A}{B}$ y el **intercepto en el eje** $Y$ es $-\frac{C}{B}$, con $B \neq 0$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 5**

Para encontrar la pendiente y el punto de corte con el eje $Y$ de una recta cuya ecuación está dada por $-2x + 3y + 2 = 0$, se despeja la variable $y$ de la ecuación general, así:

$$-2x + 3y + 2 = 0$$
$$3y = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$$

Por tanto, se tiene que:

$$m = \frac{2}{3} \text{ y } b = -\frac{2}{3}$$

**Ejemplo 6**

Observa cómo se establece la ecuación general de la recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 5).

Se halla la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Luego, se utiliza la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$2(x - 1) = (y - 1)$$
$$2x - 2 = y - 1$$
$$y = 2x - 1$$

Como $y = 2x - 1$, entonces $-2x + y + 1 = 0$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es:

$$-2x + y + 1 = 0$$

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Representa las siguientes rectas a partir del punto de corte con el eje $Y$ y la pendiente.

a. $y = 2x - 3$

b. $y = -0{,}5x + 1{,}5$

c. $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$

d. $y = -x + 4$

### Ejercitación

**2** Halla la ecuación general de cada recta según las condiciones dadas.

a. Pendiente 2 y corte con el eje $Y$ en $-3$.

b. Pendiente $-\frac{1}{2}$ y corte con $Y$ en $-\frac{3}{5}$.

c. Inclinación 30° y corte con el eje $Y$ en 1.

**3** Halla la ecuación cartesiana de cada recta a partir de la pendiente y un punto de la misma.

a. $m = -2$ y $(1, 0)$

b. $m = 6$ y $\left(5, -\frac{2}{5}\right)$

c. $m = 14$ y $(-2, 1)$

d. $m = -0{,}75$ y $\left(\frac{1}{4}, 3\right)$

### Comunicación

**4** Observa las gráficas y escribe en tu cuaderno la ecuación cartesiana de cada recta.

a.

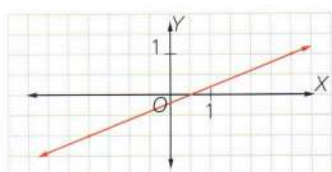



Figura 5.20

b.

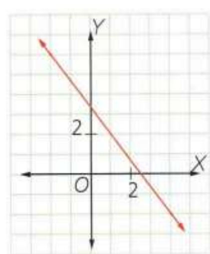



Figura 5.21

c.

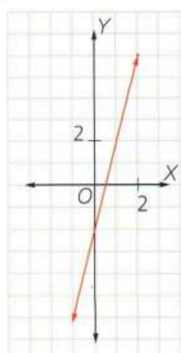



Figura 5.22

d.

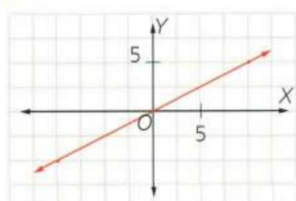



Figura 5.23

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ejercitación

**5** Halla la ecuación cartesiana de cada recta a partir de los puntos dados.

a. $A(1, -2)$ y $B(-3, -2)$ b. $O\left(1, \frac{4}{3}\right)$ y $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$

c. $M(0, -3)$ y $N\left(-1, \frac{3}{7}\right)$ d. $H\left(-1, -\frac{6}{7}\right)$ y $K(1, 0)$

**6** Determina la pendiente y el corte con el eje $Y$ de cada recta.

a. $2x - 2y + 3 = 0$ b. $-5x + 3y - 7 = 0$

c. $-5y - 1 = x$ d. $\frac{3}{2}x + 2y - 5 = 0$

**7** Halla la ecuación general de cada recta según las condiciones dadas.

a. Pasa por los puntos $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -5\right)$.

b. La pendiente es $\frac{1}{3}$ y el intercepto en el eje $Y$ es 3.

c. Pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(0, -3)$.

d. La inclinación es de 60° y el intercepto en el eje $Y$ es 4.

e. La inclinación es de 150° y pasa por $(2, -1)$.

## Comunicación

**8** Observa cada gráfica y escribe su ecuación general.

a.

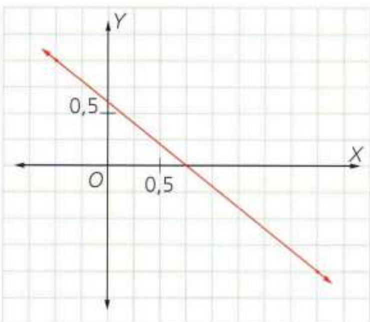



Figura 5.24

b.

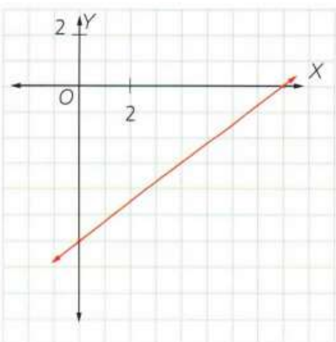



Figura 5.25

## Resolución de problemas

**9** Un servicio especializado de taxi cobra \$ 1 500 por kilómetro recorrido más un cobro básico para el conductor de \$ 2 000.

a. Representa la relación mediante una ecuación.

b. Representa en un plano cartesiano la relación.

c. Si una persona solicita el servicio y no ha recorrido ningún kilómetro, ¿cuánto tendrá que pagar?

d. ¿Cuál sería el costo de un servicio en el que se recorren 15 km?

**10** En la Figura 5.26 se muestra el costo de producción de llantas para camión.


Figura 5.26

a. Halla la ecuación que representa la relación.

b. ¿Cuál es el costo de producción de 15 llantas?

c. Si el costo de producción es de \$ 170 000, ¿cuántas llantas se producen?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Dibuja el triángulo que se genera con las tres rectas dadas y determina la pendiente de cada recta.

$$-x + 3y + 10 = 0$$
$$-3x + 2y = 5$$
$$2x + y - 20 = 0$$

**ii** Encuentra las ecuaciones de las diagonales del rectángulo que tiene como vértices las coordenadas $A(4, 6)$, $B(10, 6)$, $C(10, -2)$ y $D(4, -2)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Posiciones relativas de dos rectas en el plano

**Saberes previos**

Las calles de una ciudad corren de norte a sur y las carreras de oriente a occidente formando una cuadrícula. Traza un plano de las calles 1 a 5 y las carreras 1 a 5.

**Analiza**

Se representan dos rectas en el plano.

- ¿Qué tipo de relación se puede establecer? ¿Qué características tienen sus ecuaciones?

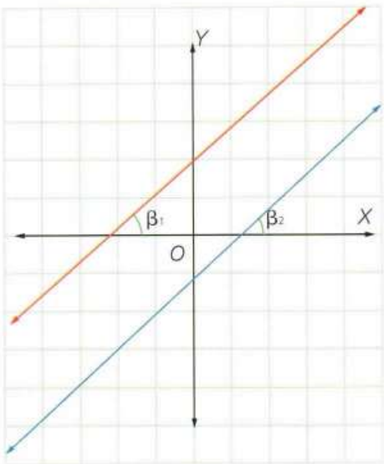



Figura 5.27

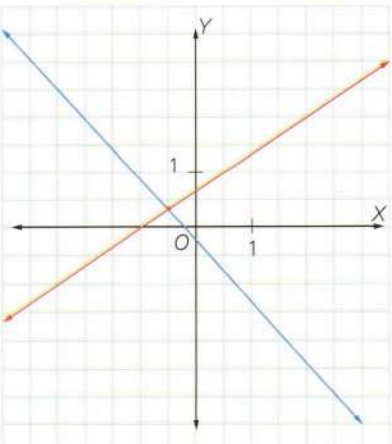



Figura 5.29

**Conoce**

Al trazar dos rectas en un plano cartesiano, estas pueden ser **coincidentes**, **paralelas**, **secantes** o **perpendiculares**. Las características de sus ecuaciones se enuncian a continuación.

## 3.1 Rectas coincidentes

Dos rectas cuyas ecuaciones generales son:

$Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ son **coincidentes** si los coeficientes entre las dos rectas son proporcionales, es decir:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = k, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

Gráficamente este tipo de rectas coinciden en el trazo.

## 3.2 Rectas paralelas

Dos rectas en el plano son **paralelas** si sus ángulos de inclinación son congruentes. Al trazar dos rectas paralelas en el plano cartesiano (Figura 5.27), se tiene que $\beta_1 = \beta_2$; por lo tanto, $\tan \beta_1 = \tan \beta_2$. Luego, las pendientes de las rectas son iguales ($m_1 = m_2$).

**Ejemplo 1**

Para hallar una recta paralela a $2x - 3y + 4 = 0$ que pase por $(2, 1)$, primero se identifica la pendiente de la ecuación dada utilizando la expresión $m = -\frac{A}{B}$, de donde $m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$. Luego, se busca la nueva ecuación a partir de la ecuación punto-pendiente y se grafica (Figura 5.28).

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$

$$\frac{2}{3}(x - 2) = (y - 1)$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = y - 1$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 = y$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

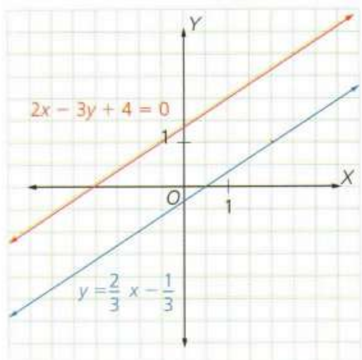



Figura 5.28

## 3.3 Rectas secantes

Dos rectas en el plano son **secantes** si se cortan en un solo punto. Dos rectas con ecuaciones generales $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ son secantes si sus coeficientes no son proporcionales (Figura 5.29); esto es:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Las rectas secantes tienen pendientes diferentes; además, se puede determinar la medida del ángulo que forman en el punto donde se intersecan.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### 3.3.1 Ángulo entre dos rectas secantes

Dos rectas secantes forman ángulos al intersecarse. En la Figura 5.30 se representan las rectas secantes $l_1$ y $l_2$ con ángulos de inclinación $\theta_1$ y $\theta_2$, respectivamente. Si $\beta$ es el ángulo que forman las dos rectas, entonces $\beta = \theta_2 - \theta_1$. Además, como $\tan\theta_1 = m_1$ y $\tan\theta_2 = m_2$, se cumple que:

$$\tan\beta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \cdot \tan\theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

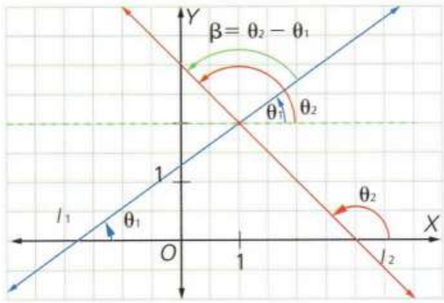


Figura 5.30

Por lo tanto, el ángulo $\beta$ formado por las rectas $l_1$ y $l_2$ cuyas pendientes son $m_2$ y $m_1$, respectivamente, corresponde a:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right)$$

**Ejemplo 2**

Con el fin de determinar el ángulo que forman las rectas $5x + 4y - 2 = 0$ y $6x - 3y - 4 = 0$ (Figura 5.31), se halla la pendiente de cada recta.

Si $5x + 4y - 2 = 0$, entonces: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$, donde $m_1 = -\frac{5}{4}$

Si $6x - 3y - 4 = 0$, entonces: $y = 2x - \frac{4}{3}$, donde $m_2 = 2$

Por consiguiente, se tiene que:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2 - \left(-\frac{5}{4}\right)}{1 + 2\left(-\frac{5}{4}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{13}{6}\right) = 65{,}22°$$

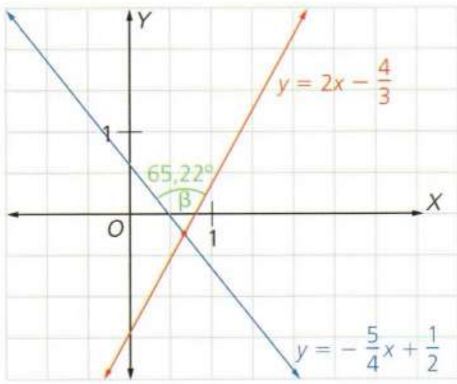


Figura 5.31

### 3.3.2 Rectas perpendiculares

Dos rectas secantes $l_1$ y $l_2$ son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes $m_1$ y $m_2$, respectivamente, es $-1$. Es decir, si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

**Ejemplo 3**

Para hallar una recta perpendicular a la recta $-4x - 5y = 7$ (Figura 5.32) que pase por $(-2, 3)$, se halla la pendiente $m_1$ de la recta dada.

Si $-4x - 5y = 7$, entonces: $y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$, donde $m_1 = -\frac{4}{5}$.

Luego, se despeja $m_2$ de $m_1 \cdot m_2 = -1$ y se halla su valor.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{-4}{5}} = \frac{5}{4}$$

Se reemplaza $m_2$ y el punto $(-2, 3)$ en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$

$$\frac{5}{4}(x - (-2)) = (y - 3)$$

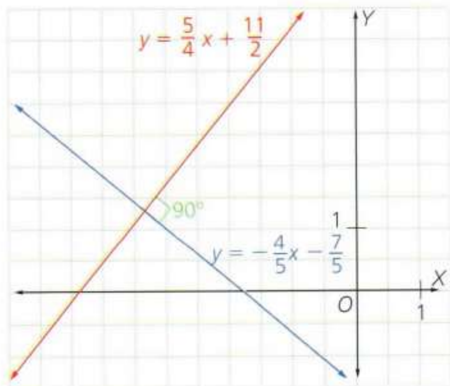


Figura 5.32

De donde se obtiene que:

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$$

En su forma general:

$$-5x + 4y - 22 = 0$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Posiciones relativas de dos rectas en el plano

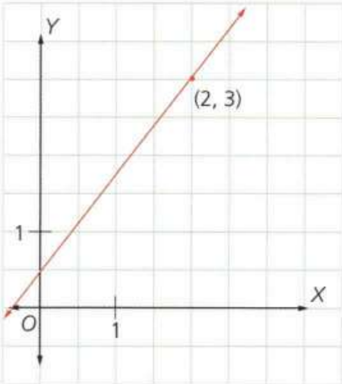



Figura 5.33

Para determinar la **distancia de un punto** $P(x_0, y_0)$ **a una recta** $l$ de ecuación $Ax + By + C = 0$, se puede utilizar la fórmula:

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Ejemplo 4**

A fin de hallar la distancia del punto (2, 3) a la recta $3x - 2y + 1 = 0$ (Figura 5.33), se reemplazan los valores en la fórmula expresada.

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(2) - 2(3) + 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

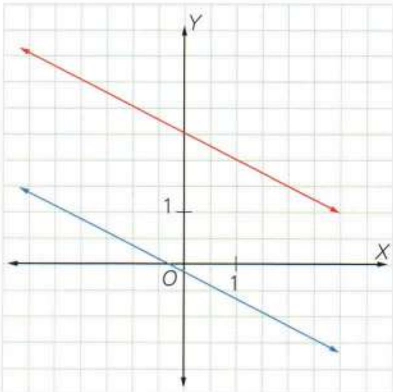



Figura 5.34

Para determinar la **distancia entre dos rectas paralelas** $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, se puede utilizar la expresión:

$$d = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Ejemplo 5**

Con el fin de determinar la distancia entre las rectas $x + 2y - 5 = 0$ y $2x + 4y + 1 = 0$, en primer lugar, se establece si las rectas son paralelas.

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2} \qquad m_2 = -\frac{A'}{B'} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Como las dos rectas son paralelas (Figura 5.34) , se utiliza la expresión vista anteriormente.

$$d = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 - (-5)|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Identifica el tipo de relación que se presenta entre cada par de rectas.

a. $x - y + 2 = 0$ y $2x - 2y + 4 = 0$

b. $-6x + 2y - 1 = 0$ y $9x - 3y + 2 = 0$

c. $2x - 6y + 5 = 0$ y $3x - y - 8 = 0$

d. $4x - y + 5 = 0$ y $6x - 2y - 1 = 0$

**2** Escribe la ecuación de la recta que es paralela a la recta dada y pasa por el punto dado.

a. $(2, 3)$; $x + 2y + 5 = 5$

b. $(-1, 0)$; $y - 3 = 9x$

c. $(0, -2)$; $-4x + 1 = y$

d. $(3, 3)$; $3x - 7 = 2y$

### Comunicación

**3** Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta dada.

a. $(3, 1)$; $x - y + 2 = 0$

b. $(-1, 0)$; $-x + 1y - 4 = 0$

c. $(4, -3)$; $2y + 1 = 2x$

d. $(1, -5)$; $y = 12x + 35$

e. $(-6, -1)$; $-6x + 2 = -2y$

**4** Representa cada par de rectas en el plano y halla el ángulo comprendido entre ellas.

a. $2x - 2y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$

b. $-3x + y + 4 = 0$ y $x - 5y - 2 = 0$

c. $3x - y - 1 = 0$ y $2x - 3y - 4 = 0$

d. $10x - 5y = 2$ y $3x - 4y + 2 = 0$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**5** Grafica en un mismo plano las rectas según las condiciones dadas. Identifica las rectas perpendiculares, las paralelas, las coincidentes y las secantes.

a. Recta $m$: pasa por el punto $(3, 2)$ y tiene pendiente $-2$.

b. Recta $n$: pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(5, 2)$.

c. Recta $l$: tiene como ecuación $2x + y = 8$.

d. Recta $k$: tiene como ecuación $-x + 2y = 3$.

e. Recta $p$: tiene inclinación de $-30{,}96°$ y pasa por $(-1, 1)$.

### Ejercitación

**6** Determina la distancia entre el punto y la recta dados.

a. $(2, 2)$; $2x - 3y - 4 = 0$

b. $(-5, 2)$; $3x + 7y + 5 = 0$

c. $(-7, -2)$; $4y + x = 2$

d. $(3, 0)$; $y = 2x + 23$

e. $(2, -3)$; $5x + 1 = y$

**7** Determina la distancia entre cada par de rectas.

a. $2x - 6y = 2$ y $-4x + 3y + 1 = 0$

b. $-5x + 3y + 2 = 0$ y $15x - y - 3 = 0$

c. $4x - 2y - 4 = 0$ y $x - \frac{1}{4}y - 4 = 0$

d. $2x - 1y = 0$ y $3x - 6y + 4 = 0$

### Razonamiento

**8** Demuestra que los puntos dados en el plano de la Figura 5.35 son los vértices de un cuadrado.

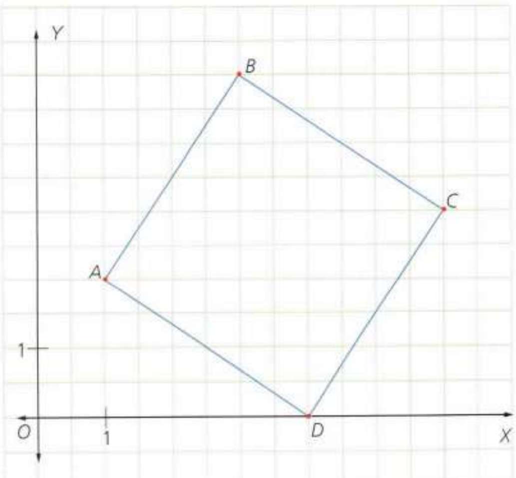


Figura 5.35

**9** En la Figura 5.36, se muestran tres rectas que determinan un triángulo. Halla la medida de los ángulos internos.

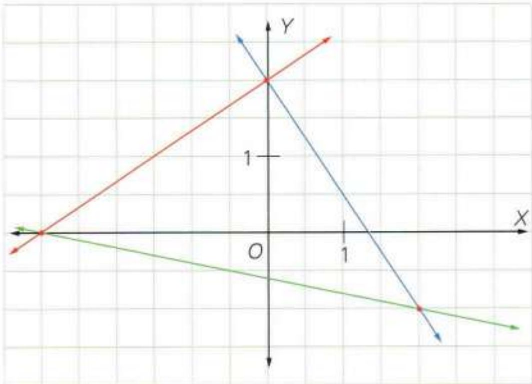


Figura 5.36

### Resolución de problemas

**10** Comprueba cada afirmación.

a. El triángulo de vértices $(-3, -1)$, $(-3, 2)$ y $(2, -1)$ es rectángulo.

b. El triángulo de vértices $(-5, -2)$, $(1, -2)$ y $(-2, 3)$ es isósceles.

c. Los puntos con coordenadas $(-1, -1)$, $(4, 2)$, $(8, 2)$ y $(5, -5)$ determinan un rectángulo.

## Evaluación del aprendizaje

**i** Analiza las pendientes de cada par de rectas. ¿Qué puedes concluir?

a. $x - y = 2$ y $x + y + 1 = 0$

b. $2x - 3y - 4 = 0$ y $2x + 3y + 1 = 0$

c. $x + y - 4 = 0$ y $x - y + 4 = 0$

d. $3x - y = 0$ y $3x + y + 4 = 0$

**ii** Halla la medida de los ángulos internos del polígono de la Figura 5.37. Luego, halla su perímetro.

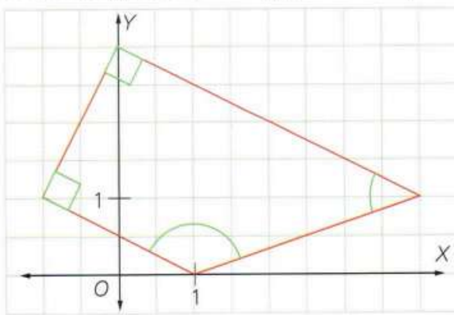


Figura 5.37

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Secciones cónicas

**Saberes previos**

Describe las características de un cono.

**Analiza**

En la Figura 5.38, las rectas $e$ y $g$ son secantes.

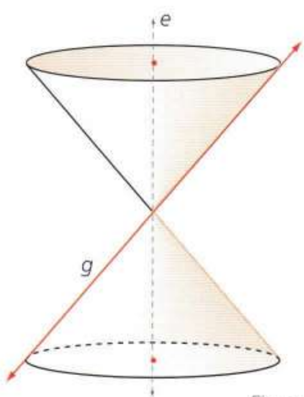



Figura 5.38

- ¿Cómo se obtiene la anterior figura a partir de las rectas $e$ y $g$?

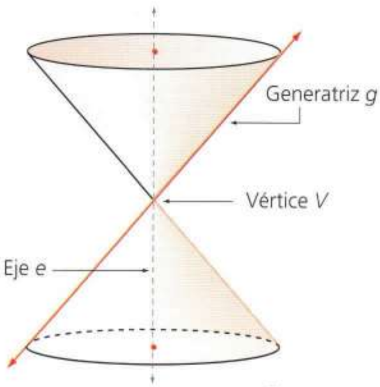



Figura 5.39

**Conoce**

La Figura 5.38 se puede obtener al hacer girar la recta $g$ alrededor de la recta $e$.

Una **superficie cónica** es aquella que se obtiene al hacer girar una recta $g$ (generatriz) alrededor de otra recta $e$ (eje), cuando $g$ y $e$ son secantes (Figura 5.39). El punto de corte de las dos rectas se llama vértice $V$ de la superficie.

Esta superficie está compuesta por dos conos adosados por el vértice y simétricos uno del otro con respecto al vértice.

Desde otro punto de vista, la superficie está formada por infinitas **generatrices** que pasan por $V$ y forman el mismo ángulo con el eje (una de ellas es la recta $g$).

Al cortar la superficie cónica con un plano se obtienen unas secciones conocidas como **secciones cónicas**.

- Cuando el plano contiene al vértice, se obtienen las llamadas **cónicas degeneradas**. Según la relación que haya entre el ángulo $\alpha$ que forma la generatriz con el eje y el ángulo $\beta$ que forma el plano con el eje (Tabla 5.1), se obtiene un punto, una recta o un par de rectas secantes.

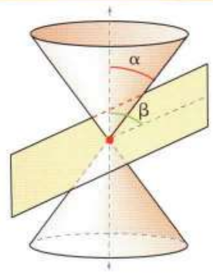
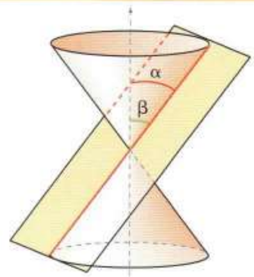
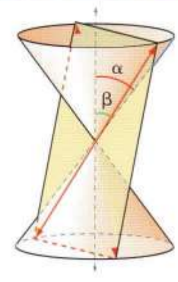
| Un punto | Una recta | un par de rectas secantes |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $\alpha < \beta$ | $\alpha = \beta$ | $\alpha > \beta$ |

Tabla 5.1

- Cuando el plano no contiene al vértice de la superficie, se obtienen **cónicas no degeneradas**. Se pueden dar los cuatro casos dados en la Tabla 5.2.

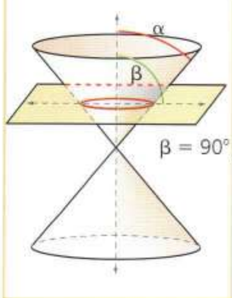
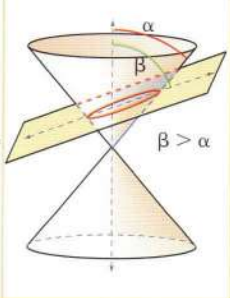
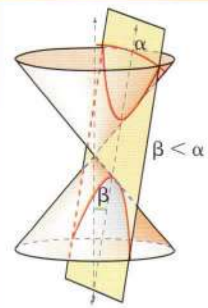
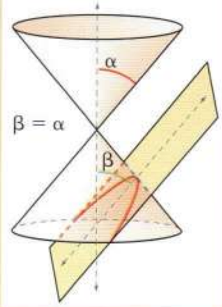
| Circunferencia | Elipse | Hipérbola | Parábola |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |
| El plano secante es perpendicular al eje. | El plano secante forma con el eje un ángulo mayor que con las generatrices. | El plano secante forma con el eje un ángulo menor que con las generatrices y corta las dos hojas de la superficie cónica. | El plano secante es paralelo a una generatriz y corta solo una de las hojas de la superficie cónica. |

Tabla 5.2

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

En la Tabla 5.2 se observa que para la circunferencia y la elipse, la cónica es una curva cerrada y corta todas las generatrices; para la hipérbola y la parábola, la cónica es una curva abierta y no corta todas las generatrices.

## 4.1 Ecuación general de segundo grado

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $A, B, C, D, E$ y $F$ son números reales y $A, B$ y $C$ son diferentes de cero, se denomina **ecuación general de segundo grado** y permite determinar una sección cónica.

Si la cónica es no degenerada, de acuerdo con el signo de $B^2 - 4AC$ se puede establecer de qué tipo es.

- Si $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, la curva es una parábola.
- Si $B^2 - 4AC > 0$, es una hipérbola.

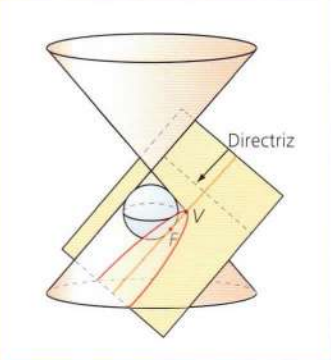
El número $B^2 - 4AC$ recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación.

## 4.2 Elementos de las cónicas

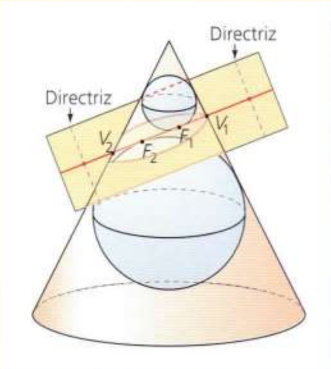
En la Tabla 5.3 se presentan los elementos de las cónicas.

- El **foco** $F$ o los focos de una sección cónica son los puntos de tangencia del plano secante que genera la cónica con las esferas inscritas al cono, que son tangentes, a la vez, al plano.
- La **directriz** de una curva cónica es la recta de intersección del plano secante con el plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera que, siendo tangente al plano secante, está inscrita en la circunferencia cónica.
- Dado un punto de la cónica, se llama **excentricidad** a la razón constante entre la distancia de dicho punto al foco y a la directriz correspondiente. La excentricidad de una parábola es igual a 1, la de una elipse es menor que 1; y, la de una hipérbola es mayor que 1.

**Parábola**




**Elipse**




**Hipérbola**

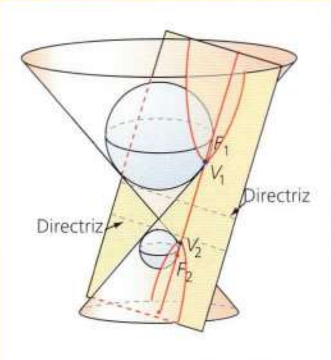



Tabla 5.3

### Actividades de aprendizaje

**Comunicación**

1. Usa el discriminante para determinar si la ecuación dada corresponde a una parábola, a una elipse o a una hipérbola.
   a. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$
   b. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$
   c. $9x^2 - 24xy - 16y^2 = 100x - 100y - 100$
   d. $25x^2 - 120xy = -144y^2 + 156x + 65y$
   e. $53x^2 + 72xy + 73y^2 - 40x + 30y = 75$

### Evaluación del aprendizaje

¿Es posible generar una parábola, una elipse o una hipérbola haciendo cortes en alguno de los siguientes sólidos? Explica cómo lo harías.

a.

Figura 5.40

b.

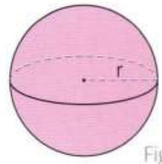



Figura 5.41

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 La circunferencia

## Saberes previos

¿Cómo se puede calcular el perímetro de una circunferencia?

## Analiza

Un patinador recorre todos los días una pista circular que tiene un diámetro de 50 m.

- ¿Cuántos metros recorre el patinador al dar una vuelta?

## Conoce

Para conocer la cantidad de metros que recorre el patinador al dar una vuelta a la pista, se utiliza la expresión que permite calcular la longitud de una circunferencia, esto es $L_c = 2\pi r$.

Como el valor del diámetro corresponde a dos veces el valor del radio, entonces:

$$L_c = 2\pi(25 \text{ m}) = 157{,}08 \text{ m}$$

Por tanto, el patinador recorre 157,08 m al dar una vuelta a la pista.

Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, denominado **centro**, es constante. A dicha distancia constante se le conoce como **radio**.

## 5.1 Elementos de la circunferencia

En la Figura 5.42 se representan los elementos de una circunferencia.

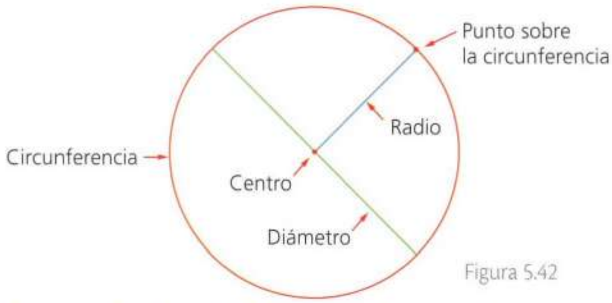



Figura 5.42

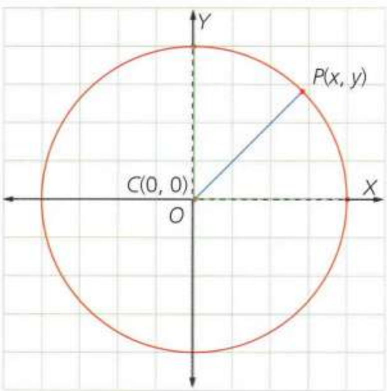



Figura 5.43

## 5.2 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0, 0)

En una circunferencia con centro $C(0, 0)$, radio $r$ y $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia (Figura 5.43), se cumple que $d(C, P) = r$.

Si se utiliza la fórmula de la distancia, se tiene que:

$$d(C, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad, se obtiene la **ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0, 0)**.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

**Ejemplo 1**

El centro de la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 9$, es $(0, 0)$ y su radio $r$ es 3, porque $3^2 = 9$.

Con estos datos en la Figura 5.44 se representa la circunferencia correspondiente.

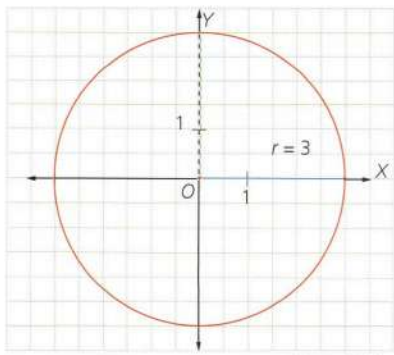



Figura 5.44

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

Si se quiere hallar la ecuación de la circunferencia representada en la Figura 5.45, primero se identifica que el centro de la circunferencia es (0, 0) y el valor del radio 4. Luego, se reemplazan estos valores en la ecuación canónica.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

La ecuación canónica de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 16$.

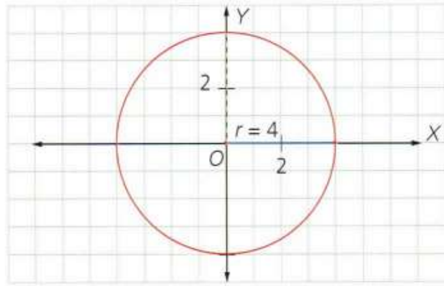


Figura 5.45

**Ejemplo 3**

Para comprobar que $P(-3, 4)$ pertenece a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$, se reemplaza la coordenada $(x, y)$ en la ecuación canónica por las coordenadas de $P$ y se verifica que se cumpla la igualdad.

$$x^2 + y^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Como al reemplazar la coordenada del punto $P$ en la ecuación se satisface la igualdad, entonces el punto pertenece a la circunferencia.

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Representa cada circunferencia en el plano.

a. $x^2 + y^2 = 81$

b. $x^2 = -y^2 + 4$

c. $x^2 + y^2 = 2$

d. $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

### Ejercitación

**2** Halla la ecuación canónica de cada circunferencia de acuerdo con las condiciones dadas y sabiendo que el centro es (0, 0).

a. $r = 6$

b. Pasa por el punto $(-4, -2)$

c. $r = \sqrt{5}$

d. Pasa por el punto $(0, -7)$

e. $r = 23$

f. Pasa por el punto $(6, -3)$

### Resolución de problemas

**3** Verifica en cada caso si el punto $P$ pertenece a la circunferencia dada.

a. $P(5{,}66, -2)$; $x^2 + y^2 = 36$

b. $P(4, 2)$; $x^2 + y^2 = 20$

c. $P(6, -6)$; $x^2 + y^2 = 72$

## Evaluación del aprendizaje

Halla la ecuación canónica de cada circunferencia.

a.

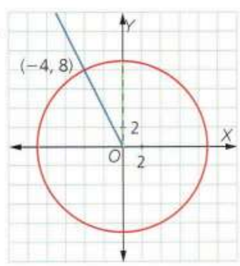


Figura 5.46

b.

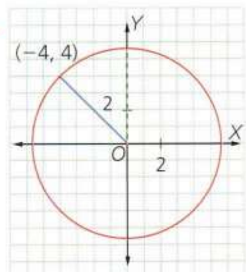


Figura 5.47

## Estilos de vida saludable

Rodearte de gente positiva, te ayudará a alcanzar tus metas y te hará sentir bien contigo mismo. Por esto, la gente suele comentar que es importante escoger muy bien el círculo de amigos.

- ¿Por qué es importante que elijas bien a tus amigos?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en $(h,k)$

## Saberes previos

Traza una circunferencia en un plano cartesiano con centro en (0, 0) y radio 4, escribe 4 puntos que se hallen sobre esta.

## Analiza

La ecuación canónica de la circunferencia con centro (0, 0) es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

- ¿Cuál es la ecuación canónica si el centro de la circunferencia no es (0, 0)?

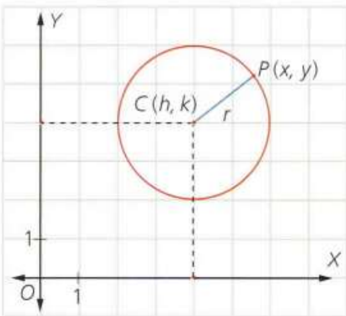


Figura 5.48

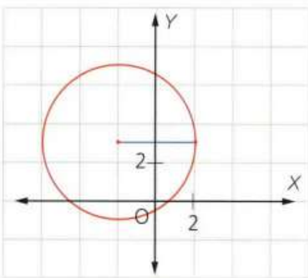


Figura 5.49

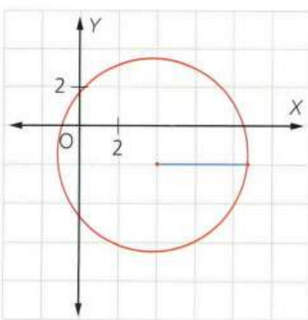


Figura 5.50

## Conoce

En una circunferencia con centro $C(h, k)$, radio $r$ y $P(x, y)$ un punto de la circunferencia, se cumple que $d(C, P) = r$ (Figura 5.48).

Para encontrar la distancia entre los puntos $C$ y $P$, se utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos.

$$d(C, P) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Por lo tanto, $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$.

Al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad, se obtiene la **ecuación canónica de la circunferencia con centro en $(h, k)$** y radio $r$:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

### Ejemplo 1

Para determinar la ecuación canónica de la circunferencia con centro $C(-2, 3)$ y radio 4, se sustituyen los valores de las coordenadas del centro ($h = -2$ y $k = 3$), y el valor del radio ($r = 4$) en la ecuación canónica.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = 4^2$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

En la Figura 5.49 se representa esta circunferencia.

### Ejemplo 2

Para hallar el valor del radio y las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación canónica es $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$, se expresa 25 como $5^2$. En la ecuación $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5^2$ se identifican los valores $h = 4$, $k = -2$ y $r = 5$. Por lo tanto, el centro de la circunferencia es $(4, -2)$ y el radio es 5. En la Figura 5.50 se representa esta circunferencia.

### Ejemplo 3

A fin de determinar la ecuación canónica de la circunferencia representada en la Figura 5.51, se sustituyen los valores de las coordenadas del centro ($h = -2$ y $k = 0$) y el radio ($r = 3$) en la ecuación canónica.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-(-2))^2 + (y-0)^2 = 3^2$$
$$(x+2)^2 + y^2 = 9$$

Por lo tanto, la ecuación canónica de la circunferencia representada en la Figura 5.51 es:

$$(x+2)^2 + y^2 = 9$$

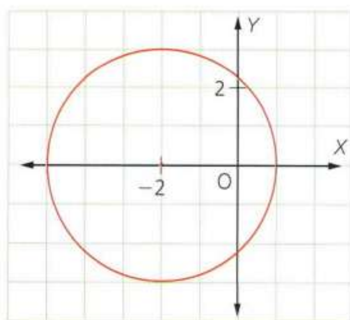


Figura 5.51

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 4**

Para determinar la ecuación canónica de la circunferencia cuyas coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros son $Q(-3, 2)$ y $R(-3, -4)$ se halla la coordenada del centro de la circunferencia con la fórmula del punto medio.

$$M\left(\frac{-3+(-3)}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) = (-3, -1)$$

Para determinar el radio de la circunferencia, se reemplazan los valores de las coordenadas del centro $(-3, -1)$ y de uno de los puntos dados en la ecuación canónica.

$$\begin{aligned} (x-(-3))^2 + (y-(-1))^2 &= r^2 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 &= r^2 \\ (-3+3)^2 + (2+1)^2 &= r^2 \\ 0^2 + 3^2 &= r^2 \\ 9 &= r^2 \\ 3 &= r \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación canónica es $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 9$ (Figura 5.52).

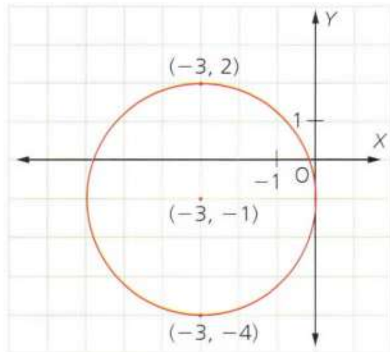


Figura 5.52

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Halla el radio y las coordenadas del centro de las circunferencias. Luego, grafícalas.

a. $(x-1)^2 + (y-61)^2 = 25$

b. $(x+2)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{7}$

c. $x^2 + (y+4)^2 = \frac{1}{9}$

### Razonamiento

**2** Sigue el procedimiento.

a. Empieza dibujando el triángulo con vértices en los puntos dados. (Figura 5.53)

b. Traza las rectas perpendiculares a dos de los lados del triángulo que pasen por sus correspondientes puntos medios (mediatrices). (Figura 5.54)

c. Con un compás, haz centro en el punto de intersección de las dos mediatrices, ábrelo hasta uno de los tres puntos y traza una circunferencia. ¿Pasa por los tres puntos?

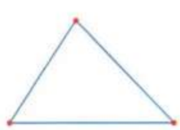


Figura 5.53

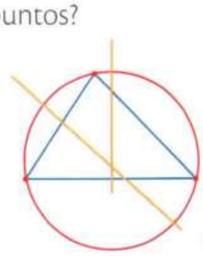


Figura 5.54

**3** Verifica, en cada caso, si el punto $P$ pertenece a la circunferencia dada.

a. $P(2, 3)$; $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$

b. $P(-1, 2)$; $(x-1)^2 + y^2 = 9$

## Evaluación del aprendizaje

Escribe la ecuación canónica de cada circunferencia según las condiciones dadas.

a. Es tangente a ambos ejes y tiene como centro la coordenada $(-3, 3)$.

b. Los extremos de uno de sus diámetros tienen las coordenadas $(0, 4)$ y $(10, 4)$.

c. Tiene el mismo radio de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 7$, pero su centro tiene coordenadas $(-7, 0)$.

d. Se obtiene al trasladar 6 unidades hacia abajo y 3 unidades a la derecha la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 7$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Ecuación general de la circunferencia

**Saberes previos**

Escribe el desarrollo de los productos notables $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$.

**Analiza**

La ecuación canónica de la circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

- ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia?

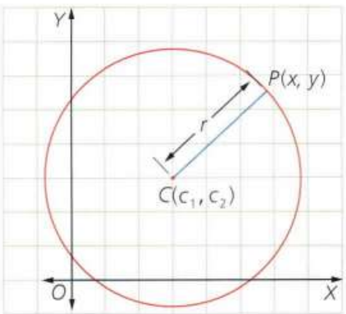



Figura 5.55

**Conoce**

Para hallar la ecuación general de la circunferencia, se utiliza el método general del cálculo de lugares geométricos. Para ello, se siguen estos pasos.

**1.** Se considera un punto $P(x, y)$ de la circunferencia de centro $C(c_1, c_2)$ y radio $r$ (Figura 5.55).

**2.** Como $P$ pertenece a la circunferencia, entonces $d(P, C) = r$.

**3.** Se utiliza la expresión de la distancia entre dos puntos y se simplifica.

$$d(P, C) = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$$
$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

**4.** Se desarrollan los cuadrados de los binomios.

$$x^2 - 2c_1x + c_1^2 + y^2 - 2c_2y + c_2^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - r^2 = 0$$

Al sustituir $\begin{cases} D = -2c_1 \\ E = -2c_2 \\ F = c_1^2 + c_2^2 - r^2 \end{cases}$, se obtiene: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

La **ecuación general de la circunferencia** es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

## 7.1 Caracterización de la ecuación de la circunferencia

Una expresión de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ no siempre representa una circunferencia. Para comprobar si realmente lo es, hay que calcular el posible centro y el posible radio a partir de las definiciones de $D$, $E$ y $F$.

Las **coordenadas del centro** $C(c_1, c_2)$ son: $c_1 = -\frac{D}{2}$ y $c_2 = -\frac{E}{2}$.

El **radio** se calcula con la ecuación $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$.

Si la expresión $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$ es mayor que cero, se tiene una circunferencia; si es igual al cero, se tiene un punto; y si es menor que cero, se tiene una circunferencia imaginaria.

**Ejemplo 1**

A fin de hallar la ecuación general de la circunferencia de centro $C(4, -5)$ y radio 5 unidades, se utiliza la fórmula $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.

Primero, se reemplazan los valores de las coordenadas del centro.

$$(x - 4)^2 + (y - (-5))^2 = 25$$

Luego, se desarrollan los binomios y se suman los términos semejantes.

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 = 25$$
$$x^2 - 8x + y^2 + 10y + 16 = 0$$

La ecuación general de la circunferencia es $x^2 - 8x + y^2 + 10y + 16 = 0$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 7.2 Ecuación de la circunferencia a partir de condiciones

La ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$, si $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$. Por lo anterior, una circunferencia queda determinada si se conocen los valores $D$, $E$ y $F$.

**Ejemplo 2**

Para encontrar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $P(7, -1)$, $Q(6, 2)$ y $R(-1, -5)$, se supone que la ecuación de la circunferencia que se busca es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se construye un sistema de ecuaciones reemplazando el valor de las coordenadas de los puntos dados. Por tanto:

Para $P(7, -1)$ se tiene que $7^2 + (-1)^2 + 7D - E + F = 0$.

Para $Q(6, 2)$ se tiene que $6^2 + (2)^2 + 6D + 2E + F = 0$.

Para $R(-1, -5)$ se tiene que $(-1)^2 + (-5)^2 - 1D - 5E + F = 0$.

El sistema es:

$$\begin{cases} 7D - E + F = -50 \\ 6D + 2E + F = -40 \\ -D - 5E + F = -26 \end{cases}$$

Al solucionar el sistema se obtiene lo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 7D - E + F &= -50 \\ 6D + 2E + F &= -40 \\ -D - 5E + F &= -26 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} D - 3E &= -10 \\ 7D + 7E &= -14 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} D = -4 \\ E = 2 \\ F = -20 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

y la ecuación canónica:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

En la Figura 5.56 se muestra la representación de la circunferencia.

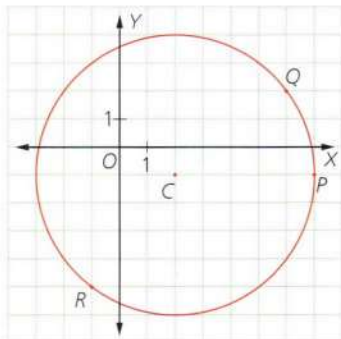


Figura 5.56

**Ejemplo 3**

Para encontrar el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación es $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 15 = 0$, primero se divide la expresión entre 4.

$$x^2 + y^2 - x + 4y + \frac{15}{4} = 0$$

Luego, se calculan $c_1$, $c_2$ y $r$.

$$c_1 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \qquad c_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

Por lo tanto, $C\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 - \frac{15}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Observa la Figura 5.57.

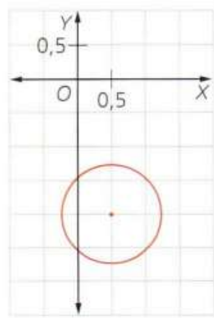


Figura 5.57

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Ecuación general de la circunferencia

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Representa cada circunferencia en el plano.

a. $x^2 + y^2 - 4y - 11 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 21$
c. $x^2 + y^2 + 12x + 4y + 8 = 0$
d. $3x^2 + 3y^2 + 36x - 24y + 96 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 4x - 15 = 0$
f. $x^2 + y^2 - 121 = 0$

**2** Determina la ecuación general de cada circunferencia a partir de la ecuación canónica.

a. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$
b. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$
c. $x^2 + (y - 5)^2 = 81$
d. $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
e. $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = \frac{4}{5}$
f. $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$

### Razonamiento

**3** Halla la ecuación general de las circunferencias a partir de las condiciones dadas.

a. Es tangente al eje $Y$ y tiene como centro la coordenada $(-6, -2)$.
b. Tiene centro en $(2, -1)$ y radio 1,5.
c. Las coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros son $(4, 6)$ y $(-8, -2)$.
d. Tiene diámetro 8 y centro en $(2, -3)$.
e. Su centro es la intersección de las rectas $2x - 3y = -20$ y $x + y = 0$.

### Ejercitación

**4** Determina el centro y el radio de cada circunferencia.

a. $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 20 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 12x - 4y = 12$
c. $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 8 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 12x + 8y - 48 = 0$
e. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 24y + 4 = 0$
f. $x^2 + y^2 - 2 = 0$

### Comunicación

**5** Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias.

a. $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 20 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 12x - 4 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 8x - 16y - 20 = 0$
d. $x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$

**6** Observa las gráficas y escribe la ecuación general de cada circunferencia.

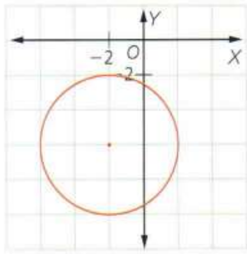
a.


Figura 5.58

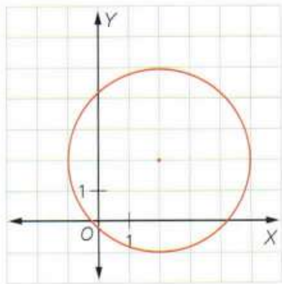
b.


Figura 5.59

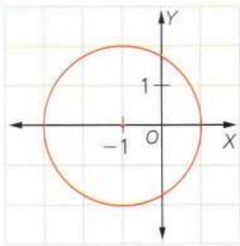
c.


Figura 5.60

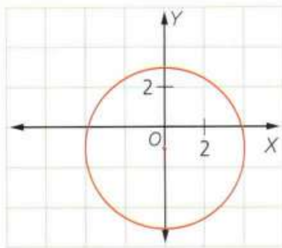
d.


Figura 5.61

### Ejercitación

**7** Determina la ecuación general, el centro y el radio de la circunferencia a la que pertenece cada grupo de puntos.

a. $(-2, 2)$; $(3, 1)$; $(-3, -3)$
b. $(-2, 1)$; $(6, 1)$; $(2, -3)$
c. $(-3, 2)$; $(-2, -1)$; $(0, 1)$
d. $(-1, -1)$; $(-3, 1)$; $(3, 3)$

### Razonamiento

**8** Encuentra el perímetro de cada circunferencia.

a. $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 4$
c. $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**9** Halla el área de los círculos cuya ecuación de la circunferencia se da en cada caso. Recuerda que el área de un círculo es el producto de $\pi$ por el cuadrado del radio.

a. $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 2x = 15$

c. $x^2 + y^2 + 2y = 1$ d. $2x^2 + 2y^2 = 4$

### Ejercitación

**10** Determina la ecuación canónica de cada circunferencia a partir de su ecuación general.

a. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4y = -3$

c. $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 4$

### Resolución de problemas

**11** El diseño de un engranaje de dos piñones, uno de 7 cm de radio y otro de 12 cm, se presenta en la Figura 5.62. Para producir los círculos a gran escala, se ingresa la ecuación general a una máquina computarizada.


Figura 5.62

¿Cuáles son las ecuaciones generales de las circunferencias que se deben ingresar a la máquina si cada una debe ser tangente al eje $X$ y al eje $Y$?

**12** Toma medidas a los objetos que se mencionan y determina la ecuación general con centro en (0, 0) que se debe ingresar a la máquina computarizada para su diseño.

a. Un DVD

b. Un rin de un carro

c. Una moneda de $1000

d. Una tapa de gaseosa

e. Un lente de cámara fotográfica

f. Una rueda de bicicleta

**13** La ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 9 = 0$ describe la señal de una emisora de música. Halla:

a. El radio de la señal de la emisora

b. La ubicación de la emisora

**14** Para el diseño de una arandela se utilizan las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$.

a. ¿Cuál es el radio de la arandela al borde exterior?

b. ¿Cuál es el radio de la parte hueca?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Determina las ecuaciones de cada circunferencia que compone el emoticón de la Figura 5.63.

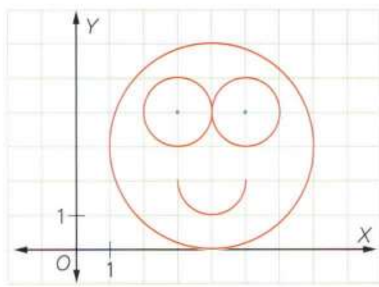



Figura 5.63

**ii** Para el diseño de los aros olímpicos se utiliza una circunferencia que se traslada y se pinta de color diferente, tal como lo muestra la Figura 5.64.

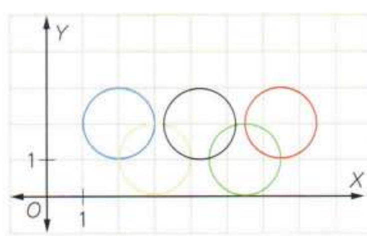



Figura 5.64

¿Cuál es la ecuación general y la ecuación canónica del aro de color azul?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 8 La parábola

**Saberes previos**

En los últimos años muchas de las transmisiones de programación extranjera se hacen utilizando un artefacto llamado "antena parabólica". ¿Haz visto alguna vez una antena de este estilo? ¿Qué características tiene?

**Analiza**

Un radiotelescopio capta ondas de radio provenientes del espacio.

- ¿Dónde se ubica el receptor de un radiotelescopio para recibir las señales?

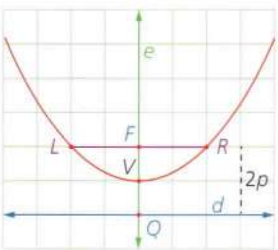



Figura 5.66

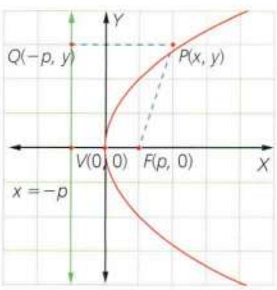



Figura 5.67

**Conoce**

Como el radiotelescopio tiene forma parabólica, las señales que capta se concentran en un único lugar llamado foco.

Por lo tanto, el receptor de señales se ubica en el foco del radiotelescopio (Figura 5.65).

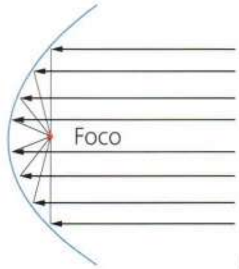



Figura 5.65

La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo denominado **foco** y de una recta fija conocida como **directriz**.

## 8.1 Elementos de la parábola

A continuación se nombran los elementos de la parábola (Figura 5.66).

- El punto $F$ se denomina **foco** y la recta $d$ es la **directriz** de la parábola.
- La recta $e$ que pasa por el $F$ y es perpendicular a $d$ se llama **eje de simetría**.
- El punto de intersección de la parábola con el eje de simetría se denomina **vértice**.
- A la cuerda $\overline{LR}$ que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría se le conoce como **lado recto**.

## 8.2 Ecuación canónica de la parábola con vértice en (0, 0)

Cuando una parábola en el plano tiene su vértice en el origen (0, 0), su ecuación se determina de acuerdo con el eje de simetría.

### 8.2.1 Parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría el eje $X$

Al analizar la parábola de la Figura 5.67, se concluye que:

- La distancia del foco al vértice es $p$; luego, la coordenada del foco es $F(p, 0)$.
- La directriz de la parábola es la recta con ecuación $x = -p$.
- La proyección de cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola en la directriz es de la forma $Q(-p, y)$, donde la distancia entre $P$ y $Q$ es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} = x + p$$

- La distancia de $P(x, y)$ al foco es: $d(P, F) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$.

Por la definición de la parábola, $d(P, F) = d(P, Q)$. Por lo tanto:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$
$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 = 4px$$

La ecuación de la parábola con vértice en (0, 0), foco en ($p$, 0), directriz $x = -p$ y eje de simetría $X$ es: $\boldsymbol{y^2 = 4px}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### 8.2.2 Parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría el eje *Y*

Al analizar la parábola de la Figura 5.68, se concluye que:

- La distancia del foco al vértice es $p$; luego, la coordenada del foco es $F(0, p)$.
- La directriz de la parábola es la recta con ecuación $y = -p$.
- La proyección de cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola en la directriz es de la forma $M(x, -p)$, donde la distancia entre $P$ y $M$ es:

$$d(P, M)=\sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}=y+p$$

- La distancia de $P(x, y)$ al foco está dada por: $d(P, F)=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$

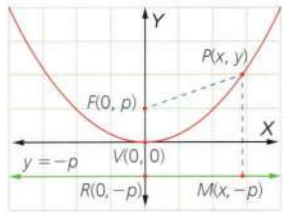


Figura 5.68

Con un proceso similar al anterior, se tiene que:

La ecuación de la parábola con vértice en (0, 0), foco en (0, $p$), directriz $y = -p$ y eje de simetría $Y$ es: $\boldsymbol{x^2 = 4py}$.

**Ejemplo 1**

En la parábola cuya ecuación es $x^2 = -16y$, se observa que el eje de simetría es $Y$.

Como $x^2 = -16y$ y $x^2 = 4py$, entonces:

$$-16y = 4py$$

De donde se obtiene que $p = -4$.

Por tanto, $F$ es $(0, -4)$, $d$ es $y = 4$ y abre hacia abajo porque $p < 0$.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Identifica las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de cada parábola. Luego, realiza la gráfica.

a. $x^2 = 12y$ b. $y^2 = 32x$

c. $y^2 = -16x$ d. $x^2 = 2y$

e. $x^2 = -8y$ f. $t^2 = -4x$

g. $y^2 = 20x$ h. $x^2 = 6y$

i. $x^2 = -y$ j. $y^2 = 0{,}5x$

### Resolución de problemas

**2** Halla la ecuación canónica de cada parábola a partir de las condiciones dadas.

a. $V(0, 0)$ y $F(6, 0)$

b. $V(0, 0)$ y directriz: $y + 8 = 0$

c. $V(0, 0)$ y $F(0, 6)$

d. $V(0, 0)$ y directriz: $x - 5 = 0$

## Evaluación del aprendizaje

Escribe la ecuación canónica de la parábola.

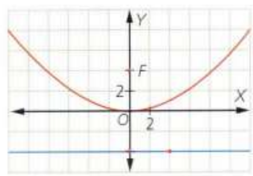


Figura 5.69

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

En la Grecia clásica ocurrió una gran peste que según las creencias, se superaría al duplicar el altar cúbico del dios Apolo. Cuando se duplicaron las dimensiones del altar, se aumentó ocho veces su volumen en lugar de duplicarlo, por lo que la peste continuó. Este evento dio paso al descubrimiento de las cónicas. ¿Crees que la solución de los problemas debe depender de las creencias?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 9 Ecuación canónica de la parábola con vértice en $(h, k)$



**Saberes previos**

Halla la distancia entre los puntos $(x, y)$ y $(h, k)$ ubicados sobre el plano cartesiano.

**Analiza**

De acuerdo con el eje de simetría, la ecuación de una parábola con centro $(0, 0)$ es $x^2 = 4py$ o $y^2 = 4px$.

- ¿Cómo se determina la ecuación canónica de una parábola si su vértice no es el origen del plano cartesiano?

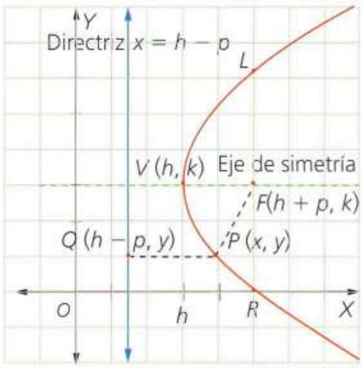


Figura 5.70

**Conoce**

Si el vértice de la parábola es un punto $(h, k)$, su ecuación se puede determinar trasladando los ejes $X$ y $Y$ a los ejes $X'$ y $Y'$ que dan origen al punto $(h, k)$.

A continuación se analizan los dos casos que se pueden presentar.

## 9.1 Parábola con vértice en $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $X$

Al analizar la parábola de la Figura 5.70, se concluye que:

- La distancia del foco al vértice es $p$; luego, el foco es $F(h + p, k)$.
- La directriz de la parábola es la recta con ecuación $x = h - p$.
- La proyección de cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola en la directriz es de la forma $Q(h - p, y)$. La distancia entre $P$ y $Q$ es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-(h-p))^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-h+p)^2} = x - h + p$$

- La distancia de $P(x, y)$ al foco es:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x-h-p)^2 + (y-k)^2}$$

Por la definición de la parábola, $d(P, F) = d(P, Q)$. Por lo tanto:

$$\sqrt{(x-h-p)^2 + (y-k)^2} = x - h + p$$

$$(x - h - p)^2 + (y - k)^2 = (x - h + p)^2$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

La ecuación de la parábola con vértice en $(h, k)$, foco en $(h + p, k)$, directriz $x = h - p$ y eje de simetría $y = k$ paralelo al eje $X$ es:

$$\mathbf{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$$

**Ejemplo 1**

Para representar la parábola cuya ecuación es $(y - 2)^2 = 8(x + 3)$, se compara la anterior ecuación con la ecuación canónica. De ahí se concluye que:

$8 = 4p$, de donde, $p = 2$. Como $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha.

El vértice $(h, k)$ es $(-3, 2)$, el eje de simetría es $y = 2$, el lado recto mide $|4p| = 8$ y el foco es $(h + p, k) = (-1, 2)$. Como la directriz es $x = h - p$, entonces $x = -5$.

La Figura 5.71 muestra la representación de dicha parábola.

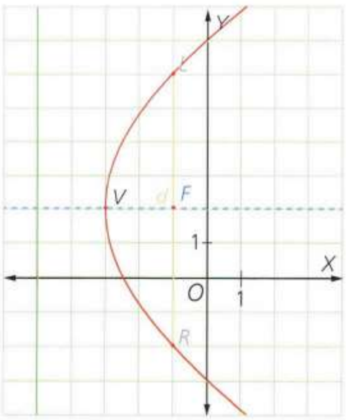


Figura 5.71



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 9.2 Parábola con vértice en (*h*, *k*) y eje de simetría paralelo al eje *Y*

Si se analiza la parábola de la Figura 5.72, se concluye que:

- La distancia del foco al vértice es $p$; luego, el foco es $F(h, p + k)$.
- La directriz de la parábola es la recta con ecuación $y = k - p$.
- La ecuación del eje de simetría es $x = h$.

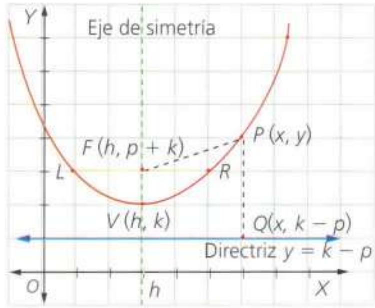


Figura 5.72

Al hacer un análisis similar al realizado en el apartado 9.1, se obtiene la ecuación canónica de la parábola con centro $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $Y$.

La ecuación de la parábola con vértice en $(h, k)$, foco en $(h, k + p)$, directriz $y = k - p$ y eje de simetría $x = h$ paralelo al eje $Y$ es: $\mathbf{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$.

**Ejemplo 2**

Para determinar la ecuación de una parábola con vértice en $(-2, 3)$, $p = 2$ y eje de simetría paralelo al eje $Y$, se utiliza la ecuación anterior y se reemplazan en ella los valores dados.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$
$$(x - (-2))^2 = 4(2)(y - 3)$$
$$(x + 2)^2 = 8(y - 3)$$

La ecuación de la parábola es $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$ y la gráfica se muestra en la Figura 5.73.

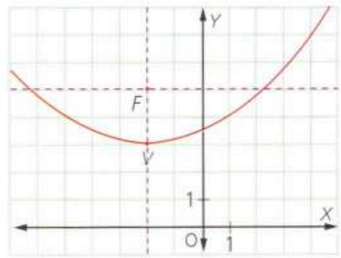


Figura 5.73

**Ejemplo 3**

Para determinar los elementos y la ecuación de la parábola representada en la Figura 5.74, se observa la gráfica y se identifica que:

El vértice $(h, k)$ es $(-4, 3)$. El eje de simetría es paralelo al eje $Y$, con ecuación $x = -4$. La distancia entre $V$ y $P$ es 1 y la parábola abre hacia abajo; entonces, $p = -1$. El lado recto mide $|4p| = 4$.

El foco es el punto $(-4, 2)$ y la directriz es $y = 4$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$(x + 4)^2 = -4(y - 3)$$

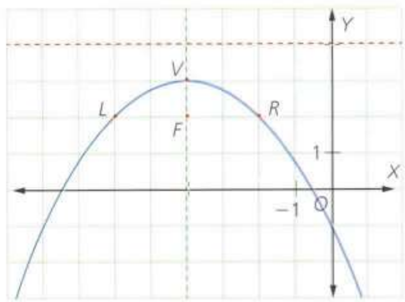


Figura 5.74

**Ejemplo 4**

Para determinar los elementos de la parábola $(y + 2)^2 = -16(x - 3)$, se compara la ecuación dada con la ecuación canónica con centro en $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $X$, y se concluye que:

$$-16 = 4p$$

De donde, $p = -4$. Como $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

El vértice $(h, k)$ es $(3, -2)$, el eje de simetría es $y = -2$, el lado recto mide $|4p| = 16$ y el foco es $(h + p, k) = (-1, -2)$. Como la directriz es $x = h - p$, entonces $x = 7$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 9 Ecuación canónica de la parábola con vértice en $(h, k)$

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Representa en un plano cartesiano cada una de las siguientes parábolas.

a. $(x-2)^2 = 4(y+5)$

b. $(x-1)^2 = -16(y-2)$

c. $x^2 = 64(y-5)$

d. $y^2 = -12(x-2)$

e. $(y+3)^2 = -24(x-7)$

f. $(y-4)^2 = 1(x-3)$

**2** Determina la ecuación canónica de cada parábola a partir del vértice y el foco dados.

a. $V(2, -1)$ y $F(4, -1)$  b. $V(3, -2)$ y $F(3, 0)$

c. $V(1, -2)$ y $F(1, 1)$  d. $V(-3, -2)$ y $F(-6, -2)$

e. $V(2, 3)$ y $F(5, 3)$  f. $V(0, 4)$ y $F(0, 2)$

### Razonamiento

**3** Halla la ecuación canónica de cada parábola según las condiciones dadas.

a. La directriz es $y = 3$ y el foco es $(1, -2)$.

b. El vértice está en $(-2, 2)$ y el lado recto mide 4 unidades y corresponde con el eje $Y$.

c. El eje de simetría es la recta $x - 5 = 0$, el foco está en $(5, -4)$ y la directriz pasa por $(2, -7)$.

d. Su vértice está en $(3, 0)$ y la directriz es el eje $Y$.

e. Su vértice está en $(1, 5)$ y pasa por $(-1, 3)$.

**4** Determina los elementos de cada parábola a partir de la ecuación.

a. $(y-4)^2 = -42(x-3)$

b. $(x+3)^2 = 9(y-6)$

c. $x^2 = -8(y+1)$

d. $y^2 = 16(x+7)$

e. $(y-0,5)^2 = -24(x+1)$

f. $(x-1)^2 = 3(y-2)$

g. $y^2 = -28x$

### Comunicación

**5** Indica si cada ecuación representa una circunferencia, una recta o una parábola.

a. $x^2 - y^2 - 8x - 8y - 15 = 0$

b. $(y+3)^2 = -24(x-7)$

c. $(x-1)^2 = 9 - (y-2)^2$

d. $x - y - 1 = 0$

e. $y^2 - 8x = 0$

f. $x^2 = 4 - y^2$

**6** Escribe la ecuación general de cada parábola.

a.

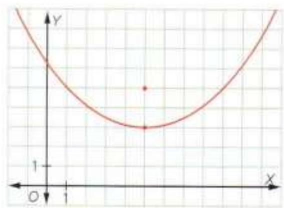



Figura 5.75

b.

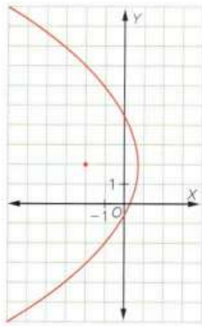



Figura 5.76

c.

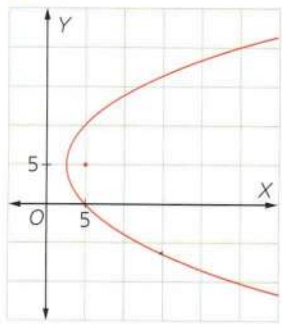



Figura 5.77

d.

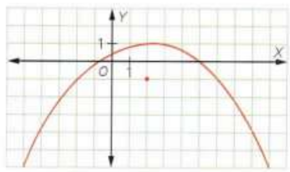



Figura 5.78

e.

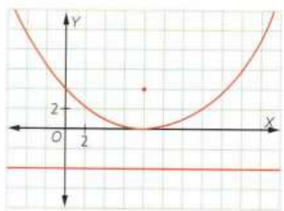



Figura 5.79

f.

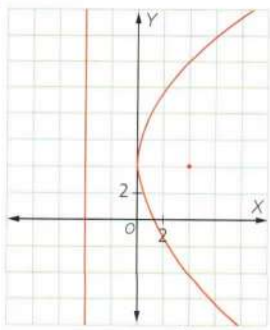



Figura 5.80

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

### Ejercitación

**7** Halla el punto de intersección de cada par de parábolas dadas.

a. $\begin{cases}(y+1)^2 = 2(x+3{,}5)\\(x-5)^2 = 4(y+2)\end{cases}$ b. $\begin{cases}(y+1)^2 = 4(x+2)\\(y+1)^2 = 4x\end{cases}$

c. $\begin{cases}y^2 = 4x\\y^2 = -4x\end{cases}$ d. $\begin{cases}y^2 = -4x\\(x-4)^2 = 8(y+1)\end{cases}$

**8** Determina los elementos de cada parábola.

a.

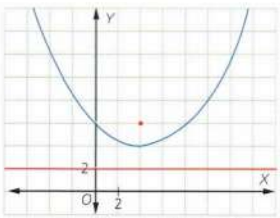


Figura 5.81

b.

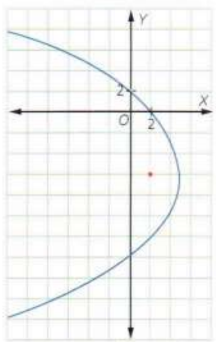


Figura 5.82

c.

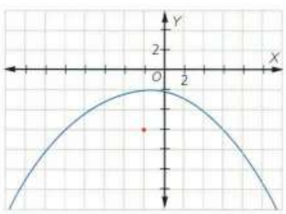


Figura 5.83

d.

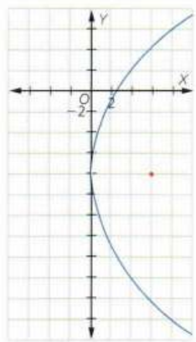


Figura 5.84

### Resolución de problemas

**9** Un puente colgante tiene un diseño parabólico, tal como lo muestra la Figura 5.85. La altura de las dos columnas que sostienen el cable es de 2 000 m cada una. Las dos columnas están separadas por una distancia de 3 000 m. ¿Qué altura tiene el cable a los 750 m de su vértice?

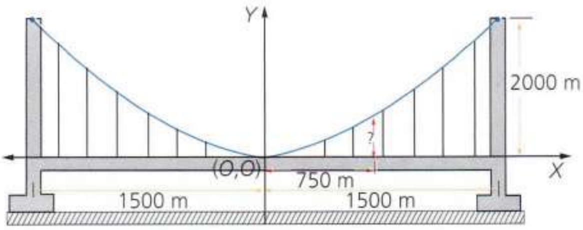


Figura 5.85

**10** Una antena parabólica tiene 22 metros de ancho y 12 de alto. La Figura 5.86 muestra la representación de la antena en el plano cartesiano.

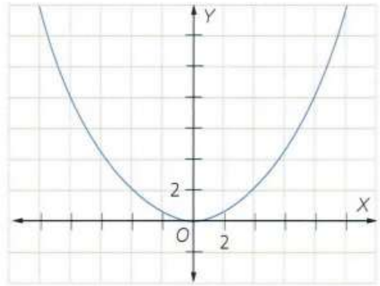


Figura 5.86

¿A qué distancia del vértice debe ubicarse el receptor de la señal?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Determina los elementos de cada parábola.

a.

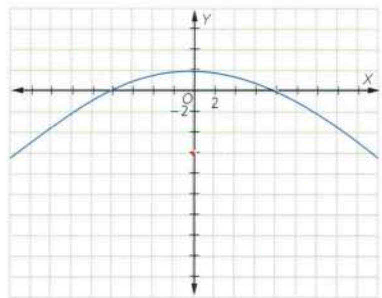


Figura 5.87

b.

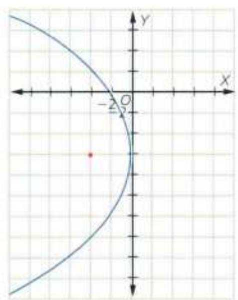


Figura 5.88

**ii** Si se utiliza un sistema de coordenadas cartesiano como ayuda para dibujar el arco y la flecha de la Figura 5.89, ¿qué ecuación le corresponde a cada uno si el vértice del arco se ubica en (0, 0)?

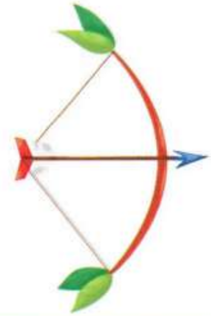


Figura 5.89

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Ecuación general de la parábola

**Saberes previos**

Factoriza el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 10x + 25$.

**Analiza**

Recuerda la ecuación canónica de la parábola.

- ¿Cómo se obtiene la ecuación general de la parábola a partir de su ecuación canónica?

**Conoce**

Para obtener la ecuación canónica de la parábola se consideraron dos casos: eje de simetría paralelo al eje $Y$ y eje de simetría paralelo al eje $X$. Pues bien, para obtener la ecuación general se tienen en cuenta estos mismos casos. A continuación se explica cada uno.

## 10.1 Parábola con vértice en $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $X$

Se parte de la ecuación canónica correspondiente: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ← Se escribe la expresión.

$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph$ ← Se desarrolla el cuadrado del binomio y se utiliza la propiedad distributiva respecto a la adición.

$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$ ← Se iguala a cero.

Al sustituir $D = -4p$, $E = -2k$ y $F = k^2 + 4ph$, se obtiene:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La ecuación general de la parábola con vértice $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $X$ es:

$$\boldsymbol{y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

## 10.2 Parábola con vértice en $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $Y$

Se parte de la ecuación canónica correspondiente: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ← Se escribe la expresión.

$x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk$ ← Se desarrolla el cuadrado del binomio y se utiliza la propiedad distributiva respecto a la adición.

$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0$ ← Se iguala a cero.

Al sustituir $D = -2h$, $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$, se obtiene:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La ecuación general de la parábola con vértice $(h, k)$ y eje de simetría paralelo al eje $Y$ es:

$$\boldsymbol{x^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

**Ejemplo 1**

Para determinar la ecuación general de la parábola representada en la Figura 5.90, primero se halla su ecuación canónica.

Se observa que el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje $Y$, el vértice tiene coordenadas $(4, -6)$ y $p = -4$. Entonces, la ecuación canónica es:

$$(x - 4)^2 = -16(y + 6)$$

Por tanto, la ecuación canónica se expresa en forma general así:

$$x^2 - 8x + 16y + 112 = 0$$

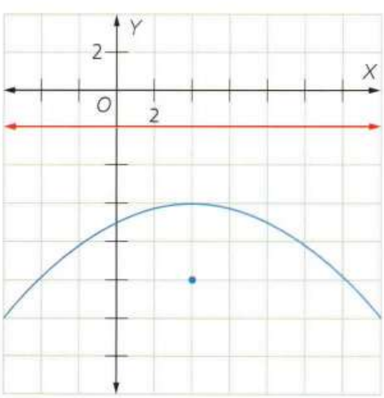


Figura 5.90



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 10.3 Ecuación de la parábola a partir de condiciones

La parábola tiene como ecuaciones generales $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, por lo que depende de tres valores: $D$, $E$ y $F$.

**Ejemplo 2**

Para determinar los elementos y las ecuaciones (general y canónica) de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje $X$ y que pasa por los puntos $(9, 9)$, $(3, 5)$ y $(9, -7)$, se procede de la siguiente manera.

- Se construye un sistema de ecuaciones reemplazando el valor de los puntos dados en la ecuación $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

  Para la coordenada $(9, 9)$ se tiene que:

$$9^2 + 9D + 9E + F = 0$$
$$81 + 9D + 9E + F = 0$$

  Para la coordenada $(3, 5)$ se tiene que:

$$5^2 + 3D + 5E + F = 0$$
$$25 + 3D + 5E + F = 0$$

  Para la coordenada $(9, -7)$ se tiene que:

$$(-7)^2 + 9D + E(-7) + F = 0$$
$$49 + 9D - 7E + F = 0$$

  El sistema es:

$$\begin{cases} 9D + 9E + F = -81 \\ 3D + 5E + F = -25 \\ 9D - 7E + F = -49 \end{cases}$$

- Luego, se resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 9D + 9E + F = -81 \\ 3D + 5E + F = -25 \\ 9D - 7E + F = -49 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6D + 4E = -56 \\ 6D - 12E = -24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} D = -8 \\ E = -2 \\ F = 9 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación general de la parábola es: $y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$.

- Para obtener los elementos de la parábola, se expresa la ecuación general como una ecuación canónica.

$y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$

$y^2 - 2y = 8x - 9$ ← Se organiza la igualdad.

$y^2 - 2y + 1 = 8x - 9 + 1$ ← Se completa el cuadrado.

$(y - 1)^2 = 8(x - 1)$ ← Se simplifica y se factoriza.

Al analizar la ecuación canónica, se reconoce que el vértice es $(1, 1)$, el foco es $(3, 1)$, la directriz es $x = -1$, el eje de simetría es $y = 1$ y la longitud del lado recto es 8.

En la Figura 5.91 se muestra la gráfica de la parábola.

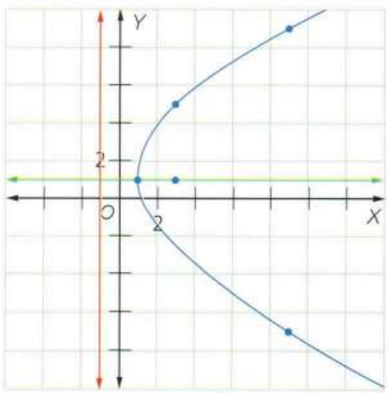



Figura 5.91

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Ecuación general de la parábola

**Ejemplo 3**

Para determinar los elementos de la parábola cuya ecuación general es $x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$, se expresa la ecuación general como ecuación canónica.

$x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$

$x^2 - 4x = 12y + 8$ ← Se organiza la igualdad.

$x^2 - 4x + 4 = 12y + 8 + 4$ ← Se completa el cuadrado.

$(x - 2)^2 = 12(y + 1)$ ← Se factoriza.

La ecuación canónica de la parábola está dada por $(x - 2)^2 = 12(y + 1)$.

Al analizar la ecuación canónica, se identifica que el vértice es $(2, -1)$, el foco es $(2, 2)$, la directriz es $y = -4$, el eje de simetría es $x = 2$ y la longitud del lado recto es 12.

La Figura 5.92 muestra la gráfica de la parábola.

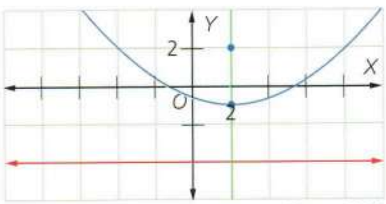


Figura 5.92

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Representa cada parábola.

a. $x^2 + 8x - 12y + 4 = 0$

b. $x^2 + 12x + 12y + 96 = 0$

c. $y^2 + 12x + 10y - 35 = 0$

d. $y^2 - 16x + 8y + 64 = 0$

e. $x^2 - 12y = 0$

f. $y^2 + 16x = 0$

**2** Determina la ecuación general de cada parábola a partir de su ecuación canónica.

a. $(x - 2)^2 = 4(y + 2)$

b. $(y + 2)^2 = 16(x - 2)$

c. $(x + 3)^2 = -6(y - 5)$

d. $(y - 1)^2 = 9(x + 1)$

e. $(x - 2)^2 = -12y$

f. $y^2 = -20(x - 2)$

### Razonamiento

**3** Explica cómo distinguir entre la ecuación general y la ecuación canónica de una circunferencia y de una parábola.

### Comunicación

**4** Escribe la ecuación general de cada parábola.

a.

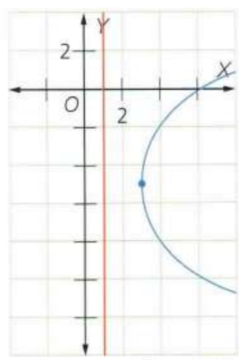


Figura 5.93

b.

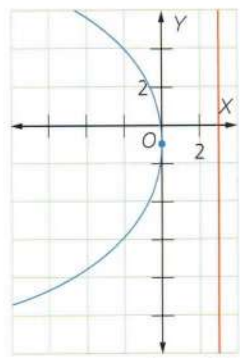


Figura 5.94

c.

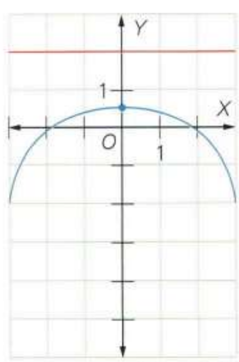


Figura 5.95

d.

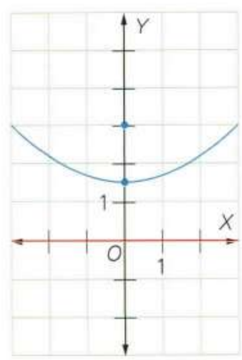


Figura 5.96

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Comunicación

5 Construye una parábola doblando papel.

a. Toma una hoja rectangular y a unos 3 cm de uno de los lados menores traza una paralela. Toma un punto $P$ sobre esa recta más o menos centrado. (Figura 5.97)

b. Dobla la hoja de forma que el lado señalado pase por el punto $P$. (Figura 5.98)

c. Desdobla y marca con lápiz el doblez. Repite y dibuja los dobleces variando el punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro.

Observa cómo se va delimitando una parábola. (Figura 5.99) ¿Cuál es su foco? ¿Cuál su eje? ¿Cuál su vértice?

Figura 5.97

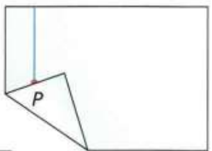


Figura 5.98

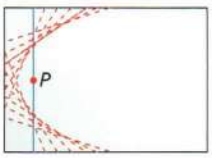


Figura 5.99

## Ejercitación

6 Determina la ecuación canónica de cada parábola a partir de su ecuación general.

a. $x^2 - 2x - 8y - 17 = 0$

b. $y^2 + 12x - 8 + 16 = 0$

c. $x^2 + 6y + 9 = 0$

7 Halla la ecuación canónica e indica los elementos de la parábola según las condiciones dadas.

a. Pasa por los puntos $(-1, 5)$, $(-17, 13)$ y $(-7, 9)$, y su eje de simetría es paralelo al eje $X$.

b. Pasa por los puntos $(6, 20)$, $(0, -4)$ y $(0, 12)$, y su eje de simetría es paralelo al eje $X$.

c. Pasa por los puntos $(-8, 6)$, $(0, 2)$ y $(16, 18)$, y su eje de simetría es paralelo al eje $Y$.

8 Utiliza un programa graficador como GeoGebra para representar las siguientes parábolas.

a. $y^2 = 4x$ b. $y^2 = 3x$ c. $y^2 = 2x$ d. $y^2 = x$

¿Qué puedes concluir respecto de la ubicación del foco y el ancho de la parábola?

9 Un proyectil es lanzado y describe una trayectoria parabólica como lo muestra la Figura 5.100. La altura máxima alcanzada, que logró luego de 20 minutos, fue de 11 m.

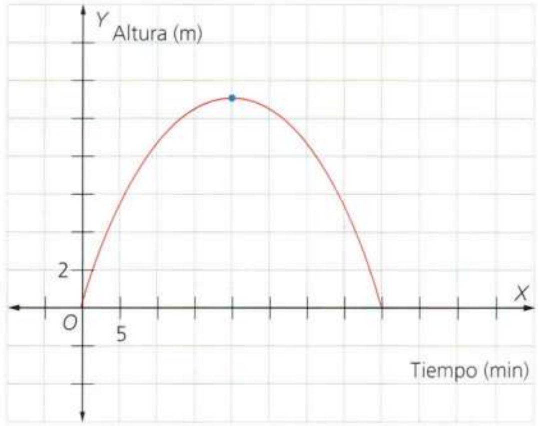


Figura 5.100

a. ¿Cuál es la expresión que describe el movimiento?

b. ¿Cuánto tiempo demoró el lanzamiento del proyectil desde que despegó hasta que volvió a tierra?

c. ¿Cuál es la altura del proyectil a los 36 minutos?

d. ¿A los cuántos minutos el proyectil alcanza una altura de 8 metros?

### Evaluación del aprendizaje

Una farola parabólica mide 6 cm de ancho y 2 cm de alto, tal como lo muestra la Figura 5.101.

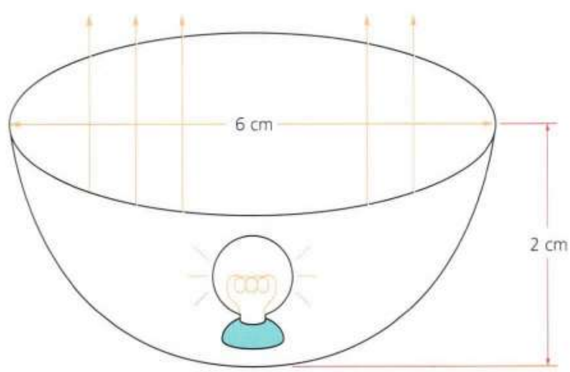


Figura 5.101

¿A qué distancia se debe colocar el filamento del bombillo?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 11 La elipse

**Saberes previos**

¿Qué tipo de órbita describe la Tierra en su movimiento alrededor del Sol?

**Analiza**

A un jardinero se le encargó diseñar un jardín con forma elíptica.

- ¿Cómo puede el jardinero demarcar la elipse en el terreno?

**Conoce**

Para demarcar la elipse, el jardinero puede clavar dos estacas y unirlas con una cuerda de mayor longitud que la distancia entre las estacas; luego, con un palo tensionar la cuerda y deslizarlo dejando una marca en el suelo como lo muestra la Figura 5.102.

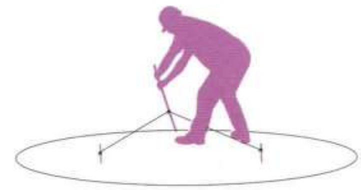


Figura 5.102

**La elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

## 11.1 Elementos de la elipse

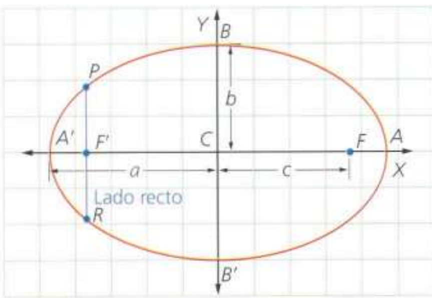



Figura 5.103

A continuación se describen los elementos de la elipse de la Figura 5.103.

- Los puntos $F$ y $F'$ se denominan **focos**, y la recta que pasa por ellos es el **eje focal** de la elipse. La **distancia focal** es la distancia de $F$ a $F'$; esto es, $2c$.
- El **centro C** es el punto medio del segmento que une los dos focos.
- $A$, $A'$, $B$ y $B'$ son los puntos de corte con los ejes. Se llaman **vértices**.
- El **eje mayor** es el segmento que une los vértices $A$ y $A'$ que están sobre el eje focal, y su longitud es $2a$. El **eje menor** es el segmento que une los vértices $B$ y $B'$, y su longitud es $2b$.
- El **lado recto** es el segmento perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos y une a dos puntos de la elipse.

Para cualquier punto $P$ de la elipse, se tiene que $PF' + PF$ es una constante.

Si el punto $P$ corresponde con el vértice $A$, entonces $PF' + PF = 2a$. Si el punto $P$ corresponde con el vértice $B$, entonces $BF' + BF = 2a$.

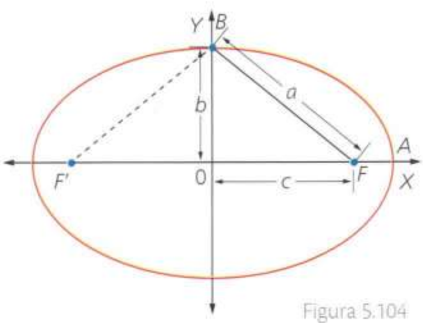



Figura 5.104

Como $BF' = BF$, entonces $BF' = BF = a$ (Figura 5.104).

Las distancias $a$, $b$ y $c$ se relacionan mediante la expresión $a^2 = b^2 + c^2$.

La longitud del lado recto **LR** es $LR = \dfrac{2b^2}{a}$ y la excentricidad ***e*** se define como $e = \dfrac{c}{a}$.

## 11.2 Ecuación canónica de la elipse con centro en (0, 0)

La ecuación de una elipse en el plano cartesiano cuyo centro está en el origen, se determina analizando los dos casos que se presentan a continuación.

### 11.2.1 Elipse con centro en (0, 0) y eje focal sobre el eje X

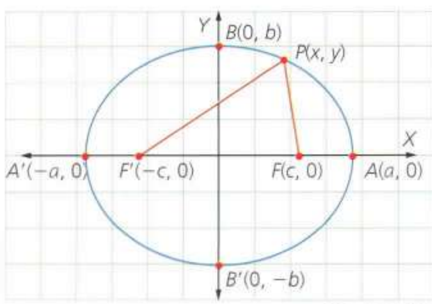



Figura 5.105

Para hallar la ecuación canónica de la elipse de la Figura 5.105, se utiliza el método general del cálculo de lugares geométricos y se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ con } a > b > 0 \text{ y } a^2 = b^2 + c^2$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

### 11.2.2 Elipse con centro en (0, 0) y eje focal sobre el eje $Y$

Para hallar la ecuación canónica de la elipse de la Figura 5.106, se utiliza el método general del cálculo de lugares geométricos y se obtiene:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ con } a > b > 0 \text{ y } a^2 = b^2 + c^2$$

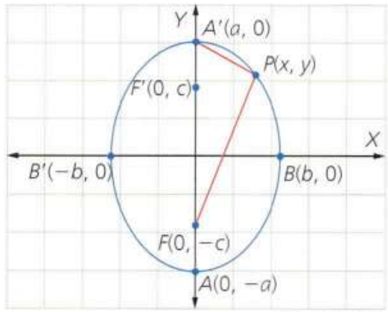


Figura 5.106

**Ejemplo 1**

Observa cómo se identifican los elementos de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Como $100 > 36$, la elipse tiene eje focal en el eje $X$ y centro en (0, 0).

La ecuación se transforma en $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$, donde $a = 10$, $b = 6$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 8$.

Luego, los elementos de la elipse son:

Focos: $F'(-8, 0)$ y $F(8, 0)$

Vértices: $A'(-10, 0)$; $A(10, 0)$; $B(0, 6)$ y $B'(0, -6)$.

Longitud eje mayor: $2a = 20$

Longitud eje menor: $2b = 12$

Lado recto $LR = 7{,}2$

La Figura 5.107 muestra la gráfica de la elipse.

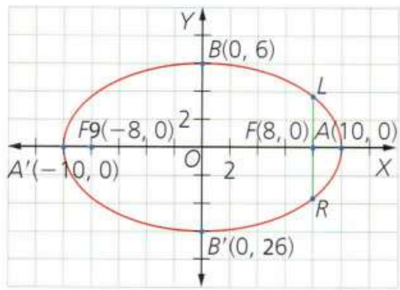


Figura 5.107

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Identifica los elementos de las siguientes elipses. Luego, representa las elipses en el plano.

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  b. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

c. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  d. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{100} = 1$

e. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  f. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{12} = 1$

### Resolución de problemas

**2** Halla la ecuación canónica de cada elipse con centro en (0, 0) a partir de las condiciones dadas.

a. $B'(-2, 0)$ y $A(0, 3)$.

b. $A(5, 0)$ y $F(4, 0)$.

c. Longitud del eje mayor: 10 y $F(0, -4)$.

d. Excentricidad $e = \frac{7}{9}$ y eje menor en $Y$.

e. $b = 11$, $a = 15$ y eje focal sobre el eje $X$.

## Evaluación del aprendizaje

Determina la ecuación canónica de cada elipse.

a.

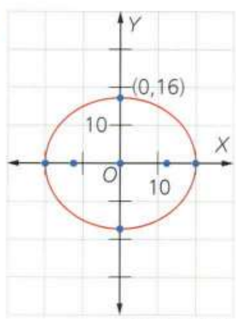


Figura 5.108

b.

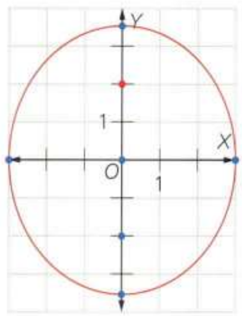


Figura 5.109

c.

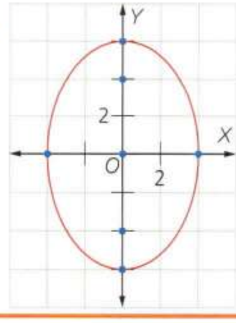


Figura 5.110

d.

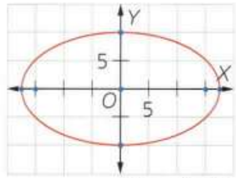


Figura 5.111

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 12 Ecuación canónica de la elipse con centro en (*h*, *k*)



**Saberes previos**

¿Podría afirmarse que una circunferencia es un caso especial de elipse? ¿Por qué?

**Analiza**

- ¿Cuál es la ecuación canónica de la elipse con centro $(h, k)$? ¿Cómo quedan determinados sus elementos?

**Conoce**

Si el centro de la elipse tiene coordenadas $(h, k)$, los elementos y la ecuación canónica quedan determinados a partir de las siguientes condiciones.

## 12.1 Elipse con centro en (*h*, *k*) y eje focal paralelo al eje *X*

Al analizar la gráfica de la elipse con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $X$ que se presenta en la Figura 5.112, se deduce que cada una de las coordenadas de los elementos sufre una alteración en $h$ y $k$ unidades.

Centro: $(h, k)$

Focos: $F'(h - c, k)$ y $F(h + c, k)$

Vértices: $A'(h - a, k)$ y $A(h + a, k)$

$B'(h, b - k)$ y $B(h, b + k)$

Longitud eje mayor: $2a$

Longitud eje menor: $2b$

Ecuación del eje focal: $y = k$

Longitud lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

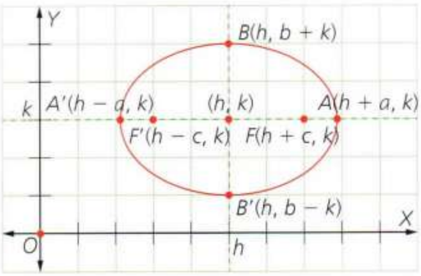



Figura 5.112

La ecuación canónica también sufre una alteración al realizarse una traslación de ejes en $h$ y $k$ unidades.

La ecuación canónica de la elipse con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $X$ es: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$ y $a^2 = b^2 + c^2$.

La excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$ define el mayor o menor achatamiento de la curva.

- Si $c$ tiende a 0, la excentricidad tiende a 0 y la elipse es menos achatada.
- Si $c = 0$, los dos focos coinciden en el centro y la elipse se convierte en una circunferencia.
- Cuando $c$ tiende a $a$, la excentricidad tiende a 1, los focos se acercan a los vértices y la elipse adopta una forma más achatada.

**Ejemplo 1**

Para determinar los elementos y realizar la representación gráfica de la elipse cuya ecuación es $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{5} = 1$, se expresa 9 como $3^2$ y 5 como $(\sqrt{5})^2$, de donde se obtiene:

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+3)^2}{\sqrt{5}^2} = 1$$

Centro: $(2, -3)$

$a = 3$, $b = \sqrt{5}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$

Focos: $F'(0, -3)$ y $F(4, -3)$

Vértices: $A'(-1, -3)$ y $A(5, -3)$

$B'\left(2, \sqrt{5} - 3\right)$ y $B\left(2, \sqrt{5} + 3\right)$

Longitud eje mayor: 6

Longitud eje menor: $2\sqrt{5}$

Ecuación del eje focal: $y = -3$

Longitud del lado recto $LR = \dfrac{10}{3}$

Excentricidad: $e = \dfrac{2}{3}$

La Figura 5.113 muestra la gráfica de la elipse.

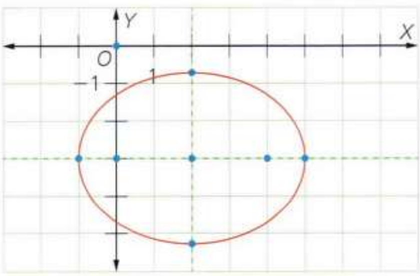



Figura 5.113

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 12.2 Elipse con centro en (*h, k*) y eje focal paralelo al eje *Y*

Al analizar la gráfica de la elipse con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $Y$ que se presenta en la Figura 5.114, se infiere que:

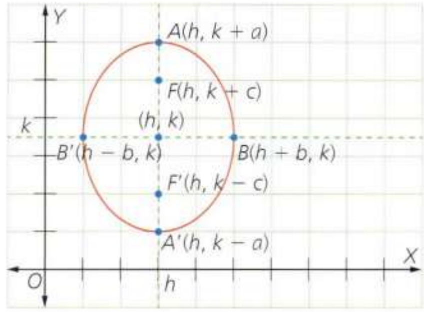


Figura 5.114

Centro: $(h, k)$

Focos: $F'(h, k - c)$ y $F(h, k + c)$

Vértices: $A'(h, k - a)$ y $A(h, k + a)$

$B'(h - b, k)$ y $B(h + b, k)$

Longitud eje mayor: $2a$

Longitud eje menor: $2b$

Ecuación del eje focal: $x = h$

Longitud lado recto $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

Igual que en el caso anterior, la ecuación canónica sufre una alteración al realizarse una traslación de ejes en $h$ y $k$ unidades.

La ecuación canónica de la elipse con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $Y$ es: $\dfrac{\mathbf{(x - h)^2}}{\mathbf{b^2}} + \dfrac{\mathbf{(y - k)^2}}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$, con $a > b > 0$ y $a^2 = b^2 + c^2$.

**Ejemplo 2**

Para determinar la ecuación y los elementos de la elipse representada en la Figura 5.115, se identifican los valores de $a$, $b$ y $c$, y de $h$ y $k$ en dicha elipse.

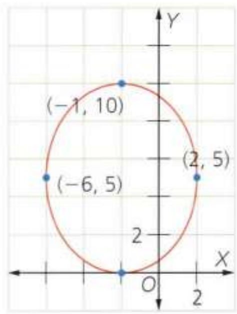


Figura 5.115

- Como la longitud del eje mayor es $2a$ y en la gráfica $2a = 10$, entonces $a = 5$. Por su parte, la longitud del eje menor es $2b = 8$, entonces $b = 4$. Por lo tanto, $c = 3$.
- Como $A(h, k + a)$ y en la gráfica $A(-2, 10)$, se deduce que $h = -2$. Al hacer el mismo procedimiento con $B$ se deduce que $k = 5$. Por lo tanto, $(h, k) = (-2, 5)$.
- Los focos son $F'(h, k - c) = (-2, 2)$ y $F(h, k + c) = (-2, 8)$.
- Por consiguiente, la ecuación de la elipse es: $\dfrac{(x + 2)^2}{16} + \dfrac{(y - 5)^2}{25} = 1$.

**Ejemplo 3**

Para determinar la ecuación canónica de la elipse si sus vértices sobre el eje mayor son $(3, 6)$ y $(3, -2)$ y el lado recto mide 6, se lleva a cabo el siguiente procedimiento.

Para hallar el centro $(h, k)$, se halla el punto medio de los vértices dados.

$$x = \frac{(3 + 3)}{2} = 3 \qquad y = \frac{6 + (-2)}{2} = 2;\ \text{por tanto, } (h, k) = (3, 2)$$

La longitud del eje mayor se obtiene así: $|6 - (-2)| = 8$; entonces $a = 4$.

Como $a = 4$ y $LR = 6$, se tiene que $\dfrac{2b^2}{4} = 6$, de donde se obtiene $b = 2\sqrt{3}$.

Por tanto, la ecuación canónica de la elipse es: $\dfrac{(x - 3)^2}{12} + \dfrac{(y - 2)^2}{16} = 1$, la gráfica se presenta en la Figura 5.116.

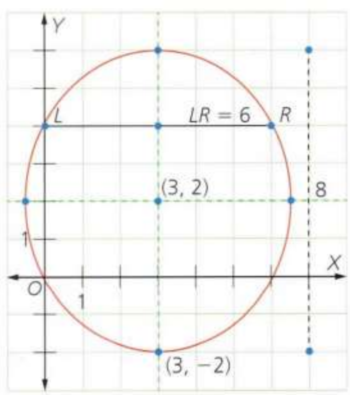


Figura 5.116

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 12 Ecuación canónica de la elipse con centro en $(h, k)$

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Determina la ecuación canónica de cada elipse a partir de su gráfica.

a.

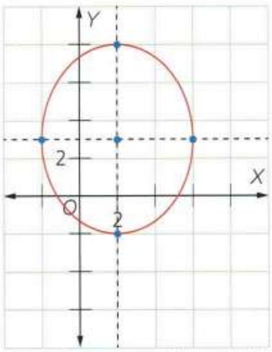



Figura 5.117

b.

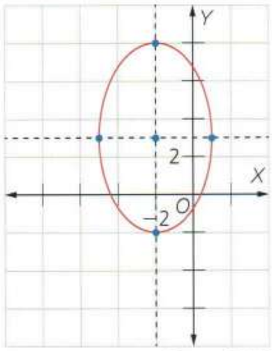



Figura 5.118

c.

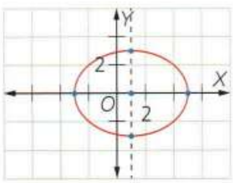



Figura 5.119

d.

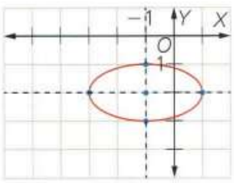



Figura 5.120

e.

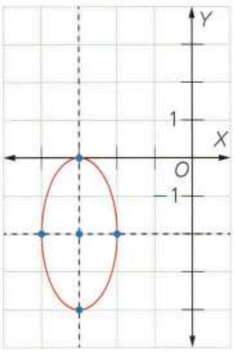



Figura 5.121

f.

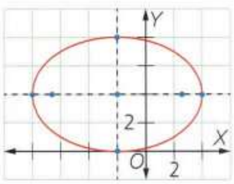



Figura 5.122

**2** Identifica los elementos de cada elipse.

a. $\dfrac{(x-2)^2}{36} + \dfrac{(y-6)^2}{4} = 1$

b. $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{100} = 1$

c. $\dfrac{(x+4)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

d. $\dfrac{(x-5)^2}{6} + \dfrac{(y-4)^2}{5} = 1$

### Comunicación

**3** Representa cada elipse en un plano cartesiano.

a. $\dfrac{(x+1)^2}{64} + \dfrac{(y-1)^2}{100} = 1$

b. $\dfrac{(x+3)^2}{25} + \dfrac{(y-8)^2}{16} = 1$

c. $\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{121} + \dfrac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{81} = 1$

d. $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1$

e. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

f. $4x^2 + 9y^2 = 36$

### Razonamiento

**4** Halla la ecuación canónica de las elipses según las condiciones dadas.

a. La longitud del eje mayor es 8 y del eje menor es 6, tiene centro en $(2, 6)$ y el eje focal es $x = 2$.

b. Tiene vértices $A'(-5, 2)$ y $A(3, 2)$; $B(-1, 4)$ y $B'(-1, 0)$.

c. Tiene centro en $(-3, 1)$, vértice $B(0, 1)$ y la longitud del eje mayor es igual a 8.

d. Tiene centro en $(0, 0)$ y excentricidad $e = \dfrac{5}{7}$.

e. Tiene centro en $(1, 2)$, longitud del eje mayor 4 y longitud del eje menor 2.

**5** Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias, cuáles a parábolas y cuáles a elipses.

a. $x^2 = -y^2 + 1$

b. $(y+1)^2 = -8(x-2)$

c. $(x-2)^2 = 9 - (y+1)^2$

d. $\dfrac{x^2}{11} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

e. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

f. $(x+2)^2 + y^2 = 12$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Elabora la gráfica y compara la excentricidad de cada una de las ecuaciones de las elipses. Obtén una conclusión.

a. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

b. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

c. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$

d. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$

7 Analiza y responde.

En la gráfica de una elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a. ¿Qué sucede cuando $a = b$?

b. ¿Qué sucede cuando el valor de $a$ se acerca al valor de $b$?

c. ¿Qué sucede cuando $a = 1$?

d. ¿Qué sucede cuando $a$ y $b$ toman el valor de 1?

## Resolución de problemas

8 La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. El punto en el que la distancia entre la Tierra y el Sol es máxima se denomina afelio, y el punto donde es mínima, perihelio.

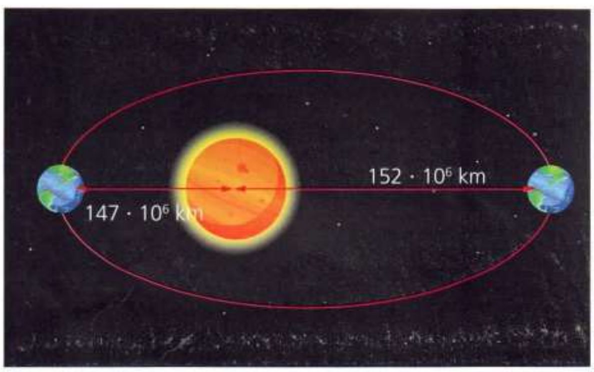
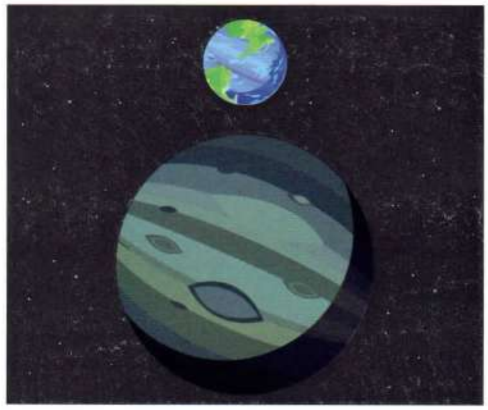



Figura 5.123

Con los datos de la Figura 5.123, calcula la excentricidad de la órbita de la Tierra e interprétala.

9 La máxima distancia que separa a la Tierra de la Luna es de 63 veces el radio de la Tierra, y la excentricidad de la órbita que describe la Luna en su movimiento de traslación alrededor de la Tierra es, aproximadamente, $e = 0{,}0678$.



Calcula la distancia mínima, en kilómetros, que puede separar a la Tierra de la Luna (radio de la Tierra: 6 357 km)

## Evaluación del aprendizaje

i Observa la ecuación y determina para qué valores del parámetro $k$ la ecuación representa una elipse.

$$\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{16-k} = 1$$

Comprueba que todas esas elipses tienen los mismos focos.

ii La cubierta de un estadio olímpico tiene forma de elipse. Halla su ecuación canónica si se sabe que el centro está en (0, 0); $a = 13$ y $F(12, 0)$.

## Educación ambiental

Observa el video del enlace https://www.youtube.com/watch?v=gsZrTYeW0Tw.

- Investiga, analiza y discute con tus compañeros cómo la excentricidad de la órbita de la Tierra puede influir en el cambio climático.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 13 Ecuación general de la elipse

## Saberes previos

Factoriza la expresión

$$3x^2 + 54x + 243.$$

## Analiza

- ¿Cómo se obtiene la ecuación general de la elipse a partir de su ecuación canónica?

## Conoce

A continuación se describe el proceso para obtener la ecuación general.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \longleftarrow \text{Se toma de la ecuación canónica.}$$

$$a^2b^2\left[\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}\right] = 1(a^2b^2) \longleftarrow \text{Se multiplica por } a^2b^2.$$

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \longleftarrow \text{Se resuelve el producto.}$$

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) + a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2 \longleftarrow \text{Se resuelven cuadrados.}$$

$$b^2x^2 - 2b^2xh + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 - a^2b^2 = 0 \longleftarrow \text{Se opera e iguala a cero.}$$

Al sustituir $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$ ($a$, $b$, $h$ y $k$ son constantes), se obtiene: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

La ecuación general de la elipse con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados es:

$\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, con $A \neq C$ y ambos del mismo signo

### Ejemplo 1

Para expresar la ecuación canónica $\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$ como ecuación general, se procede así:

$$6\,400\left[\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{100}\right] = 6\,400 \longleftarrow \text{Se multiplica por } a^2b^2.$$

$$100(x+1)^2 + 64(y-1)^2 = 6\,400 \longleftarrow \text{Se resuelve el producto.}$$

$$100(x^2 + 2x + 1) + 64(y^2 - 2y + 1) = 6\,400 \longleftarrow \text{Se resuelven cuadrados.}$$

$$100x^2 + 200x + 100 + 64y^2 - 128y + 64 - 6\,400 = 0 \longleftarrow \text{Se opera e iguala a 0.}$$

Por tanto, la ecuación general es $100x^2 + 64y^2 + 200x - 128y - 6\,236 = 0$. La gráfica se muestra en la Figura 5.124.

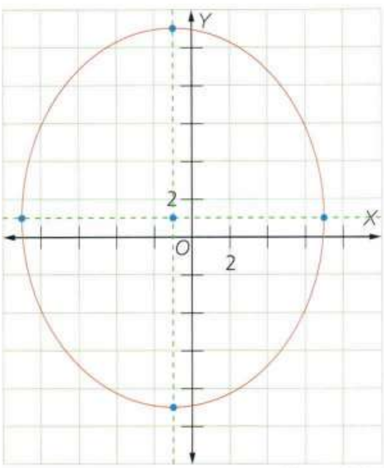



Figura 5.124

### Ejemplo 2

Para encontrar la ecuación canónica de la elipse que tiene por ecuación general $8x^2 + 18y^2 + 32x - 36y - 22 = 0$, se procede así:

$$[8x^2 + 32x + \boxed{\phantom{0}}] + [18y^2 - 36y + \boxed{\phantom{0}}] = 22 \longleftarrow \text{Se agrupa para completar cuadrados perfectos.}$$

$$8[x^2 + 4x + \boxed{\phantom{0}}] + 18[y^2 - 2y + \boxed{\phantom{0}}] = 22 \longleftarrow \text{Se factoriza.}$$

$$8[x^2 + 4x + 4] + 18[y^2 - 2y + 1] = 22 + 32 + 18 \longleftarrow \text{Se completan cuadrados.}$$

$$\frac{8(x+2)^2}{72} + \frac{18(y-1)^2}{72} = \frac{72}{72} \longleftarrow \text{Se factoriza y se divide entre 72.}$$

Por lo tanto, la ecuación general es $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. La gráfica se muestra en la Figura 5.125.

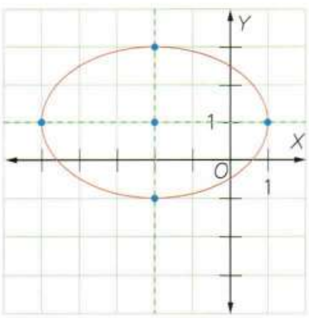



Figura 5.125



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Determina la ecuación general de cada una de las siguientes elipses.

a.

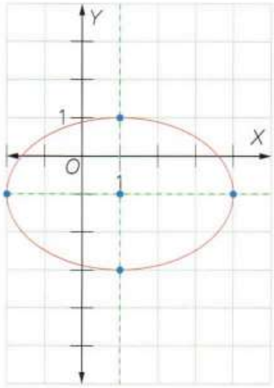



Figura 5.126

b.

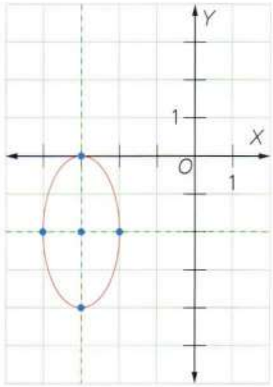



Figura 5.127

c.

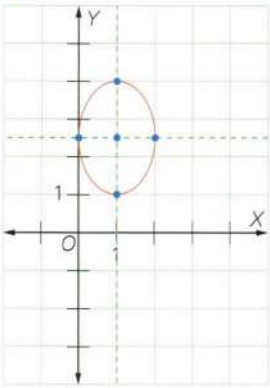



Figura 5.128

d.

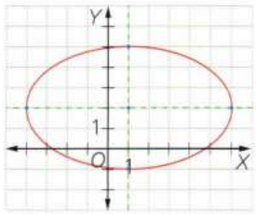



Figura 5.129

e.

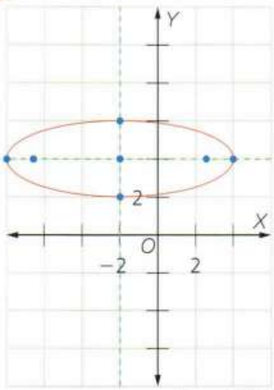



Figura 5.130

f.

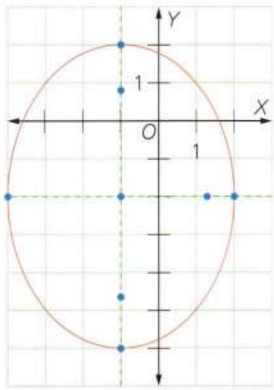



Figura 5.131

**2** Indica los elementos de cada elipse. Luego, representa las elipses en planos cartesianos.

a. $18x^2 + 8y^2 + 36x - 32y - 22 = 0$

b. $4x^2 + 25y^2 - 8x + 200y + 304 = 0$

c. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

d. $4x^2 + y^2 - 8x - 2y = -1$

**3** Construye una elipse doblando papel.

a. Construye un círculo grande en papel y córtalo. Dobla el círculo de forma que la circunferencia pase por $P$ y desdobla. (Figura 5.133).

b. Repite la operación variando el doblez de forma que vaya girando por los puntos de la circunferencia. Con un lápiz marca esos dobleces y verás cómo van delimitando una elipse. (Figura 5.134).

¿Cuáles son sus focos? ¿Cuál es su centro?

Si el radio de la circunferencia es $r$ y la distancia de $P$ a $O$ es $d$, ¿cuál es la distancia focal?, ¿cuánto mide el semieje mayor? Con esos datos calcula el semieje menor.

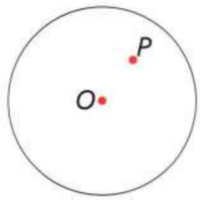



Figura 5.132

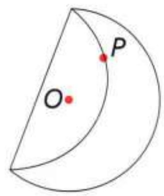



Figura 5.133

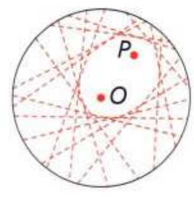



Figura 5.134

### Resolución de problemas

**4** Analiza la ecuación general de la elipse y responde.

a. ¿Qué sucede cuando $A = C$?

b. ¿Qué sucede cuando $A \neq C$ y $A$ y $C$ tienen diferente signo?

## Evaluación del aprendizaje

**i** Halla la ecuación general de cada elipse según las condiciones dadas.

a. La longitud del eje mayor es 16 y la del eje menor es 8, tiene centro en $(-3, 4)$ y eje focal $y = 4$.

b. Tiene vértices $A'(-9, 2)$ y $A(1, 2)$; $B(-4, -2)$ y $B'(-4, 6)$.

**ii** Identifica, en cada una de las siguientes elipses, las medidas de los ejes y de su distancia focal; luego, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Finalmente, represéntalas.

a. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

b. $2(x - 1)^2 + y^2 = 2$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 14 La hipérbola

## Saberes previos

¿Por qué crees que las luces de los carros tienen forma parabólica?

## Analiza

La Figura 5.135 muestra el corte de la superficie cónica con un plano, el cual genera una hipérbola.

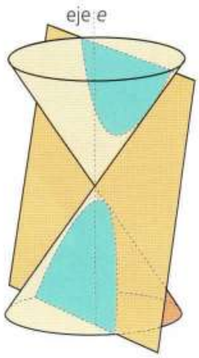



Figura 5.135

- ¿Cuál es la característica principal de la hipérbola y cuáles son sus elementos?

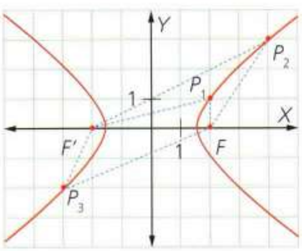



Figura 5.136

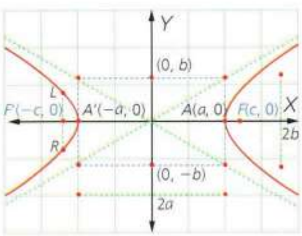



Figura 5.137

## Conoce

La hipérbola tiene dos focos $F'$ y $F$, y dado cualquier punto $P$ sobre ella (Figura 5.136), la diferencia entre las distancias permanece constante; es decir:

$$d(F', P_1) - d(F, P_1) = d(F', P_2) - d(F, P_2) = d(F', P_3) - d(F, P_3) = C$$

**La hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

## 14.1 Elementos de la hipérbola

En la hipérbola de la Figura 5.137 se distinguen los siguientes elementos:

- Los puntos $F$ y $F'$ se denominan **focos**, y la recta que pasa por ellos es el **eje focal** de la elipse. La **distancia focal** es la distancia de $F$ a $F'$.
- Los **vértices** $A$ y $A'$ son puntos de la hipérbola y su longitud es 2a.
- El centro corresponde al punto medio entre $F$ y $F'$.
- El **eje transverso** une $A$ y $A'$ y su longitud es $2a$. El **eje conjugado** es el segmento perpendicular al eje transverso que pasa por el centro de la hipérbola y su longitud es $2b$.
- Las **asíntotas** son dos rectas que pasan por el centro, las cuales se aproximan a la hipérbola sin tocarla y se extienden indefinidamente.
- El **lado recto** es el segmento perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos y une dos puntos de la hipérbola.

Para las hipérbolas se cumple que:

- Las distancias $a$, $b$ y $c$ se relacionan mediante $a^2 + b^2 = c^2$.
- La longitud del lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a}$.
- La excentricidad se define como $e = \frac{c}{a}$.

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola con centro en (0, 0) y eje focal sobre los ejes son:

- En el eje X: $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$.
- En el eje Y: $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$.

## 14.2 Ecuación canónica de la hipérbola con centro en (0, 0)

La ecuación de una hipérbola en el plano cartesiano cuyo centro está en (0, 0) se determina analizando los dos casos que se presentan a continuación.

### 14.2.1 Hipérbola con centro en (0, 0) y eje focal sobre el eje $X$

Para hallar la ecuación canónica de la hipérbola que cumpla estas condiciones, se utiliza el método general del cálculo de lugares geométricos y se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ con } a, b, c > 0, c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

### 14.2.2 Hipérbola con centro en (0, 0) y eje focal sobre el eje *Y*

Para hallar la ecuación canónica de la elipse de la Figura 5.138, se utiliza el método general del cálculo de lugares geométricos y se obtiene:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ con } a, b, c > 0, c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

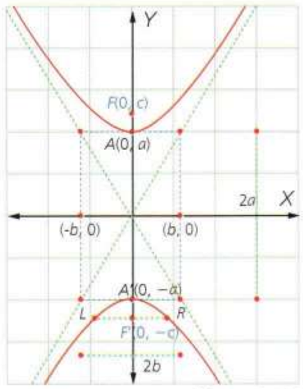


Figura 5.138

**Ejemplo 1**

Para identificar los elementos de la hipérbola cuya ecuación es $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$, se analiza la ecuación y se concluye que el eje focal de la hipérbola es *X* y su centro es (0, 0).

Por lo tanto, la ecuación se transforma en $\frac{x^2}{10^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$, donde $a = 10$, $b = 6$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{34}$.

Luego, los elementos de la hipérbola son:

Focos: $F'\left(-2\sqrt{34}, 0\right)$ y $F\left(2\sqrt{34}, 0\right)$

Vértices: $A'(-10, 0)$ y $A(10, 0)$

Longitud eje transverso: $2a = 20$

Longitud eje conjugado: $2b = 12$

Lado recto: $LR = 7{,}2$

La Figura 5.139 muestra la gráfica de esta hipérbola.

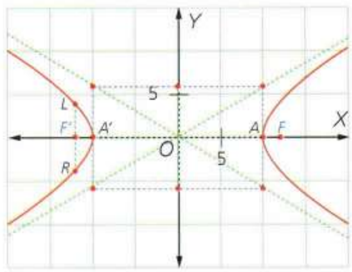


Figura 5.139

## Actividades de aprendizaje

### Comunicación

**1** Identifica los elementos de las hipérbolas. Luego, represéntalas en planos cartesianos.

a. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ b. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{100} = 1$

c. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ d. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{100} = 1$

### Resolución de problemas

**2** Halla la ecuación canónica de cada hipérbola con centro en (0, 0) a partir de las condiciones dadas.

a. $F(4, 0)$ y $A(0, 3)$

b. Longitud eje transverso 12, longitud eje conjugado 8 y eje focal sobre el eje *Y*.

c. $a = 8$, $b = 10$ y eje focal sobre el eje *X*.

d. Asíntotas $y = \frac{9}{16}x$; $y = -\frac{9}{16}x$ y eje focal sobre el eje *X*.

## Evaluación del aprendizaje

Determina la ecuación canónica de cada hipérbola a partir de su representación.

a.

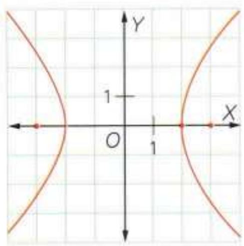


Figura 5.140

b.

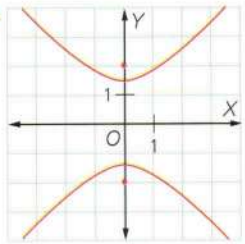


Figura 5.141

c.

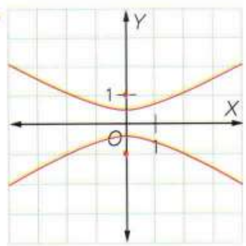


Figura 5.142

d.

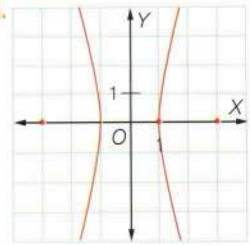


Figura 5.143

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 15 Ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(h, k)$



**Saberes previos**

Factoriza la expresión

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20.$$

**Analiza**

Al transportar el centro de una hipérbola que está en $(0, 0)$ a un punto $(h, k)$,

- ¿cómo se hallan sus elementos?
- ¿cuál es la ecuación canónica de la hipérbola?

**Conoce**

Si el centro de la hipérbola tiene coordenadas $(h, k)$, los elementos y la ecuación canónica quedan determinados a partir de las siguientes condiciones.

## 15.1 Hipérbola con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $X$

La Figura 5.144 muestra la gráfica de la hipérbola con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $X$. Al analizarla se determinan sus elementos.

Centro: $(h, k)$

Focos: $F'(h - c, k)$ y $F(h + c, k)$

Vértices: $A'(h - a, k)$ y $A(h + a, k)$

Longitud eje transverso: $2a$

Longitud eje conjugado: $2b$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \frac{b(x-h)}{a} + k; y = -\frac{b(x-h)}{a} + k$$

Longitud lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$

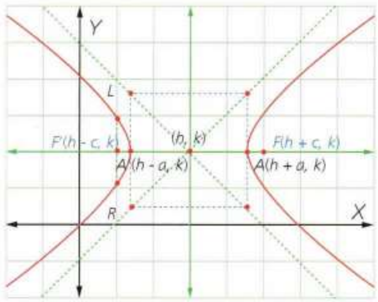



Figura 5.144

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $X$ es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ con } a, b, c > 0, c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

**Ejemplo 1**

Para determinar los elementos y realizar la representación gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$, se expresa 25 como $5^2$ y 16 como $4^2$, de donde se obtiene:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2} - \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

Al analizar la ecuación se determinan sus elementos.

Centro: $(-2, 3)$

$a = 5, b = 4$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{41}$

Focos: $F'\left(-2 - \sqrt{41}, 3\right)$ y $F\left(-2 + \sqrt{41}, 3\right)$

Vértices: $A'(-7, 3)$ y $A(3, 3)$

Longitud eje transverso: 10

Longitud eje conjugado: 8

Ecuaciones de las asíntotas: $y = \frac{4x}{5} + \frac{23}{5}; y = -\frac{4x}{5} + \frac{7}{5}$

Longitud lado recto $LR = \frac{32}{5}$

Excentricidad $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

La Figura 5.145 muestra la gráfica de la hipérbola.

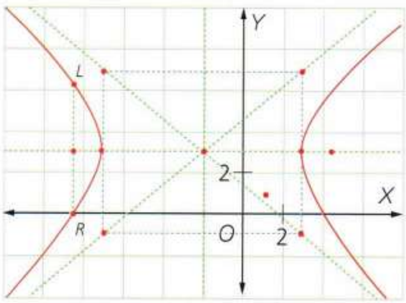



Figura 5.145

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## 15.2 Hipérbola con centro en (*h, k*) y eje focal paralelo al eje *Y*

La Figura 5.146 muestra la gráfica de la hipérbola con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $Y$. Al analizar dicha figura se identifican sus elementos.

Centro: $(h, k)$ Focos: $F'(h, k - c)$ y $F(h, k + c)$

Vértices: $A'(h, k - a)$ y $A(h, k + a)$

Longitud eje transverso: $2a$ Longitud eje conjugado: $2b$

Ecuaciones de las asíntotas: $y = \dfrac{a(x - h)}{b} + k; y = -\dfrac{a(x - h)}{b} + k$

Longitud lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

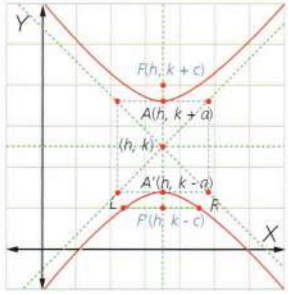



Figura 5.146

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(h, k)$ y eje focal paralelo al eje $Y$ es:

$$\frac{\boldsymbol{(y - h)^2}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{(x - k)^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1} \text{ con } a, b, c > 0, c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

**Ejemplo 2**

En la Figura 5.147, se observa la gráfica de una hipérbola en la que la distancia del centro al vértice es 2, entonces $a = 2$. La distancia del centro al foco es 3, entonces $c = 3$. Por lo tanto, $b = \sqrt{5}$. Como el centro es $(2, 3)$, la ecuación canónica es:

$$\frac{(y - 3)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{5} = 1$$

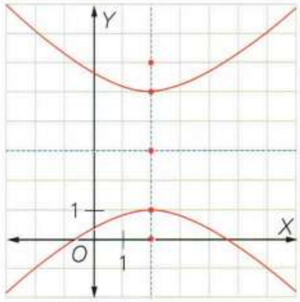



Figura 5.147

### Actividades de aprendizaje

**Comunicación**

1. Representa las hipérbolas e identifica sus elementos.
   a. $\dfrac{(x - 3)^2}{4} - \dfrac{(y - 1)^2}{36} = 1$
   b. $\dfrac{(y - 2)^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$
   c. $25(x + 1)^2 - 16(y - 1)^2 = 36$
   d. $4(y + 2)^2 - 9(x - 1)^2 = 36$

**Razonamiento**

2. Halla la ecuación canónica de cada hipérbola a partir de las condiciones dadas.
   a. Longitud eje transverso 8, longitud eje conjugado 6, centro $(1, 22)$ y eje focal paralelo al eje $Y$.
   b. Centro en $(3, 1)$, vértice en $(3, 5)$ y foco en $(3, 6)$.
   c. Centro en $(2, 3)$, vértice en $(1, 3)$ y foco en $(4, 3)$.

### Evaluación del aprendizaje

Determina la ecuación canónica de cada hipérbola a partir de su gráfica.

a.

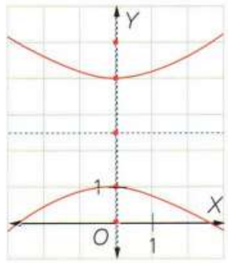



Figura 5.148

b.

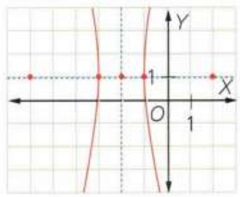



Figura 5.149

c.

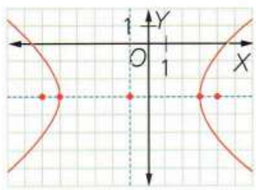



Figura 5.150

d.

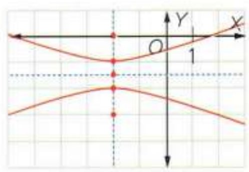



Figura 5.151

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 16 Ecuación general de la hipérbola

**Saberes previos**

Factoriza completamente la expresión $x^2 + 6x + 5$.

**Analiza**

Expresa las ecuaciones canónicas de la hipérbola en forma de ecuaciones generales.

- ¿Qué diferencias observas entre las ecuaciones obtenidas?

**Conoce**

A continuación se describe el procedimiento para obtener las ecuaciones generales de la hipérbola.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \longleftarrow \text{Se parte de la ecuación canónica.}$$

$$a^2b^2\left[\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}\right] = 1(a^2b^2) \quad \longleftarrow \text{Se multiplica por } a^2b^2.$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \quad \longleftarrow \text{Se resuelve el producto.}$$

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) - a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2 \quad \longleftarrow \text{Se resuelven cuadrados.}$$

$$b^2x^2 - 2b^2xh + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2yk - a^2k^2 - a^2b^2 = 0 \quad \longleftarrow \text{Se opera e iguala a cero.}$$

Al sustituir $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k - a^2b^2$ ($a$, $b$, $h$ y $k$ son constantes), se obtiene la ecuación:

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } A \neq C \text{ y } A, C \neq 0$$

Si la ecuación corresponde al segundo caso, es decir, a $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, por un proceso análogo al anterior se obtiene la ecuación:

$$Cy^2 - Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } A \neq C \text{ y } A, C \neq 0$$

Al analizar las dos ecuaciones, se concluye que la diferencia entre ellas es que $A$ y $C$ presentan signos opuestos.

La ecuación general de una hipérbola con eje paralelo al eje $X$ es:

$$\mathbf{Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}, \text{ con } A \neq C \text{ y } A, C \neq 0$$

La ecuación general de una hipérbola con eje paralelo al eje $Y$ es:

$$\mathbf{Cy^2 - Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}, \text{ con } A \neq C \text{ y } A, C \neq 0$$

**Ejemplo 1**

Para encontrar la ecuación general de la hipérbola cuya ecuación canónica es $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$, se lleva a cabo el procedimiento que sigue.

$$36\left[\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4}\right] = 36 \quad \longleftarrow \text{Se multiplica por } a^2b^2.$$

$$4(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 36 \quad \longleftarrow \text{Se resuelve el producto.}$$

$$4(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = 36 \quad \longleftarrow \text{Se resuelven cuadrados.}$$

$$4x^2 + 8x + 4 - 9y^2 + 36y - 36 - 36 = 0 \quad \longleftarrow \text{Se opera e iguala a cero.}$$

Por lo tanto, la ecuación general es $4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y - 68 = 0$ y su gráfica se muestra en la Figura 5.152.

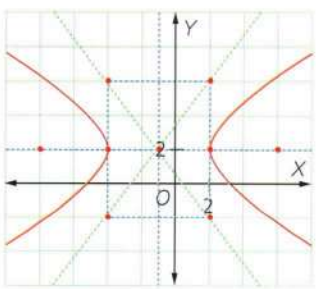


Figura 5.152

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 2**

Para expresar la ecuación general $4y^2 - 9x^2 - 24y + 54x - 189 = 0$ como ecuación canónica se lleva a cabo el siguiente proceso.

$[4y^2 - 24y + \square] - [9x^2 - 54x + \square] = 189$ ← Se agrupa para completar cuadrados perfectos.

$4[y^2 - 6y + \square] - 9[x^2 - 6x + \square] = 189$ ← Se factoriza.

$4[y^2 - 6y + 9] - 9[x^2 - 6x + 9] = 189 + 36 - 81$ ← Se completan cuadrados.

$4(y - 3)^2 + 9(x - 3) = 144$ ← Se opera.

$\dfrac{4(y - 3)^2}{144} + \dfrac{9(x - 3)^2}{144} = \dfrac{144}{144}$ ← Se divide entre 144.

Por lo tanto, la ecuación general es $\dfrac{(y - 3)^2}{36} + \dfrac{(x - 3)^2}{16} = 1$. La gráfica se muestra en la Figura 5.153.

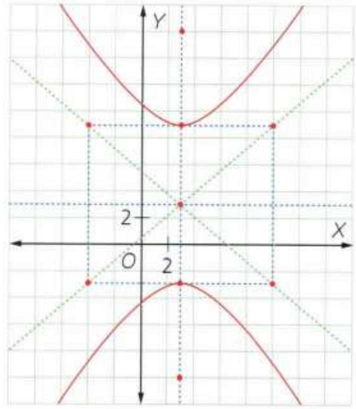



Figura 5.153

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

**1** Determina la ecuación general de cada una de las siguientes hipérbolas.

a.

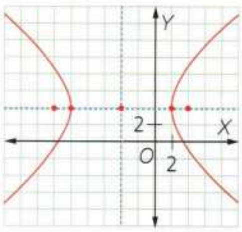



Figura 5.154

b.

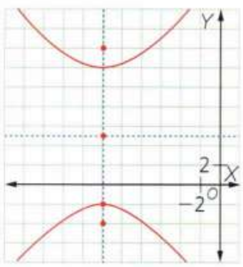



Figura 5.155

### Razonamiento

**2** Indica los elementos de cada hipérbola. Luego, representa las hipérbolas en planos cartesianos.

a. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y + 684 = 0$

b. $25y^2 - 4x^2 - 200x + 8y = 304$

c. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

d. $4x^2 - 5y^2 + 8x - 10y = -19$

### Resolución de problemas

**3** Representa la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. Luego:

a. Halla las coordenadas de los focos $F'$ y $F$.

b. Elige tres puntos $P(x, y)$ sobre la hipérbola.

c. Comprueba que $d(F', P_1) - d(F, P_1) = d(F', P_2) - d(F, P_2) = d(F', P_3) - d(F, P_3) = C$.

## Evaluación del aprendizaje

**i** Escribe cada ecuación como la ecuación general de una hipérbola.

a. $\dfrac{(x + 0{,}5)^2}{2} - \dfrac{(y - 3)^2}{5} = 1$

b. $25(x + 1)^2 - 16(y - 1)^2 = 36$

c. $4(y + 2)^2 - 9(x - 1)^2 = 36$

**ii** Halla la ecuación general de cada hipérbola a partir de las condiciones dadas.

a. Longitud eje transverso 4, longitud eje conjugado 2, centro en (0, 3) y eje focal $Y$.

b. Centro en (2, 0), vértice en (3, 0) y foco en (5, 0).

c. Centro en (0, 2), vértice en (0, 4) y asíntota $y = 2x + 2$.

**iii** Completa la gráfica de la hipérbola. Luego, indica sus elementos.

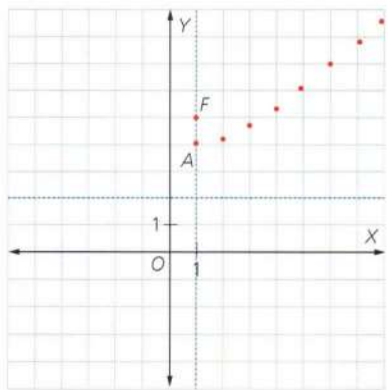



Figura 5.156

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Coordenadas cartesianas

### Ejercitación

**1** Halla la distancia y el punto medio entre cada par de puntos.

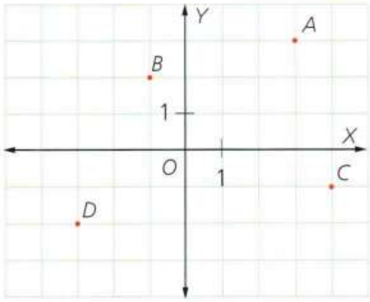



Figura 5.157

## La línea recta

### Razonamiento

**2** Halla la pendiente, el ángulo de inclinación y determina la ecuación punto-pendiente de cada recta.

a.

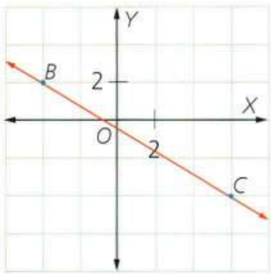



Figura 5.158

b.

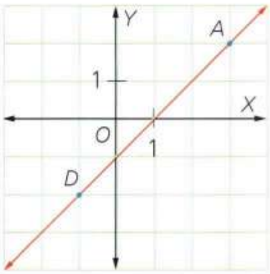



Figura 5.159

**3** Halla la ecuación general de cada recta según las condiciones dadas. Luego represéntalas.

a. Pasa por los puntos $\left(0{,}5, \frac{3}{2}\right)$ y $(-1, -3)$.

b. La pendiente es $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $(1, -6)$.

c. Intersecta al eje $X$ en $-2$ y al eje $Y$ en 5.

d. Su ecuación punto-pendiente es $y = \frac{3}{4}x - 2$.

**4** Determina la pendiente y las intersecciones con los ejes. Luego grafica cada recta.

a. $y = x - 2$

b. $y = \dfrac{x + 3}{5}$

c. $-2x + 4y = 4$

d. $6x - 5y + 15 = 0$

**5** Determina la ecuación de la recta que cumpla con las condiciones dadas.

a. Pasa por $(2, -3)$ y es paralela a $y = 5x + 3$.

b. Pasa por $(-1, -8)$ y es perpendicular a $2x + 3y - 1 = 0$.

c. Intersecta al eje $X$ en 3, al eje $Y$ en $-3$ y es perpendicular a $x + y - 5 = 0$.

d. Pasa por $(-4, 0)$ y es paralela a $2y - x - 5 = 0$.

## Secciones cónicas

### Comunicación

**6** Determina los elementos de cada cónica y luego grafícala.

a. $x^2 - 6x - 8y + y^2 + 9 = 0$

b. $x^2 - 2x + 16y + 4y^2 + 13 = 0$

c. $y^2 - y - x + 6 = 0$

d. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

**7** Halla la ecuación general de cada cónica.

a.

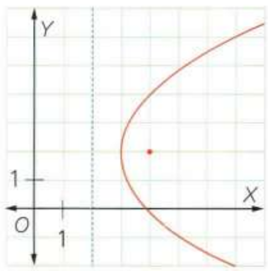



Figura 5.160

b.

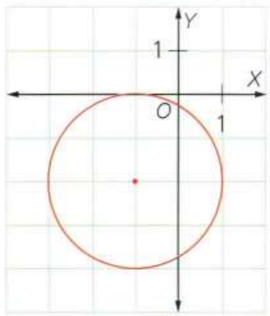



Figura 5.161

c.

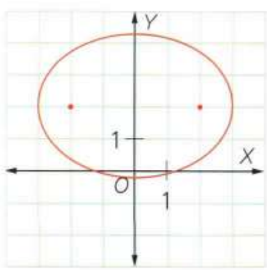



Figura 5.162

d.

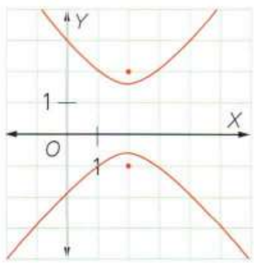



Figura 5.163

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Estrategia: Hacer cálculos parciales

### Problema

En la Figura 5.164, la recta $l$ es tangente a la circunferencia de centro (1, 3).

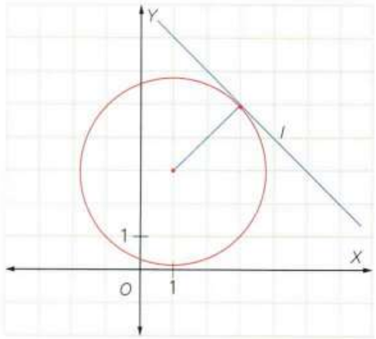



Figura 5.164

¿Cuál es la ecuación de la recta $l$?

### 1. Comprende el problema

- ¿Qué información se puede obtener de la gráfica?
  **R:** El punto de tangencia entre la circunferencia y la recta.

### 2. Crea un plan

- Encuentra la pendiente de la recta que contiene al radio y recuerda la relación entre el radio de una circunferencia y una recta tangente a ella. Luego encuentra la ecuación de la recta $l$.

### 3. Ejecuta el plan

- El radio de la circunferencia tiene extremos $A(1, 3)$ y $B(3, 5)$, y la pendiente de la recta que contiene al radio es

$$m = \frac{3-5}{1-3} = 1.$$

- La recta $l$ es perpendicular al radio. Por lo tanto, el producto de sus pendientes es $-1$ y la pendiente de la recta $l$ es $-1$. La recta $l$ tiene pendiente $-1$ y pasa por $B(3, 5)$, entonces su ecuación es:

$$-1(x-3) = y-5, \text{ de donde } y = -x+8$$

**R:** La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 8$.

### 4. Comprueba la respuesta

Verifica que la recta paralela a la que pasa por el centro de la circunferencia es $y = -x + 4$.

## Aplica la estrategia

**1** La ecuación $-x^2 + 2x + 4 = 0$ es la ecuación de la parábola que se observa en la Figura 5.165.

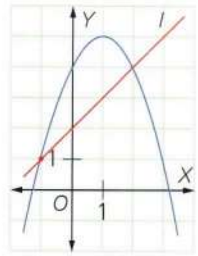



Figura 5.165

¿Cuál es la ecuación de la recta $l$?

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

## Resuelve otros problemas

**2** Traza la circunferencia de centro (3, 3). Si se sabe que es tangente al eje $X$ y al eje $Y$, ¿cuál es su ecuación canónica?

**3** Si la ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$, ¿cuál es su centro? ¿Cuál es su radio?

## Formula problemas

**4** Escribe la ecuación de una circunferencia y de dos rectas tangentes a esta.

### Enriquece tu vocabulario

- ¿Cuáles de las siguientes palabras están relacionadas con las secciones cónicas? Explica.

Foco    Excentricidad

Amplitud    Asíntota

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Evaluación del aprendizaje

## Coordenadas cartesianas

### Ejercitación

**1** Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Dados $O(0, 0)$, $P(3, -2)$ y $Q(-5, 2)$.

VERDADERO / FALSO

a. La longitud de $\overline{PQ}$ es igual a $2\sqrt{17}$. ( )

b. La longitud de $\overline{OQ}$ es igual a cinco. ( )

c. El punto $R(-1, -1)$ es punto medio de $\overline{QR}$. ( )

d. El punto medio de $\overline{QR}$ está sobre el eje $X$. ( )

## La línea recta y posiciones relativas de dos rectas en el plano

### Razonamiento

**2** Observa la gráfica y responde.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

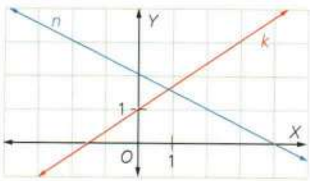



Figura 5.166

a. ¿Cuánto miden cada uno de los ángulos formados por las dos rectas?

b. Escribe la ecuación de una recta paralela a la recta $k$ y una perpendicular a $n$.

## Secciones cónicas

### Ejercitación

**3** Relaciona cada cónica con el valor que debe tomar $B$ en la ecuación $9x^2 + 4(y^2 + x) - 2y + Bxy = 0$.

ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

| | |
|---|---|
| Parábola | $-3$ |
| Elipse | $-16$ |
| Hipérbola | $12$ |

## La circunferencia

### Modelación

**4** Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de corte. Halla la ecuación de la tangente que pasa por el punto $A$.

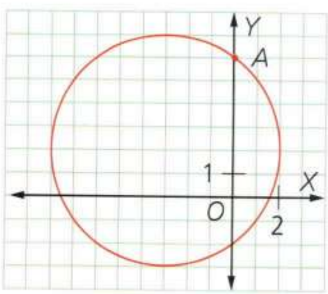



Figura 5.167

### Resolución de problemas

**5** La ecuación del trayecto que realiza una partícula alrededor de un punto fijo, expresada en metros, está dada por la ecuación $x^2 + y^2 - 96 = 0$. Al completar ocho vueltas, ¿qué distancia habrá recorrido?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

## La parábola

### Razonamiento

**6** Observa la figura y determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

VERDADERO / FALSO

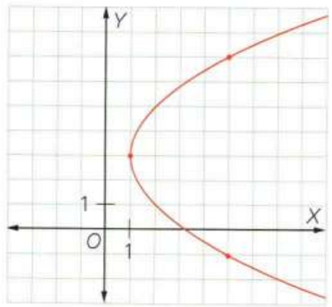



Figura 5.168

a. El eje de simetría es $x = 3$. ( )

b. La longitud del lado recto es 4. ( )

c. El foco es $(1, 3)$. ( )

d. La ecuación de la directriz es $x = 0$. ( )

e. Su ecuación es $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$. ( )

### Resolución de problemas

**7** Una antena receptora de ondas de sonido tiene la forma de un paraboloide con 3 m de diámetro y 91 cm de profundidad (Figura 5.169). ¿A qué distancia del centro de la antena debe colocarse el receptor para recibir la máxima intensidad de ondas sonoras?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN


Figura 5.169

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## La elipse

### Ejercitación

8 Analiza y responde. Para que el punto $(-2, k + 3)$ pertenezca a la elipse $16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144$, $k$ debe ser: SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $-7$
b. $-2$
c. $2$
d. $5$

### Razonamiento

9 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) con base en la ecuación canónica de la elipse VERDADERO / FALSO

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

a. El eje focal es paralelo al eje $Y$.
b. La longitud del eje mayor es igual a 49.
c. Los vértices son $(0, -7)$ y $(0, 7)$.
d. La longitud del eje menor es mayor que 13.

### Resolución de problemas

10 Un óvalo de carreras tiene forma de elipse con 1 km de largo y 400 m de ancho. ¿Cuál es el ancho de la pista a 200 m del extremo del eje mayor? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

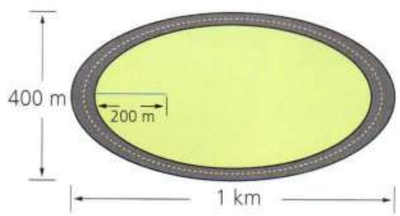



Figura 5.170

11 Para construir un puente que cruza un río de 60 m de ancho, el arco del puente debe ser semielíptico, de modo que una embarcación de menos de 16 m de ancho y menos de 9 m de alto pueda pasar con seguridad. Determina la altura del arco en el centro del puente. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

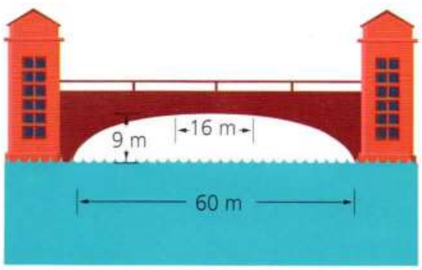



Figura 5.171

## La hipérbola

### Razonamiento

12 Observa la gráfica y determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). VERDADERO / FALSO

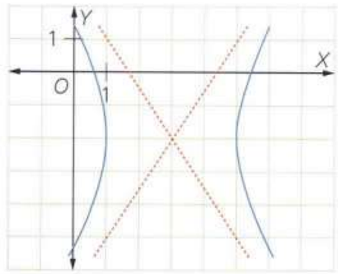



Figura 5.172

a. Los vértices son $(1, -2)$ y $(5, -2)$.
b. La pendiente de una de las asíntotas es $\frac{3}{2}$.
c. Las asíntotas son perpendiculares.
d. El centro de la hipérbola es el mismo punto de intersección de las asíntotas.
e. Su ecuación es $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

### Modelación

13 Selecciona la ecuación canónica de la hipérbola cuya ecuación general es $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0$. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

b. $\frac{(x+3)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{18} = 1$

c. $\frac{(x+3)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{18} = 1$

d. $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

### Resolución de problemas

14 Un cometa se desplaza en una trayectoria hiperbólica alrededor del Sol. Supón que las coordenadas del cometa, en millas, se describen mediante la expresión: ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

$$\frac{x^2}{25 \cdot 10^{15}} - \frac{y^2}{16 \cdot 10^{15}} = 1$$

Si el Sol está ubicado en uno de los focos, determina sus coordenadas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Estadística y probabilidad

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Ya sabemos

- Algunos elementos básicos de estadística y probabilidad.

## Vamos a aprender

- A interpretar estudios estadísticos y a calcular la probabilidad de eventos dependientes e independientes.

## Nos sirve para

- Interpretar y resolver problemas de estadística y probabilidad.


MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 1 Variables cualitativas. Distribución de frecuencias

**Saberes previos**

Menciona tres aspectos que tienes en cuenta al momento de comprar cierta marca de yogur y no otra.

**Analiza**

El departamento de producción de una empresa de productos lácteos quiere poner en el mercado un nuevo sabor de yogur. Para elegir el sabor, ha decidido consultar en diez de sus más grandes puntos de venta sobre el sabor preferido por los consumidores entre mora, fresa, melocotón y guanábana.

- ¿Qué tipo de variable se está estudiando en esta situación?

**Conoce**

En el caso de la empresa de productos lácteos se puede afirmar que el interés del departamento de producción es determinar una preferencia de la población. Es decir, la variable por la que se pregunta es, ¿cuál es el sabor de yogur preferido por los consumidores?, que es un atributo del objeto de estudio.

## 1.1 Variables cualitativas

Las **variables estadísticas cualitativas** son todos aquellos atributos o modalidades observables en una población o muestra, que responden a preguntas del tipo cuál, qué, cuándo, entre otras similares.

Una variable cualitativa puede ser **nominal** si representa una categoría y solo permite establecer relaciones de igualdad entre los elementos de la variable o puede ser **ordinal** si la variable, además de representar una categoría, permite establecer una relación de orden no numérico entre los elementos, es decir, una variable que permite determinar si una categoría es mayor o menor que otra, o si establece una jerarquía.

## 1.2 Distribución de frecuencias

Al analizar $N$ observaciones de una variable cualitativa, el número de veces que se repite cada modalidad de la variable se conoce como **frecuencia absoluta** y se designa con $f_1, f_2, \ldots, f_r$, donde $r$ es el número de modalidades que hay.

Las frecuencias absolutas son números no negativos y su suma es igual a $N$.

La proporción de datos en cada modalidad de la variable se denomina **frecuencia relativa** de esa modalidad, y su valor es $h_i = \dfrac{f_i}{N}$.

Las frecuencias relativas son números no negativos y su suma es igual a 1.

**Ejemplo 1**

A los estudiantes de décimo grado se les preguntó por sus preferencias deportivas. Los resultados de la encuesta aparecen en la Tabla 6.1.

| Modalidades | $f_i$ | $h_i$ | % |
|---|---|---|---|
| Fútbol | 42 | 0,323 | 32,3 % |
| Baloncesto | 28 | 0,215 | 21,5 % |
| Yudo | 9 | 0,069 | 6,9 % |
| Gimnasia rítmica | 11 | 0,085 | 8,5 % |
| Voleibol | 16 | 0,123 | 12,3 % |
| *Waterpolo* | 24 | 0,185 | 18,5 % |
| | 130 | 1 | 100 % |

Tabla 6.1

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## 1.3 Representaciones gráficas

La distribución de frecuencias de una variable cualitativa se puede **representar** con una **gráfica** en la que, mediante barras, superficies o símbolos, se muestra la relación que existe entre los valores de la variable y su frecuencia.

La representación gráfica más común es la **gráfica de barras,** que se construye dibujando sobre cada modalidad una barra, cuya altura representa la frecuencia absoluta. Otra representación es la **gráfica circular** que se usa para interpretar la frecuencia relativa de las variables por medio de porcentajes.

Adicional a estas está el **pictograma** que usa símbolos, que en su mayoría se relacionan con el tema, y representan las frecuencias absolutas de las variables.

Gráfica de barras

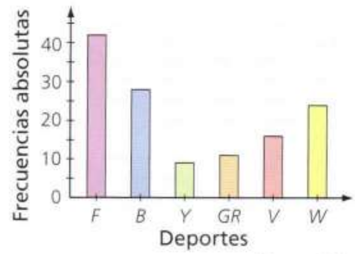



Figura 6.2

**Ejemplo 2**

En la Figura 6.1 se muestra la gráfica circular construida a partir de la columna de porcentajes de la Tabla 6.1. En las figuras 6.2 y 6.3 se presentan la gráfica de barras y el pictograma del mismo estudio pero para las frecuencias absolutas. Con dichas gráficas se puede identificar el comportamiento de la muestra o población de estudio a fin de analizar la información, extraer conclusiones y tomar decisiones.

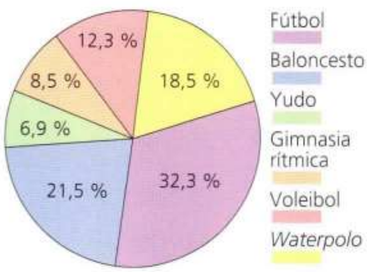



Figura 6.1

Pictograma

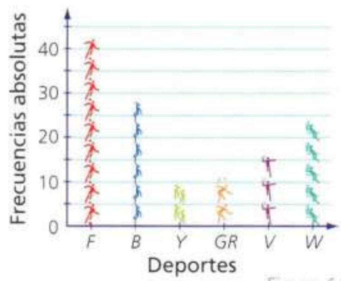



Figura 6.3

**Actividades de aprendizaje**

**Modelación**

1. Lee la situación planteada a continuación y resuélvela. En la Tabla 6.2 se registró la preferencia de un grupo de estudiantes por ciertas profesiones.

| | Número de estudiantes |
|---|---|
| Administración | 5 265 |
| Educación y pedagogía | 238 |
| Comunicación | 4 804 |
| Ciencias políticas | 299 |

Tabla 6.2

a. Construye una distribución de frecuencias absolutas y relativas.

b. Dibuja la gráfica de barras y el diagrama circular correspondiente. Da tres conclusiones importantes a partir de lo observado en las gráficas.

**Evaluación del aprendizaje**

Clasifica las siguientes variables en ordinales o nominales. Explica por qué éstas son cualitativas.

a. Género musical favorito de los estudiantes de décimo.

b. Actividad preferida por un grupo de estudiantes.

**Estilos de vida saludable**

Realiza una encuesta entre tus compañeros preguntando sobre su plato colombiano preferido. Identifica la variable y determina la distribución de frecuencias.

- Averigua la cantidad de calorías que tiene el plato típico de mayor preferencia e identifica si es un plato saludable.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 2 Variables cuantitativas discretas. Distribución de frecuencias

## Saberes previos

Supón que debes preparar un evento para celebrar el día de la familia. Elabora un listado de lo que debes tener en cuenta para que el evento sea exitoso.

## Analiza

El departamento de bienestar social de una compañía está organizando la fiesta de la familia. Para determinar la cantidad de obsequios que deben entregar, se ha preguntado por el número de acompañantes (hijos y cónyuge) que asistirán con cada empleado a la celebración.

- ¿Qué tipo de variable está involucrada en la situación?

## Conoce

El departamento de bienestar social quiere conocer la cantidad de personas que asistirán a la fiesta, es decir, la variable por la que están indagando es el *número de personas*.

Una **variable** estadística **cuantitativa** es **discreta** cuando sus valores son números enteros. Por lo general, responden a preguntas como cuánto, cuántos y sus análogas.

**Ejemplo 1**

El número de computadores vendidos en un mes es una variable discreta porque responde a la pregunta cuántos computadores se vendieron. Los valores que puede tomar la variable son números enteros positivos.

### 2.1 Distribución de frecuencias

La **distribución de frecuencias** para una variable discreta incluye dos columnas más respecto a las cualitativas, que corresponden a las **frecuencias acumuladas**. Estas frecuencias se calculan sumando sucesivamente la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa. Se nombran con las letras $F_i$ y $H_i$, respectivamente.

**Ejemplo 2**

La Tabla 6.3 muestra la distribución de frecuencias de la variable $x_i$ que corresponde al número de hermanos de los estudiantes de un curso.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 4 | 0,133 | 0,133 |
| 1 | 14 | 18 | 0,467 | 0,6 |
| 2 | 7 | 25 | 0,233 | 0,833 |
| 3 | 5 | 30 | 0,167 | 1 |
| **Total** | 30 | | 1 | |

Tabla 6.3

Con la información de la tabla se puede analizar cómo se comporta la variable en la muestra de estudiantes y obtener conclusiones como:

- La mayoría de estudiantes tiene un hermano.
- Se preguntó a 30 estudiantes por el número de hermanos.

### 2.2 Representaciones gráficas

Los **diagramas de frecuencias** son utilizados para representar las frecuencias absolutas y relativas, incluyendo las acumuladas, que ocurren con respecto a una variable discreta.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 3**

La gráfica de frecuencias absolutas acumuladas de la Figura 6.4 corresponde a la Tabla 6.4.

| **Número de hermanos** | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $F_i$ | 4 | 18 | 25 | 30 |

Tabla 6.4


Figura 6.4

Con la representación de las frecuencias absolutas acumuladas se puede determinar la frecuencia correspondiente al número de veces que aparece en la muestra un valor menor o igual que el de una variable. En este caso, por ejemplo, se puede concluir que a lo sumo 25 estudiantes tienen dos hermanos. También se pueden obtener conclusiones como: el 60% de los estudiantes tiene máximo un hermano porque

frecuencia absoluta acumulada → 18
estudianttes escuestados → 30

$$\frac{18}{30} \cdot 100 = 60\%$$

## Actividades de aprendizaje

### Modelación

1. Los datos de la Tabla 6.5 muestran los resultados de una encuesta aplicada a 1 200 personas sobre sus géneros de películas preferido.

| **Tipo de película** | $f_i$ |
|---|---|
| Acción | 300 |
| Drama | 300 |
| Terror | 450 |
| Comedia | 150 |

Tabla 6.5

Elabora la gráfica de barras correspondiente. Escribe dos conclusiones significativas de la información.

### Ejercitación

2. Al realizar una encuesta a un grupo de estudiantes sobre el número de libros que leen al año, se obtuvo la información presentada en la Tabla 6.6.

| **Número de libros** | $f_i$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 12 |
| 2 | 10 |
| 3 | 8 |
| 4 | 5 |

Tabla 6.6

a. ¿Cuántos estudiantes leen menos de tres libros al año?

b. Realiza una tabla que incluya las distribuciones de frecuencias acumuladas.

### Resolución de problemas

3. Dibuja el diagrama de frecuencias absolutas acumuladas de la encuesta del ejercicio anterior. Escribe tres conclusiones.

4. Se preguntó a 500 personas por el número de veces que van al cine durante un mes (Tabla 6.7).

| **Número de veces que van al cine** | **Frecuencias** |
|---|---|
| 0 | 93 |
| 1 | 181 |
| 2 | 117 |
| 3 | 56 |
| 4 | 43 |
| 5 | 10 |

Tabla 6.7

Elabora el diagrama de frecuencias absolutas. Con base en este responde: ¿menos de 120 personas van a lo sumo dos veces al cine durante un mes?

## Evaluación del aprendizaje

Realiza una encuesta a 20 compañeros y pregúntales por la cantidad de horas diarias que permanecen frente al computador.

a. Elabora la distribución de frecuencias correspondiente, la gráfica de barras y el diagrama de sectores.

b. Escribe dos conclusiones significativas de los resultados.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 3 Variables cuantitativas continuas. Distribución de frecuencias

**Saberes previos**

¿Cuáles condiciones debe satisfacer una persona para participar en un equipo deportivo? ¿Cuáles pueden identificarse como variables cualitativas y cuáles como cuantitativas? ¿Cambian esas condiciones de acuerdo con el tipo de deporte? Explica.

**Analiza**

El entrenador del equipo de voleibol de la liga abrió la convocatoria para conformar la selección juvenil de la ciudad. Para ello, cada deportista debe llenar una forma en la que se pregunta por su estatura y los años que lleva practicando este deporte.


- ¿Qué tipo de variables va a analizar el entrenador del equipo?

En la Tabla 6.8 el valor de $x_i$ es el valor intermedio de cada intervalo y se le conoce como **marca de clase**, $f_i$ es el número de datos que se ubican en cada intervalo, $F_i$ la frecuencia acumulada, $h_i$ la frecuencia relativa y $H_i$ la frecuencia relativa acumulada.

**Conoce**

Las variables que analizará el entrenador son estatura y años de experiencia. Las dos son variables cuantitativas y tienen la particularidad que sus valores (medidos en metros y años) pueden ser números decimales.

Una **variable estadística cuantitativa** es **continua** cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo de números reales. Por lo general, responden a preguntas como cuánto, hace cuánto y sus análogas.

## 3.1 Tablas de frecuencias para variables continuas

Cuando la variable es continua, dado que sus valores se definen en intervalos, éstos se pueden determinar de la siguiente manera:

- Se buscan el valor máximo y mínimo de la variable y se restan. La diferencia se conoce como el **rango**.
- Se divide el rango en la cantidad de intervalos que se desea tener para determinar la **amplitud** de cada intervalo.
- Comenzando por el mínimo valor de la variable, que será el extremo inferior del primer intervalo, se suma a este valor la amplitud para obtener el extremo superior y así, sucesivamente. En cada intervalo el extremo superior no debe incluirse porque en el siguiente será el extremo inferior del mismo.

**Ejemplo 1**

Los siguientes datos muestran el tiempo, en segundos, que tardan en conectarse los usuarios de una página web. Observa cómo se construye la tabla de frecuencias correspondiente.

14, 130, 106, 78, 49, 86, 169, 21, 93, 121, 68, 38, 103, 154, 97, 101, 32, 95, 123, 173, 41, 81, 137, 106, 148, 110, 53, 61, 117, 72, 56, 34, 140, 87, 133, 63, 144, 73, 67, 29

El rango es $173 - 14 = 159$. Si se quieren determinar 6 intervalos, la amplitud de cada uno es $\frac{159}{6} = 26{,}5$, que se puede aproximar a 30.

Se puede tomar a 0 como el mínimo valor de la variable y de esa forma se determinan los intervalos de la primera columna.

| $(L_i, L_s)$ | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [0, 30) | 15 | 3 | 3 | 0,075 | 0,075 |
| [30, 60) | 45 | 7 | 10 | 0,175 | 0,250 |
| [60, 90) | 75 | 10 | 20 | 0,250 | 0,500 |
| [90, 120) | 105 | 9 | 29 | 0,225 | 0,725 |
| [120, 150) | 135 | 8 | 37 | 0,200 | 0,925 |
| [150, 180) | 165 | 3 | 40 | 0,075 | 1 |
| **Total** | | 40 | | 1 | |

Tabla 6.8

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 3.2 Representaciones gráficas

Para las distribuciones de variables cuantitativas continuas se usa el **histograma** para representar las frecuencias absolutas y la ojiva para las frecuencias absolutas acumuladas. En algunos casos también se usan para representar las frecuencias relativas y acumuladas relativas interpretadas como porcentaje.

Para construir un histograma se escriben sobre el eje de las abscisas los límites de las clases. Sobre dicho eje, se construyen rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo y, por altura, la frecuencia absoluta.

Otra representación gráfica es el **polígono de frecuencias**. Este polígono se construye al unir con segmentos los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del histograma y muestra la tendencia promedio de las clases.

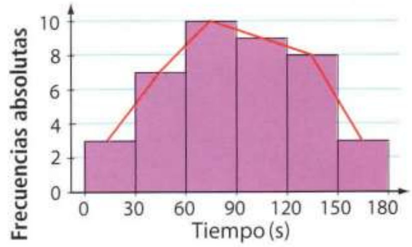



Figura 6.5

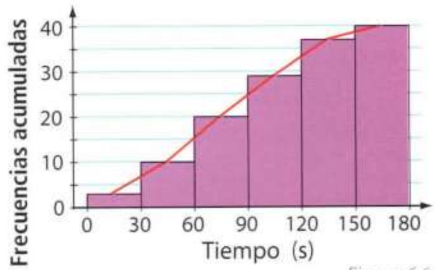



Figura 6.6

**Ejemplo 2**

En la Figura 6.5 se muestra el histograma y el polígono de frecuencias correspondientes a las frecuencias absolutas de la Tabla 6.8. En la Figura 6.6 se presenta el histograma y la ojiva del mismo estudio correspondientes a las frecuencias absolutas acumuladas.

### Actividades de aprendizaje

#### Ejercitación

1. Elabora la tabla de distribución de frecuencias y un histograma de frecuencias absolutas para los siguientes datos.

   Peso (kg) de un grupo de estudiantes:

   45, 46, 48, 45, 47, 48, 50, 49, 40, 40, 45, 49, 53, 52, 51, 50, 59, 47, 41, 46, 50, 40, 52, 60, 47, 54, 42, 42, 47, 51, 52, 54, 49, 51, 41, 45, 48, 55, 47

#### Resolución de problemas

2. Los siguientes datos representan la altura, en centímetros, de 20 personas.

   165 171 154 165 149 159 151 171 191 163

   173 193 176 152 188 169 171 184 152 183

   a. Traza una tabla de distribución de frecuencias con intervalos de amplitud 10.

   b. Elabora el histograma y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

   c. Escribe tres conclusiones significativas de lo observado en las tablas y gráficas.

### Evaluación del aprendizaje

Se preguntó a 44 estudiantes por el tiempo, medido en minutos, que tardan en llegar a su sitio de estudio.

Las respuestas obtenidas fueron:

15, 20, 17, 24, 45, 40, 35, 39, 46, 44, 50,

47, 42, 40, 38, 30, 35, 45, 35, 37, 47, 48,

50, 55, 38, 37, 40, 43, 40, 39, 45, 48, 50

35, 20, 57, 55, 56, 47, 43, 37, 34, 50, 60

a. Elabora la distribución de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas para esta variable.

b. Elabora el histograma de frecuencias porcentuales.

c. Realiza el histograma de frecuencias acumuladas.

d. Escribe tres conclusiones relacionadas con el tiempo que tarda el grupo de estudiantes en llegar a su sitio de estudio.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

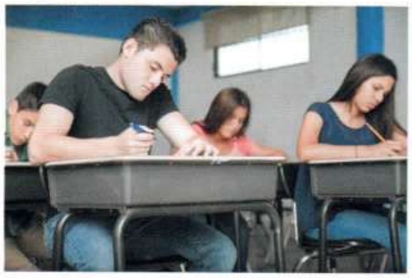
# 4 Medidas de tendencia central

**Saberes previos**

En una publicación nacional se lee: "En 7 puntos mejoró el promedio de las pruebas Saber 11". ¿Cómo se puede interpretar esta información?

**Analiza**

El Ministerio de Educación publicó los resultados obtenidos por los colegios en la última prueba ICFES Saber 11. En el colegio San Esteban, el promedio de los estudiantes en la prueba de razonamiento cualitativo fue de 75,8.



- ¿Qué significa este resultado?

**Recuerda**

Para datos no agrupados las medidas de tendencia central se definen así:

La **media** o **promedio** es el cociente de la suma de todos los valores entre el número de datos.

La **moda** es el dato con la mayor frecuencia.

La **mediana** representa el valor de la variable de posición central en un conjunto de datos ordenados.

**Conoce**

La palabra *promedio* es muy usada en situaciones cotidianas, en el caso del puntaje de la prueba de matemáticas, se puede afirmar que al sumar los resultados de cada uno de los estudiantes y dividirlos entre el total de ellos, aparece el valor 75,8. El cual se interpreta de la siguiente manera: si todos los estudiantes hubiesen obtenido el mismo puntaje éste habría sido 75,8.

Se conocen como **medidas de tendencia central o de centralización** los parámetros que indican el valor hacia el que tienden a ubicarse los datos de una distribución. Las medidas de tendencia central son la **media aritmética**, la **moda** y la **mediana**.

Cuando en un estudio estadístico existen muchos datos que analizar, conviene agruparlos en **intervalos** o **clases**.

## 4.1 Media para datos agrupados

La **media** para datos agrupados $\overline{x}$ se calcula sumando todos los productos de la variable o de la marca clase, dependiendo si son discretas o continuas, con la frecuencia absoluta respectiva y dividiendo ese resultado entre el número total de datos $N$: $\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$. En este caso $x_i$ será el valor de la variable si es discreta o la marca de clase si es continua.

## 4.2 Moda para datos agrupados

La **moda** $M_o$ para datos agrupados es el valor que representa la mayor frecuencia absoluta. En las tablas de frecuencias con datos agrupados por clases se habla de **intervalo modal** y se calcula así:

$$Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot A \text{ donde:}$$

$L_i$ es el límite inferior de la clase modal (Intervalo con la más alta frecuencia).

$A$ es la amplitud de la clase o intervalo.

$f_{i-1}$ es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal.

$f_{i+1}$ es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal.

## 4.3 Mediana para datos agrupados

La **mediana** $M_e$ para datos discretos agrupados se encuentra ubicando la frecuencia acumulada que contiene al dato que está en la mitad de los datos, cuando éstos se organizan de menor a mayor. Cuando los datos son continuos, se halla en el intervalo donde la frecuencia acumulada llega hasta la mitad de la suma de las frecuencias absolutas así:

$M_e = L_i + \frac{\left(\frac{N}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i} \cdot A$ con $L_i$ el límite inferior del intervalo que contiene a $\frac{N}{2}$, siendo $N$ el total de los datos, $F_{i-1}$ la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana, $f_i$ la frecuencia absoluta del intervalo mediano y $A$ la amplitud del intervalo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 1**

El tiempo, en segundos, que tardan en conectarse los usuarios de una determinada página web, a lo largo de un día, viene dado por la Tabla 6.9.

| Tiempo en segundos | [0, 30) | [30, 60) | 60, 90) | [90, 120) | [120, 150) | [150, 180) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de usuarios | 3 | 7 | 10 | 9 | 8 | 3 |

Tabla 6.9

Para hallar las medidas de tendencia central se ordenan los datos en la Tabla 6.10, añadiendo las marcas de clase (los puntos medios de cada intervalo, por ser una variable continua), las frecuencias absolutas acumuladas y el producto de la marca de clase por la frecuencia absoluta.

| $(L_i, L_s)$ | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $x_i f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [0, 30) | 15 | 3 | 3 | 45 |
| [30, 60) | 45 | 7 | 10 | 315 |
| [60, 90) | 75 | 10 | 20 | 750 |
| [90, 120) | 105 | 9 | 29 | 945 |
| [120, 150) | 135 | 8 | 37 | 1080 |
| [150, 180) | 165 | 3 | 40 | 495 |
| **Total** | | 40 | | 3630 |

Tabla 6.10

La **media** para estos datos es: $\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{3630}{40} = 90{,}75$ s.

El promedio en esta situación indica que los 40 usuarios tardan aproximadamente 90,75 s en conectarse a la página web.

Para hallar la **moda** se identifica el intervalo con la más alta frecuencia, en este caso es [60, 90] y se toma su límite inferior $L_i = 60$.

$A = 30$ pues es la amplitud de cada intervalo.

$f_{i-1} = 7$ que corresponde a la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal o premodal.

$f_{i+1} = 9$ que es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal o postmodal.

Así: $Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot A =$

$$60 + \frac{10 - 7}{(10 - 7) + (10 - 9)} \cdot 30 = 60 + \frac{90}{4} = 82{,}5.$$

Para determinar la **mediana** se halla el intervalo donde la frecuencia acumulada contenga a $\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$. Como dicho intervalo es [60, 90], entonces $L_i = 60$.

De otro lado, $F_{i-1} = 10$ y $f_i = 10$, así que:

$$M_e = 60 + \frac{20 - 10}{10} \cdot 30 = 60 + \frac{10}{10} \cdot 30 = 90.$$

La mediana indica que el 50% de los usuarios encuestados tardan menos de 90 s en conectarse a la página web y el otro 50% supera ese tiempo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 4 Medidas de tendencia central

## Actividades de aprendizaje

### Modelación

1. Observa la Tabla 6.11 que muestra las medidas, en centímetros, de algunas cintas decorativas indígenas.

| Medida (cm) | [100, 105) | [105, 110) | [110, 115) | [115, 120) | [120, 125) |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de cintas | 4 | 9 | 12 | 10 | 3 |

Tabla 6.11

Halla la media, la moda y la mediana.

### Ejercitación

2. Completa los datos que faltan en la Tabla 6.12, donde $f_i$, $F_i$ y $h_i$ representan, respectivamente, las frecuencias absoluta, absoluta acumulada y relativa.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | | 0,08 |
| 2 | 4 | | |
| 3 | | 16 | 0,16 |
| 4 | 7 | | 0,14 |
| 5 | 5 | 28 | |
| 6 | | 38 | |
| 7 | 7 | 45 | |
| 8 | | | |

Tabla 6.12

a. Halla la media aritmética y la moda de esta distribución.

b. Calcula la mediana.

### Modelación

3. Analiza la Tabla 6.13 que muestra los ingresos (en miles de pesos), de un grupo de personas.

| Ingresos mensuales | Frecuencia |
|---|---|
| [0, 1 000) | 35 |
| [1 000, 1 100) | 70 |
| [1 100, 1 400) | 70 |
| [1 400, 1 600) | 90 |
| [1 600, 1 900) | 85 |
| [1 900, 2 400) | 64 |

Tabla 6.13

a. Construye el histograma de frecuencias relativas y el polígono de frecuencias relativas.

b. Halla la media, la mediana y la moda de la distribución.

### Razonamiento

4. Calcula la mediana de los siguientes números teniendo en cuenta que la media es 4. $x$, 3, $4x - 3$, $x + 4$, $-16$, 9 y $x - 4$.

5. Halla la media en la siguiente situación: a un conjunto de datos de cinco números, cuya media es 7,31, se le añaden los números 4,47 y 10,15.

6. Un conjunto de cinco números naturales distintos tiene una mediana de 20 y una media de 17. ¿Cuál es el mayor de esos números?

### Ejercitación

7. Calcula la media, la mediana y la moda de cada conjunto de datos.

a. {2, 4, 9, 2, 4, 6, 3, 9, 2, 6}

b. {1, 2, 2, 4, 5, 8, 6, 3, 2, 7, 9, 5}

c. {6, 5, 8, 7, 6, 2, 3, 3, 4, 7, 9, 10}

8. Observa las tablas de registro de las ventas semanales de una cierta marca de ropa en dos almacenes de la ciudad de Yopal.

| Almacén A | |
|---|---|
| **Día** | **Cantidad** |
| Lunes | 15 |
| Martes | 21 |
| Miércoles | 13 |
| Jueves | 15 |
| Viernes | 18 |

Tabla 6.14

| Almacén B | |
|---|---|
| **Día** | **Cantidad** |
| Lunes | 25 |
| Martes | 13 |
| Miércoles | 8 |
| Jueves | 9 |
| Viernes | 15 |

Tabla 6.15

a. Establece la media de ventas de esa marca en cada almacén.

b. Si se quiere cerrar el almacén con menos promedio de ventas de esa marca, ¿cuál debería escogerse?

### Razonamiento

9. Construye una distribución de frecuencias que cumpla con las características pedidas en cada caso.

a. Que la mediana sea mayor que la moda.

b. Que la moda sea mayor que la mediana.

c. Que las tres medidas sean iguales.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**10** Halla el valor de $t$ en cada conjunto de datos para que se verifique el valor de la medida de tendencia central.

a. $\{87, 73, 89, 92, t\}$; media aritmética = 85

b. $\{1, 2, 2, 4, 4, 8, 3, 3, t, 7, 9, 5\}$; moda = 4

c. $\{6, t, 13, 5, 6, 8, 2, 9, 7, 12\}$; mediana = 7,5

### Resolución de problemas

**11** Por cada \$ 20 que recibe una familia, \$ 9 los destina a vivienda, \$ 6 a alimentación y \$ 5 a otros gastos.

a. Dibuja el gráfico de sectores que refleje esa distribución.

b. En el último año, los precios de los conceptos mencionados subieron 20%, 5% y 6%, respectivamente. ¿Cuál ha sido, para esta familia, el porcentaje de aumento anual del total de los gastos? Utiliza la media ponderada.

**12** El diagrama de barras de la Figura 6.7 muestra las calificaciones obtenidas por 50 estudiantes.

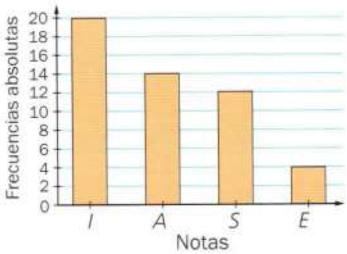



Figura 6.7

Construye el histograma correspondiente a las calificaciones numéricas y calcula la calificación media, teniendo en cuenta la Tabla 6.16.

| Insuficiente | Aceptable | Sobresaliente | Excelente |
|---|---|---|---|
| [0, 5) | [5, 7) | [7, 9) | [9, 10) |

Tabla 6.16

**13** En un colegio se realizó un concurso entre los estudiantes de los tres cursos de décimo grado. El puntaje medio del grupo *A* fue 5,7 puntos, el del grupo *B* fue 5,6, y la de los estudiantes del grupo *C* fue 5,5. En el grupo *A* hay 30 estudiantes y se sabe que en el grupo *C* hay 5 estudiantes más que en el grupo *B*.

Si el puntaje medio de todos los estudiantes de décimo fue 5,6 puntos, ¿cuántos estudiantes de décimo hay en la institución?

**14** La Tabla 6.17 muestra la cantidad de estudiantes que ingresaron a estudiar economía a una universidad de Neiva.

| Año | Cantidad |
|---|---|
| 1996 | 45 |
| 1997 | 49 |
| 1998 | 68 |
| 1999 | 78 |
| 2000 | 96 |

Tabla 6.17

¿Se pueden hallar todas las medidas de tendencia central?

## Evaluación del aprendizaje

La Tabla 6.18 resume la información de la edad a la que un grupo de mujeres tuvo su primer hijo.

| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| [15, 20) | 17 |
| [20, 25) | 13 |
| [25, 30) | 21 |
| [30, 35) | 29 |
| [35, 40) | 41 |

Tabla 6.18

Halla las medidas de tendencia central y escribe la interpretación de cada una.

## Educación ambiental

De acuerdo con la tabla, ¿cuánto ha aumentado, en promedio, la temperatura en el sitio donde se tomó la información?

| Mes | Ene | Feb | Mar | Abr | May | Jun |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ºC | 1,8 | 2,0 | 1,8 | 2,1 | 2,1 | 1,9 |

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 5 Medidas de dispersión

**Saberes previos**

¿De qué depende el salario de una persona dentro de una empresa?

**Analiza**

Al observar la escala salarial de una compañía se dice que, en promedio, los empleados ganan \$ 2 085 000. Una de las empleadas se sorprende con dicha información, pues ella gana \$ 670 000.

- ¿Cómo se puede interpretar esta información?

**Conoce**

Es común escuchar que la interpretación de la información se hace a partir del promedio, pero es importante tener en cuenta que el promedio es una medida que se ve notablemente afectada por datos extremos. Este es el caso de la escala salarial propuesta, si hay una persona que gana \$ 670 000 y el promedio es \$ 2 085 000 lo que sucede es que en dicha compañía hay personas que ganan un salario muy por encima del promedio salarial y otras que ganan muy por debajo de ese promedio.

Las **medidas de dispersión** son parámetros estadísticos que indican cómo se alejan los $N$ datos de un conjunto con respecto a la media aritmética y sirven como indicador de la variabilidad de los datos.

## 5.1 Rango o recorrido

Se conoce como **rango** o **recorrido** de una distribución a la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable y se representa con la letra $R$.

## 5.2 Desviación media

La **desviación media** $D_{\overline{X}}$ mide la dispersión de los datos con respecto a la media. Las fórmulas para calcular la desviación para datos no agrupados y agrupados son: $D_{\overline{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{N}$ y $D_{\overline{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| f_i}{N}$, respectivamente.

## 5.3 Varianza

Se conoce como **varianza** de una variable a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. Se representa con $s^2$ y para datos no agrupados se halla mediante la expresión: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{N}$ o con la equivalente $s^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{N} - \overline{x}^2$ y para datos agrupados con $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}$ o su equivalente $s^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2 f_i}{N} - \overline{x}^2$.

## 5.4 Desviación típica

Se conoce como **desviación típica** de una variable a la raíz cuadrada positiva de la varianza y se representa con $s$.

## 5.5 Coeficiente de variación

El **coeficiente de variación** ($CV$) de un conjunto de datos es el cociente entre la desviación típica y la media.

$CV = \dfrac{S}{\overline{x}}$, cuanto menor es el valor de $CV$, hay más homogeneidad en los datos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 1**

Luego de agrupar en intervalos de edades a los usuarios de un café internet, se completó la Tabla 6.19.

| | $x_i$ | $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert f_i$ | $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [20, 25) | 22,5 | 5 | 112,5 | 6,5 | 42,25 | 32,5 | 211,25 |
| [25, 30) | 27,5 | 3 | 82,5 | 1,5 | 2,25 | 4,5 | 6,75 |
| [30, 35) | 32,5 | 2 | 65 | 3,5 | 12,25 | 7 | 24,5 |
| [35, 40) | 37,5 | 2 | 75 | 8,5 | 72,25 | 17 | 144,5 |
| [40, 45) | 42,5 | 1 | 42,5 | 13,5 | 182,25 | 13,5 | 182,25 |
| | | 13 | 377,5 | | | 74,5 | 1 569,25 |

Tabla 6.19

$$\bar{x} = \frac{377{,}5}{13} \approx 29$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert f_i}{N} = \frac{74{,}5}{13} \approx 5{,}7$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1569{,}25}{13} \approx 120{,}7$$

$$s = \sqrt{120{,}7} \approx 11$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{11}{29} \approx 0{,}38$$

En esta situación el promedio se ve afectado por datos extremos. Así que, es necesario recurrir al cálculo de las medidas de dispersión.

La desviación típica indica que en promedio los valores de la variable se desvían o alejan aproximadamente 11 años de la media. Como $29 - 11 = 18$ y $29 + 11 = 40$, se puede concluir que las edades inferiores a 18 y superiores a 40 son los datos más lejanos de la media.

Si se expresa el coeficiente de variación como un porcentaje, se puede decir que las edades presentan una dispersión del 38%.

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1. Observa los datos de la siguiente distribución:

   9, 5, 3, 2, 1, 2, 6, 4, 9, 8, 1, 3, 5, 4, 2, 6, 3, 2, 5, 6, 7

   Halla la media aritmética y la desviación típica de la distribución.

2. Observa los datos de la distribución.

| $x_i$ | [0, 5) | [5, 10) | [10, 15) | [15, 20) | [20, 25) | [25, 30) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 5 | 6 | 8 | 11 | 1 | 13 |

Tabla 6.20

a. Calcula la media, la mediana y la moda.

b. Halla la varianza y la desviación típica.

### Comunicación

3. Observa los dos conjuntos de datos.

   A: 1, 3, 5, 7, 9 B: 1, 5, 10, 15, 30

   Sin necesidad de hacer ningún cálculo, ¿cuál de los dos conjuntos tiene mayor dispersión?

### Resolución de problemas

4. Se han lanzado dos dados 120 veces y se ha anotado su suma en la Tabla 6.21.

| Sumas | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de veces | 3 | 8 | 9 | 11 | 20 | 19 | 16 | 13 | 11 | 6 | 4 |

Tabla 6.21

Calcula la media y la desviación típica.

## Evaluación del aprendizaje

Las sumas de los puntos obtenidos al lanzar 20 veces dos dados son:

9 3 6 4 5 8 5 6 4 11

7 8 7 8 5 7 2 9 7 10

A. Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

b. Interpreta los resultados de cada medida de dispersión.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 6 Medidas de posición

**Saberes previos**

¿Cómo se establece si el crecimiento de un niño o de una niña es normal?

**Analiza**

Para medir el desarrollo infantil se usan gráficas de percentiles en las que figuran varias líneas numeradas de la siguiente forma: 3, 10, 25, 50, 75, 90 y 97. Para conocer en qué percentil se encuentra un niño, se debe fijar la edad en el eje horizontal y el peso en el vertical. El punto caerá sobre alguna de las líneas indicando su percentil.

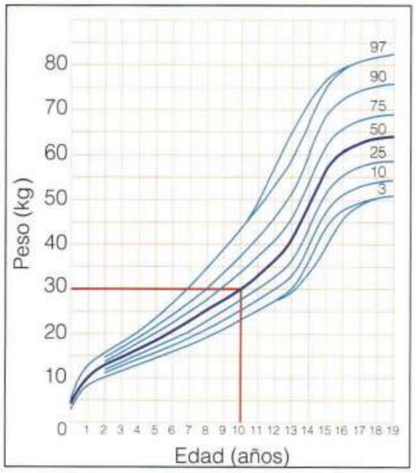



Figura 6.8

- ¿Cómo se interpreta esta información?

**Conoce**

Los pediatras ubican a sus pacientes en una posición, teniendo como referencia cien posiciones diferentes. Esta ubicación indica el lugar en que el infante se encuentra, teniendo presente su talla y su peso.

Los **cuantiles** son medidas de posición que dividen los datos de la distribución en función de otras cuantías. En otras palabras, un cuantil de orden $r$ es el valor de la variabe $x_r$, que hace una división en la distribución, de modo que una proporción $r$ de los valores de la población es menor o igual a $x_r$.

Los cuantiles más utilizados son los cuartiles, deciles y percentiles.

## 6.1 Cuartiles

Se conocen como **cuartiles** a los tres valores que dividen la serie de datos en cuatro partes iguales. Se representan con $Q_1$, $Q_2$ y $Q_3$.

El primer cuartil, $Q_1$, deja por debajo el 25% de los datos de la distribución, mientras que, el segundo cuartil, $Q_2$, coincide con la mediana.

El tercer cuartil, $Q_3$, deja por debajo el 75% de los datos de la distribución.

## 6.2 Deciles

Se denominan **deciles** a los nueve valores que dividen la serie de datos en 10 partes iguales.

Se designan por $D_1$, $D_2$, ..., $D_9$, y se llaman decil primero, segundo, etc., respectivamente.

## 6.3 Percentiles

Se conocen como **percentiles** a los 99 valores que dividen la serie de datos en 100 partes iguales. Se designan por $P_1$, $P_2$..., $P_{99}$, y se llaman percentil primero, segundo..., nonagésimo noveno, respectivamente.

Todos estos parámetros se relacionan entre sí, como se muestra en la Figura 6.9.

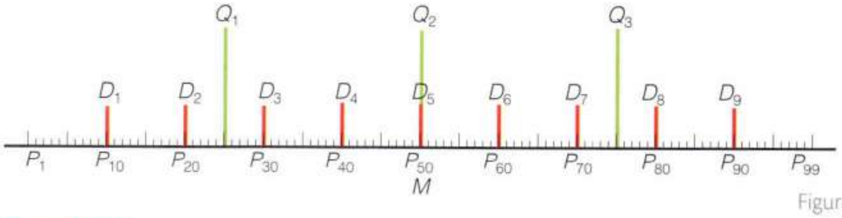



Figura 6.9

**Ejemplo 1**

Los 554 mil estudiantes que presentaron la prueba Saber 11 en 2016 fueron divididos en 100 grupos. Los de desempeño más alto están en el percentil 100 y los más bajos están en el percentil 1. Si Paola fue ubicada en el percentil 90, se interpreta que el 90% de las personas que presentó la prueba está por debajo de ella.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

**Ejemplo 2**

La calificación que obtuvieron 40 estudiantes en la asignatura de filosofía aparece en la Tabla 6.22. Para calcular el decil sexto y el percentil 30, se construye la Tabla 6.23 que incluye las frecuencias absolutas y acumuladas.

Como $6 \cdot \frac{40}{10} = 24$, el decil seis es 6, por ser este el primer valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada excede a 24.

Como $30 \cdot \frac{40}{100} = 12$, el percentil 30 es 4, por ser este el primer valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada excede a 12. El percentil 30 indica que el 30% de los estudiantes sacó una nota inferior a 4.

| Calificación | Número de estudiantes |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 8 |
| 6 | 9 |
| 7 | 3 |
| 8 | 4 |
| 9 | 3 |

Tabla 6.22

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 4 | 8 |
| 4 | 5 | 13 |
| 5 | 8 | 21 |
| 6 | 9 | 30 |
| 7 | 3 | 33 |
| 8 | 4 | 37 |
| 9 | 3 | 40 |

Tabla 6.23

## Actividades de aprendizaje

### Ejercitación

1. Observa la distribución de la Tabla 6.24.

| Edad | 15 | 16 | 22 | 27 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 5 | 7 | 4 | 2 |

Tabla 6.24

Calcula:

a. Los cuartiles $Q_1$ y $Q_3$

b. El decil $D_8$

c. El percentil $P_{80}$

### Razonamiento

2. Calcula la mediana y los cuartiles de estos datos que muestran la cantidad de libros que lee un grupo de estudiantes durante todo el bachillerato:

10, 13, 4, 7, 8, 11, 10, 16, 18, 12, 3, 6, 9,

9, 4, 13, 20, 7, 5, 10, 17, 10, 16, 14, 8, 18

### Ejercitación

3. Los siguientes valores son los rendimientos por hectárea de café en grano (en toneladas) en 8 fincas de diferentes regiones del país: 1, 2, 3, 4, 5, 11, 11, 30.

a. Calcula el rango.

b. Calcula las medidas de tendencia central.

c. Calcula las medidas de dispersión.

d. Calcula el primer y tercer cuartil.

e. Halla los deciles 3 y 7.

f. *Halla los percentiles 10 y 90.*

### Resolución de problemas

4. Se preguntó a 1 000 conductores sobre el número de multas recibidas en el último año. Al hacer la tabla correspondiente, algún número se borró, por lo que solo se dispone de la información incompleta de la Tabla 6.25.

| Número de conductores | | 260 | 150 | 190 | 100 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de multas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Tabla 6.25

Halla la media, la mediana, la moda, la desviación típica, los cuartiles primero y tercero y el rango intercuartílico.

## Evaluación del aprendizaje

Un dentista observa el número de caries de cada uno de los 100 niños de un colegio. La información resumida aparece en la Tabla 6.26.

| N.º de caries | F. absoluta | F. relativa |
|---|---|---|
| 0 | 25 | 0,25 |
| 1 | 20 | 0,20 |
| 2 | $x$ | $z$ |
| 3 | 15 | 0,15 |
| 4 | $y$ | 0,05 |

Tabla 6.26

a. Completa la tabla. Encuentra los valores de $x$, $y$ y $z$.

b. Halla los cuartiles.

c. Calcula el decil 6 y el percentil 80.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 7 Análisis de la información y toma de decisiones

### Saberes previos

Muchos jóvenes emprendedores han tenido éxito montando sus propios negocios. ¿Qué factores crees que han tenido en cuenta antes de tomar la mejor decisión?

### Analiza

Supón que quieres montar una papelería.

- ¿Qué información necesitarías para tomar la mejor decisión?

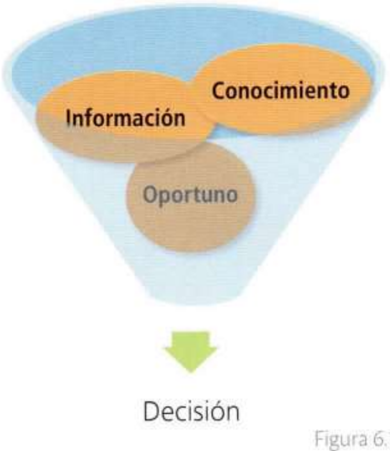



Figura 6.10

### Conoce

Para tomar una decisión se debe considerar el tamaño del mercado de las papelerías, la ubicación, aquello que diferenciará a tu negocio de los demás o cualquier otra decisión estratégica que te ayude a minimizar los riesgos.

El análisis de decisiones ofrece un soporte cuantitativo a quienes deben tomar decisiones en muchas áreas y trabajos. Así, por ejemplo, un ingeniero civil debe determinar la cantidad de cemento a usar en la construcción de las bases de un edificio; los médicos deben determinar la dosis necesaria de un medicamento para controlar la enfermedad de un paciente, entre otros.

## 7.1 Pasos para tomar una decisión

Para tomar una buena decisión es importante hacer una planeación que permita minimizar el riesgo. Para ello, pueden considerarse los siguientes pasos:

1. Definir el objetivo. ¿A dónde se quiere llegar con la decisión?
2. Reunir información y decidir cuál es la más conveniente.
3. Generar opciones y elegir las que sean viables.
4. Tomar la decisión y evaluar sus consecuencias.
5. Implementar.

**Ejemplo 1**

Un amigo de Andrés le ha propuesto entrar a una red de mercadeo en la que, para obtener los mejores resultados económicos, debe ingresar a tantas personas como le sea posible. Además, para recibir todos los beneficios, debe hacer un autoconsumo mensual del producto que ofrece la red.

Andrés analiza los cinco pasos para tomar la decisión.

1. **Objetivo**. Andrés quiere evaluar si es conveniente ingresar a la red como una forma de tener ingresos adicionales a los que recibe por su trabajo.
2. **Reunir información.** Andrés analiza el tipo de modelos de redes de mercadeo, identifica la que le propone su amigo y busca sus ventajas y sus riesgos. De otra parte, él sabe que este tipo de negocio no es bien percibido por la gente por los antecedentes que ya existen en el país.
3. **Generar opciones**. Andrés tiene dos opciones en este caso: ingresar o no ingresar a la red de mercadeo. Si ingresa a la red esto le implicaría:

- Tener disponibilidad de tiempo para contactar a posibles socios.
- Contar con dinero mensual para hacer el autoconsumo que le exige la red.
- Asistir a eventos para entender bien el modelo de la red.

Si no ingresa, puede perder una oportunidad de tener un dinero adicional.

4. **Tomar la decisión**. Después de evaluar todas las variables, Andrés decide que no ingresará a la red, pues de hacerlo no podría dedicarle el tiempo que requiere, deberá hacer una inversión aun cuando no pueda desarrollar el negocio y, además dentro de sus contactos a nadie le interesan las redes de mercadeo, por lo que será difícil conformar un equipo.
5. **Implementar**. Andrés le cuenta a su amigo la decisión de no ingresar a la red.

MATEMÁTICAS ©LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Razonamiento

1. Analiza la situación del Ejemplo 1 y explica si, bajo tu punto de vista, la decisión que tomó Andrés es acertada. Explica tus razones.

2. Juan Andrés y Mateo han almorzado en un restaurante cerca al lugar donde trabajan. Mateo le propone a su amigo que se vayan del restaurante sin pagar, aprovechando que el mesero está distraído atendiendo otras mesas y no les presta atención. ¿Qué decisión debe tomar Juan Andrés?

3. En una fiesta que hace Mariana en su casa, algunos de sus amigos la invitan a probar éxtasis, argumentando que su consumo no es peligroso. ¿Qué decisión deberá tomar Mariana?

   Explica uno a uno los cinco pasos que debe analizar Mariana para tomar la decisión.

4. Tomás tiene una empresa de ingeniería y ha ganado una licitación para construir una gran torre de apartamentos. Él sabe que puede levantar el edificio usando materiales económicos para que la rentabilidad sea mayor y comprar el carro que siempre ha querido.

   a. ¿Qué implicaciones tendrá para Tomás tomar la decisión de usar materiales baratos en la obra?

   b. ¿Es conveniente que Tomás reconsidere su decisión?

5. Sonia le vende unas prendas de vestir a Marcela y cuando hace los cálculos se equivoca y le cobra $ 40 000 menos. Marcela se da cuenta del error y sabe que si no le lo hace caer en cuenta a Sonia, ésta deberá cubrir el faltante de su propio bolsillo. ¿Qué decisión debería tomar Marcela?

6. Jaime es un estudiante de undécimo grado y sueña con tener su propio carro. Un día se reencuentra con su amigo Felipe quien le propone que abandone el colegio para trabajar con su papá durante seis meses. Jaime sabe que el dinero que reuniría aceptando ese trabajo, le alcanzaría para comprar su auto.

   Analiza lo que ocurriría en el evento que Jaime aceptara la propuesta de Felipe.

7. Teresa se ha dado cuenta que su amiga Ángela ha perdido mucho peso durante los últimos meses y que no come nada en el colegio. Teresa intuye que Ángela sufre de anorexia, pues en la clase de ciencias hizo una exposición al respecto y conoce todos los síntomas.

   Luisa, la mamá de Ángela, vive viajando todo el tiempo y no ha notado lo que le ocurre a su hija.

   Teresa teme contarle a Luisa porque sabe que es de muy mal humor y no quiere meter en problemas a su amiga. ¿Qué decisión debería tomar Teresa?

## Evaluación del aprendizaje

i. Roberto vive en Cali con su esposa y sus hijos de tres y cinco años. La empresa donde labora lo piensa reubicar en México por 2 años, pero no le puede brindar apoyo para que se instale allí con su familia. A Roberto le preocupa alejarse por tanto tiempo de su familia, pero también perder su empleo en el que ya lleva 5 años.

   ¿Qué decisión debería tomar Roberto? ¿Qué implicaciones le acarrearían tomar esa decisión?

ii. Mercedes tiene un problema de obesidad por lo que ha sufrido de acoso escolar. Ella quiere mandarse a hacer una liposucción pero le da temor porque en los medios de comunicación aparecen reportados muchos casos de muertes por este tipo de cirugías estéticas. ¿Qué decisión debería tomar Mercedes?

## Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Una persona tiene las siguientes opciones: viajar, estudiar y conformar una familia. Luego de analizar sus posibilidades concluyó que es más probable que viaje por un tiempo, después estudie y por último, conforme una familia. Si tuvieras estas mismas opciones para tu proyecto de vida, ¿qué decisiones tomarías? ¿de qué dependerían?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 8 Probabilidad. Principios aditivo y multiplicativo

**Saberes previos**

¿Qué es un código? ¿Qué es una contraseña? ¿Qué características deben tener para garantizar seguridad?

**Analiza**

La placa de un carro consta de tres letras seguidas de tres números.


- ¿Si la letra Ñ no se usa, cuántas placas pueden diseñarse que cumplan esa condición?

**Conoce**

Como se puede usar 26 letras y 10 dígitos, el número de posibles placas es: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$.

Una **probabilidad** es la medida de la frecuencia con la que puede ocurrir un suceso. Usualmente la probabilidad se indica mediante una razón, en la que el numerador representa la ocurrencia de un hecho y el denominador representa la totalidad de eventos que pueden suceder.

Dado que la probabilidad implica contar el número de veces que ocurre un evento y la totalidad de los que pueden suceder, los principios multiplicativo y aditivo facilitan dichos conteos porque se refieren a las formas en que un evento puede ser realizado.

## 8.1 Principio multiplicativo

Si se desea realizar una actividad que consta de $r$ pasos, en la que el primer paso puede ser llevado a cabo de $N_1$ maneras, el segundo de $N_2$ maneras y el $r$-ésimo de $N_r$ maneras, entonces esta actividad puede ser planteada de $N_1 \cdot N_2 \cdot ... \cdot N_r$ maneras.

**Ejemplo 1**

Un ingeniero puede cimentar una casa de dos maneras (concreto o piedra); mientras que las paredes, las puede levantar en ladrillo, bloque o madera; el techo, puede ser en concreto o en teja y los acabados, solo pueden ser hechos de una forma.

En total hay: $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ maneras de construir la casa.

## 8.2 Principio aditivo

Si se desea realizar una actividad que tiene formas alternativas de llevarse a cabo, sabiendo que la primera de esas alternativas puede ejecutarse de $m$ maneras; la segunda de $n$ maneras ..... y la última de $w$ maneras, entonces, esa actividad puede realizarse de: $m + n + ... + w$ maneras.

**Ejemplo 2**

Fernanda desea comprar un televisor de marca Sony, Samsung o Sharp. Cuando va al almacén se da cuenta que los televisores Sony vienen en dos tamaños, en cuatro colores diferentes y pueden ser para mesa o para colgar en la pared; mientras que, los televisores Samsung vienen en tres tamaños, en dos colores diferentes y pueden ser para mesa o para pared; y la marca Sharp, ofrece un único tamaño, dos colores diferentes y solo hay para mesa. Fernanda cuenta con...

$m = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ maneras de escoger la marca Sony.

$n = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneras de escoger la marca Samsung.

$w = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ maneras de escoger la marca Sharp.

Así, hay $m + n + w = 16 + 12 + 2 = 30$ maneras de seleccionar un televisor.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Actividades de aprendizaje

### Modelación

1 Un restaurante ofrece ocho aperitivos y catorce platos. ¿Cuántas opciones tienes si...

a. pides un aperitivo o un plato principal?

b. pides tanto un aperitivo como un plato principal?

### Comunicación

2 ¿Cuántas *combinaciones* de dos letras pueden comenzar con A o B? (Algunas combinaciones pueden ser Ab, Ah, Ax, etc., es decir, que tengan o no sentido.)

### Resolución de problemas

3 ¿Cuántas placas para carro pueden diseñarse si deben constar de tres letras seguidas del alfabeto y cuatro dígitos, dada cada una de las siguientes condiciones?

a. Es posible repetir letras y números.

b. No es posible repetir letras ni números.

c. ¿Cuántas de las placas del literal b. empiezan por la letra D y por el dígito cero?

d. ¿Cuántas de las placas del literal b. empiezan por la letra D seguida de la G?

### Modelación

4 ¿Cuántos números telefónicos de 6 dígitos es posible construir, dadas cada una de las siguientes condiciones?

a. El cero no puede ir al inicio de los números, pero es posible repetir dígitos.

b. El cero no debe ir en el inicio y no es posible repetir dígitos.

### Comunicación

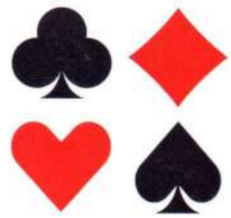
5 Juan debe ir desde su casa al colegio, pero antes debe pasar por la casa de un amigo. Para ir desde su casa a la de su amigo, le sirven tres rutas de buses y para ir desde la casa de su amigo al colegio le sirven solo dos.

a. Representa gráficamente la situación.

b. ¿Cuántas posibles combinaciones de buses puede usar Juan?, ¿cómo lo supiste?

### Resolución de problemas

6 Ángela tiene una carta de una baraja inglesa de naipes. ¿De cuántas maneras puede elegir ella...



a. un rey o una reina?

b. un rey o una carta con figuras negras?

c. un número par o un as?

d. un corazón, un diamante o un trébol?

7 Una familia se compone de una madre, un padre, tres niñas y cinco niños. ¿De cuántas maneras se puede elegir...

a. a una niña para que lave los platos y un niño para secarlos?

b. a un niño, una niña y uno de los padres para ir de compras?

c. a un niño y uno de los padres para barrer la casa?

## Evaluación del aprendizaje

i Las pólizas de seguros de vida de una compañía se clasifican por:

**La edad del asegurado:**

- Menores de 25 años
- Entre 25 años y 50 años
- Más de 50 años

**Sexo :** femenino o masculino

**Estado civil:** soltero o casado

¿Cuál es el número total de clasificaciones?

ii Una persona desea comprar un lote de camisetas y para las empresas *A* y *B* le ofrecen las siguientes posibilidades:

Empresa *A*: tres tallas y dos colores

Empresa *B*: cuatro tallas y tres colores

a. ¿Cuántas opciones tiene para escoger una camiseta en cada empresa?

b. ¿Cuántas maneras tiene de seleccionar una camiseta de alguna de las dos empresas?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 9 Probabilidad de la unión de sucesos



**Saberes previos**

¿Es probable que al efectuar una llamada para realizar una encuesta sobre la intención de voto para las próximas elecciones quien conteste sea una mujer mayor de edad? ¿Qué variables se consideran en este caso?

**Analiza**

Para el experimento aleatorio que consiste en extraer una balota, sin mirar, de una urna que contiene ocho balotas numeradas del 1 al 8 se consideran los siguientes sucesos:

$A$: "obtener número impar"

$B$: "obtener un número par"

$C$: "obtener un número menor que 4"

- ¿Que relación se puede establecer entre cada par de sucesos?

**Conoce**

Para hallar la relación entre cada par de sucesos definidos a partir del experimento aleatorio indicado, primero se deben determinar los elementos de cada suceso.

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\} \qquad C = \{1, 2, 3\}$$

Los sucesos $A$ y $B$ son **incompatibles** pues para ninguna balota que se extraiga se puede dar que salga un número que sea a la vez par e impar. En cambio, los sucesos $A$ y $C$ son **compatibles** pues tienen en común el elemento 3. Los sucesos $B$ y $C$ también son **compatibles** pues tienen en común el elemento 2.

## 9.1 Sucesos incompatibles

La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos. Este axioma se extiende al caso de tres sucesos $A$, $B$ y $C$ incompatibles dos a dos y se representa simbólicamente así:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Donde $P$ denota el cálculo de la probabilidad. De forma análoga, la estructura se puede aplicar al caso de $n$ sucesos:

Para $n$ sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ incompatibles dos, a dos se tiene:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

**Ejemplo 1**

Las probabilidades de los sucesos $A$ : "obtener un número impar" y $B$: "obtener un número par" anteriormente definidos son:

$$P(A) = \frac{4}{8} \qquad P(B) = \frac{4}{8}$$

Como los sucesos $A$ y $B$ son incompatibles $P(A \cup B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$.

En este caso, la probabilidad es 1 porque la unión de los sucesos forma el espacio muestral.

## 9.2 Sucesos compatibles

Si $A$ y $B$ son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la **probabilidad de la unión de $A$ y $B$** es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, menos la probabilidad del suceso intersección de $A$ y $B$, esto es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

**Ejemplo 2**

Para calcular la probabilidad de que al elegir al azar una carta de una baraja española de 40 naipes sea un as o una copa se realiza lo siguiente:

Se llama $A$: "Salir un as". Entonces, $P(A) = \frac{4}{40}$

Se llama $C$: "Salir una copa". Por consiguiente, $P(C) = \frac{10}{40}$

Se observa que estos sucesos poseen un elemento común, el as de copas, que no se debe contar dos veces a la hora de calcular la probabilidad de su unión.

Por eso, $P(A \cap C) = \frac{1}{40}$

Por tanto, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$

## Actividades de aprendizaje

### Resolución de problemas

1. De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. Halla las siguientes probabilidades.

   a. Que la carta elegida sea menor que cinco o figura.

   b. Que la carta elegida sea menor que cinco o basto.

   Para resolver cada problema, halla la probabilidad de los siguientes sucesos y completa la información faltante en el desarrollo de la solución de cada apartado a. y b.

   $A$ = **Salir menor que 5**

   $B$ = **Salir figura**

   $C$ = **Salir bastos**

   a. Los sucesos $A$ y $B$ son ______. Entonces:

   $P(\text{menor que 5 o figura}) = P(A \cup B)$

   $=$ ______

   $=$ ______

   b. Los sucesos $A$ y $C$ son ______. Entonces:

   $P(\text{menor que 5 o bastos}) = P(A \cup C)$

   $=$ ______

   $=$ ______

2. Observa la siguiente demostración y explica cada uno de los pasos.

   Dados dos sucesos, $A$ y $B$, el suceso $A$ se puede expresar como la unión de dos sucesos incompatibles:

   $$A = (A \cap B) \cup (A - B)$$

   $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$, y, por lo tanto,

   $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

## Evaluación del aprendizaje

Sean $A$, $B$ y $C$ tres sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$P(A) = 0{,}3$ $\quad P(\overline{B}) = 0{,}5$ $\quad P(C) = 0{,}7$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$ $\quad P(A \cup C) = 0{,}6$

$P(B \cap C) = 0{,}3$

$P(A \cap B \cap C) = 0{,}1$

Halla las siguientes probabilidades.

a. $P(\overline{A})$ b. $P(A \cup B)$

c. $P(B \cup C)$ d. $P(A \cap C)$

e. $P(A \cup B \cup C)$ f. $P(\overline{A} \cap \overline{C})$

g. $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ h. $P(\overline{B} \cap C)$

i. $P(A - B)$ j. $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# 10 Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos

**Saberes previos**

¿De qué depende que se pueda sacar una bola verde de una bolsa en la que inicialmente había cierta cantidad de bolas verdes y cierta cantidad de bolas rojas y ya se sacó, sin regresarse a la bolsa, una bola roja?

**Analiza**

De un recipiente que contiene cinco bolas verdes y cuatro rojas se extraen dos bolas consecutivamente y sin devolución.

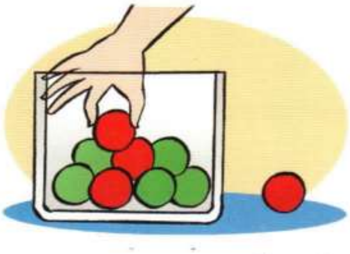


Figura 6.11

- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

**Conoce**

En ocasiones, la probabilidad de un suceso se ve afectada cuando se dispone de información adicional sobre algún otro suceso relacionado con el primero y que se ha producido con anterioridad. Cuando esto ocurre se debe calcular la **probabilidad condicionada** de un suceso respecto a otro.

La **probabilidad condicionada** del suceso $B$ respecto del suceso $A$ se denota como $P(B/A)$ y se calcula con el siguiente cociente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } P(A) \neq 0$$

De dicha expresión se puede establecer que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

**Ejemplo 1**

Para determinar cuál es la probabilidad de que al extraer las dos bolas del recipiente ambas sean rojas, se definen los sucesos $R_1$ = "sacar bola roja en la primera extracción" y $R_2$ = "sacar bola roja en la segunda extracción".

Al no devolver la bola después de la primera extracción, la cantidad de bolas en la urna antes de la segunda extracción varía, pues ya solo quedarían tres rojas de un total de ocho bolas. Como el suceso $R_2$ está condicionado por el suceso $R_1$, la probabilidad se calcula así:

$$P(R_2/R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

## 10.1 Dependencia e independencia de sucesos

Dos sucesos son **independientes** si no están relacionados entre sí. En el ejemplo anterior, si antes de realizar la segunda extracción se devuelve a la urna la bola extraída en la primera extracción, los sucesos $R_2$ y $V_2$ no estarán condicionados a los sucesos $R_1$ y $V_1$.

Dos sucesos $A$ y $B$ son **independientes** si $P(B) = P(B/A)$.

Dos sucesos $A$ y $B$ son **dependientes** si $P(B) \neq P(B/A)$.

Otra forma de caracterizar la **independencia de sucesos** es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ P(B/A) = P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## 10.2 Independencia de tres o más sucesos

Para que tres o más sucesos sean independientes entre sí, no basta con que cumplan la condición de ser independientes dos a dos.

Para el caso de tres sucesos *A*, *B* y *C*, solo son independientes si se verifican simultáneamente las siguientes condiciones.

Los sucesos son independientes dos a dos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Además, se cumple que: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

**Ejemplo 2**

Los sucesos *A*, *B* y *C* son independientes dos a dos:

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Pero, los tres a la vez no son independientes:

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(A) \cap P(B) \cap P(C) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$

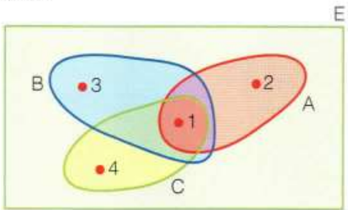


Figura 6.12

### Actividades de aprendizaje

**Resolución de problemas**

1. De los 600 estudiantes de un colegio, 240 tienen los ojos claros, 325 tienen cabello oscuro y 110 tienen cabello rubio con los ojos oscuros. Se escoge un estudiante al azar. Halla la probabilidad de que:
   a. tenga cabello rubio.
   b. tenga ojos oscuros.
   c. tenga cabello oscuro y tenga ojos claros.

**Ejercitación**

2. En un experimento se sabe que:
   $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,3$ y $P(A/B) = 0,1$.
   Halla $P(A \cup B)$.

**Razonamiento**

3. Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que:
   $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,7$ y $P(B) = p$
   ¿Para qué valor de *p* son *A* y *B* sucesos incompatibles? ¿Para qué valor de *p* son *A* y *B* sucesos independientes?

**Resolución de problemas**

4. Se tiene una bolsa con quince bolas negras y diez bolas blancas, se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas en cada uno de los siguientes casos.
   a. Con devolución a la bolsa de la primera bola extraída.
   b. Sin devolución

### Evaluación del aprendizaje

El 60% de los estudiantes de un colegio aprobaron filosofía y el 70% aprobaron matemáticas. Además, el porcentaje de estudiantes que aprobaron filosofía habiendo aprobado matemáticas es del 80%.

a. ¿Qué porcentaje de estudiantes reprobó ambas asignaturas?
b. Si Juan sabe que aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de aprobar también matemáticas?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

## Variables cualitativas

### Comunicación

**1** Representa una encuesta a 25 personas sobre la marca de celular que tienen.

a. Elabora la tabla de frecuencias absolutas y relativas de esta variable.

b. Dibuja el gráfico de barras y el de sectores.

c. Escribe un párrafo en el que analices las conclusiones que pueden surgir del estudio.

## Variables cuantitativas discretas y continuas

### Razonamiento

**2** Indica el tipo de variable estadística que corresponde a las siguientes situaciones.

a. En una biblioteca pública quieren determinar la cantidad de libros que leen, en un año, los usuarios entre los 15 y los 19 años de edad.

b. En una librería de un centro comercial se quiere identificar el género literario favorito de los clientes que visitan sus instalaciones los fines de semana.

### Resolución de problemas

**3** La siguiente tabla de frecuencias indica el tiempo de duración de las llamadas en un *call center* que soluciona inconvenientes relacionados con el servicio de telefonía celular.

| Tiempo de duración | Número de personas |
|---|---|
| [0, 5) | 35 |
| [5, 10) | 23 |
| [10, 15) | 15 |
| [15, 20) | 10 |
| [20, 25) | 9 |

Tabla 6.27

a. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas.

b. Elabora el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

## Muestreo

### Comunicación

**4** Recuerda qué es un muestreo y los diferentes tipos de muestreo que existen. Da dos ejemplos de cada uno.

## Medidas de tendencia central

### Resolución de problemas

**5** Halla las medidas de tendencia central para los datos de la Tabla 6.28.

| Descargas de videos | Número de personas |
|---|---|
| [3, 9) | 35 |
| [9, 15) | 20 |
| [15, 21) | 17 |
| [21, 27) | 14 |
| [27, 33) | 10 |

Tabla 6.28

## Medidas de dispersión

### Resolución de problemas

**6** El tiempo que gastan 40 personas en desplazarse de la casa al trabajo se registra en la Tabla 6.29.

| Tiempo (min) | Número de personas |
|---|---|
| 30 | 12 |
| 45 | 19 |
| 60 | 32 |
| 75 | 30 |
| 90 | 19 |

Tabla 6.29

a. Calcula los cuartiles para esta situación.

b. Calcula la desviación media, la varianza y la desviación típica.

c. Escribe dos conclusiones relacionadas con el contexto y las medidas que hallaste.

## Medidas de posición

### Resolución de problemas

**7** En la Tabla 6.30 se registra el estrato al que pertenecen algunos predios en una localidad de Bogotá.

| Estrato | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Predio | 15 | 24 | 19 | 22 | 9 | 5 |

Tabla 6.30

Calcula e interpreta los cuartiles $Q_1$ y $Q_3$, el decil $D_7$ y el percentil $P_{60}$ del anterior conjunto de datos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Estrategia: Combinar operaciones

### Problema

Los siguientes datos corresponden a los tiempos, en minutos, que emplean los operarios de una fábrica para realizar una labor.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 43 | 45 | 43 | 47 | 48 | 51 | 51 |
| 38 | 61 | 62 | 39 | 40 | 41 | 39 | 40 |
| 55 | 47 | 43 | 62 | 61 | 40 | 61 | 61 |
| 38 | 47 | 39 | 60 | 45 | 43 | 62 | 60 |
| 39 | 46 | 44 | 61 | 39 | 38 | 40 | 60 |

¿Qué porcentaje de los operarios emplea un tiempo menor a cincuenta minutos?

### 1. Comprende el problema

- ¿A qué variable corresponden los datos proporcionados?

  R: Al tiempo empleado por los operarios de una fábrica para realizar una labor determinada.

- ¿Qué interrogante plantea el problema?

  R: El porcentaje de operarios que emplea un tiempo menor a cincuenta minutos en realizar la labor.

### 2. Crea un plan

- Organiza los datos en una tabla y establece el porcentaje.

### 3. Ejecuta el plan

| $(L_i, L_s)$ | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [38, 42) | 40 | 13 | 13 | 0,325 | 0,325 |
| [42, 46) | 44 | 7 | 20 | 0,175 | 0,5 |
| [46, 50) | 48 | 5 | 25 | 0,125 | 0,625 |
| [50, 54) | 52 | 3 | 28 | 0,075 | 0,7 |
| [54, 58) | 56 | 1 | 29 | 0,025 | 0,725 |
| [58, 62) | 60 | 11 | 40 | 0,275 | 1 |

Tabla 6.31

- Se señala en rojo la clase en la que se encuentra un tiempo menor a 50 minutos, observa la columna $H_i$.

R: El 62,5% de los empleados emplea un tiempo menor a cincuenta minutos.

### 4. Comprueba la respuesta

Verifica que en promedio los operarios emplean cerca de 48 minutos.

## Aplica la estrategia

1. Los siguientes datos corresponden a las valoraciones obtenidas por un grupo de estudiantes en una asignatura.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 80 | 85 | 65 | 60 | 50 | 45 | 90 |
| 65 | 75 | 85 | 50 | 55 | 45 | 60 | 95 |
| 60 | 50 | 55 | 60 | 65 | 75 | 45 | 80 |
| 95 | 60 | 75 | 70 | 90 | 75 | 85 | 65 |

Si se considera que con una valoración mayor o igual a 70 se aprueba, ¿qué porcentaje de estudiantes aprueba la asignatura?

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

## Resuelve otros problemas

2. Al analizar la estatura de un grupo de 50 estudiantes se encontró que el más alto mide 163 cm y el mas bajo, 112 cm. Si se organizan en una tabla de distribución de frecuencias, ¿cuál sería el número de intervalos?

## Formula problemas

3. Escribe un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

a. 163, 165, 164, 160, 162, 159

b. 162, 161, 160, 159, 152, 158

### Enriquece tu vocabulario

- Busca en el diccionario la definición de las palabras *posibilidad* y *probabilidad* e indica sus diferencias.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Evaluación del aprendizaje

## Variables cualitativas. Distribución de frecuencias

### Ejercitación

**1** Clasifica cada una de las siguientes variables en ordinales o nominales. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Tipos de accidentes de tránsito registrados en una ciudad en un mes.
b. Grupo de *rock* preferido por los padres de los estudiantes de décimo grado.
c. Marca de *smartphone* preferido por los estudiantes del colegio.
d. Opinión sobre el servicio de transporte público en una ciudad.

## Variables cuantitativas discretas. Distribución de frecuencias

### Comunicación

**2** La siguiente tabla de frecuencias indica el tiempo de duración de la atención de algunos usuarios en un banco. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

| Tiempo de duración (en minutos) | Número de personas |
|---|---|
| [0, 10) | 35 |
| [10, 20) | 23 |
| [20, 25) | 15 |
| [25, 30) | 10 |
| [30, 35) | 9 |

Tabla 6.32

a. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas.
b. Elabora el polígono de frecuencias absolutas acumuladas. Escribe dos conclusiones.

### Razonamiento

**3** A un grupo de personas se les preguntó por el vehículo que prefieren para movilizarse en la ciudad. SELECCIÓN MÚLTIPLE

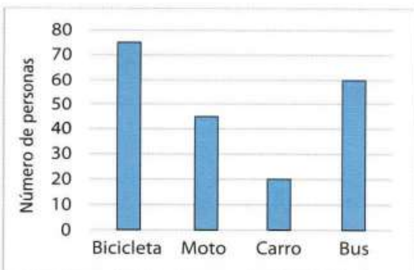



Figura 6.13

La frecuencia acumulada de los tres mayores datos es:

a. 0,375 b. 0,9 c. 175 d. 180

## Medidas de tendencia central

### Modelación

**4** Los siguientes datos corresponden a la cantidad de mensajes vía *WhatsApp* que envía un estudiante universitario durante 42 días. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 15 | 10 | 36 | 48 | 57 | 56 |
| 36 | 45 | 9 | 5 | 53 | 32 | 25 |
| 9 | 46 | 12 | 31 | 54 | 58 | 60 |
| 26 | 41 | 19 | 17 | 24 | 51 | 47 |
| 21 | 18 | 14 | 22 | 45 | 33 | 36 |
| 12 | 16 | 56 | 44 | 16 | 13 | 26 |

Figura 6.33

a. Elabora una distribución de frecuencias en intervalos de amplitud 5.
b. Halla la media, la mediana y la moda de la distribución e interpreta sus valores.

## Medidas de dispersión

### Ejercitación

**5** Usa la distribución de frecuencias que hiciste para los datos del ejercicio anterior para calcular cada una de las medidas de dispersión. Luego, interpreta sus valores. ACTIVIDAD DE REFUERZO

## Medidas de posición

### Ejercitación

**6** En la Tabla 6.34 se registran los datos que recogió un pediatra sobre la edad que tenían 50 niños cuando caminaron por primera vez. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 1 | 4 | 9 |
| 16 | 11 | 8 | 1 | 1 | 8 | 11 | 9 | 10 | 6 |
| 1 | 7 | 8 | 9 | 15 | 15 | 13 | 5 | 12 | 10 |
| 9 | 8 | 9 | 11 | 1 | 1 | 13 | 6 | 10 | 6 |
| 1 | 7 | 9 | 8 | 9 | 8 | 6 | 7 | 1 | 12 |

Tabla 6.34

a. Halla el primer cuartil.
b. Calcula los deciles 8 y 9.
c. Determina los percentiles 40, 50 y 80.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## Análisis de la información y toma de decisiones

### Razonamiento

**7** Un comerciante compra pescado en una central mayorista para luego venderlo. Cada caja de pescado se identifica como excelente o no excelente, de acuerdo con el porcentaje de pescado que se considere de óptima calidad. Una caja de pescado excelente contiene un 90% de pescado de alta calidad, mientras que, una de pescado no excelente contiene solo un 20% de pescado de alta calidad. Una caja de pescado excelente genera un beneficio de $ 300 000, mientras que, uno no excelente causa pérdidas de $ 300 000. Antes de comprar una caja, el comerciante puede comprobar la calidad de la misma extrayendo un ejemplar de pescado con el objetivo de verificar si se trata o no de pescado de alta calidad. Establece la estrategia que debe seguir el empresario, así como el coste de la información. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## Probabilidad. Principios aditivo y multiplicativo

### Ejercitación

**8** Sean los conjuntos: ACTIVIDAD DE REFUERZO

$A = \{a, m, r\}$ $B = \{b, d, i, l, u\}$ $C = \{c, e, n, t\}$

Cuántos modos hay para elegir una letra de los conjuntos $A$, $B$ y $C$?

**9** Usando los tres conjuntos del problema anterior, determina el número de conjuntos de tres letras que pueden ser creados, de modo que una letra pertenezca al conjunto $A$, una al conjunto $B$ y la otra al conjunto $C$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

### Modelación

**10** Andrés desea ir a Cartagena o a Capurganá en las próximas vacaciones de fin de año. Para ir a Cartagena tiene tres medios de transporte hasta Medellín y dos para ir de Medellín a Cartagena, y para ir a Capurganá desde Medellín tiene cuatro diferentes medios de transporte. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. ¿Cuántas maneras diferentes tiene Andrés para ir a Cartagena o a Capurganá?

b. ¿Cuántas maneras diferentes, tiene Andrés para ir a Cartagena o a Capurganá en viaje redondo, si no regresa por el mismo medio de transporte por el que inició el viaje?

## Probabilidad de la unión de sucesos

### Resolución de problemas

**11** Un estudiante va a la biblioteca. La probabilidad de que seleccione una obra de ficción 0,40, que elija una obra de no ficción 0,30 y que opte por una de ficción o de no ficción es 0,20. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccione una obra de ficción, una de no ficción o ambas? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

### Modelación

**12** Una urna contiene 6 canicas rojas y 4 canicas negras. Si se sacan al azar dos canicas y se devuelven a la urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos canicas sean negras? CUESTIONARIO

a. 0,16 b. 0,32 c. 0,36 d. 0,40 e. 0,60

**13** Una persona extrae una carta al azar de una baraja. Si la carta que saca es una espada o un as, gana un premio sorpresa. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona gane el premio? CUESTIONARIO

a. $\frac{1}{13}$ b. $\frac{13}{52}$ c. $\frac{4}{13}$ d. $\frac{17}{52}$ e. 0

### Razonamiento

**14** Considera el experimento "lanzar un dado". Encuentra la probabilidad de obtener un número par que sea múltiplo de 3. ACTIVIDAD DE REFUERZO

## Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos

### Comunicación

**15** En una bolsa hay 5 canicas azules y 5 rojas. Completa los enunciados. ACTIVIDAD DE COMPLETAR

La probabilidad de sacar una canica azul es ___ de ___.

Pero, después de sacar una canica azul las probabilidades cambian.

Así que, en la próxima extracción, si se saca una canica roja, la probabilidad de extraer una azul es ___ de ___, pero, si se saca una azul, entonces, la probabilidad de obtener nuevamente una azul es ___ de ___.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

# Glosario

## A

**Aleatorio.** ExperAltura de un prisma. Segmento que une las bases de un prisma y es perpendicular a estas.

**Altura de una pirámide.** Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

**Ángulos alternos externos.** Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

**Ángulos alternos internos.** Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

**Ángulos opuestos por el vértice.** Ángulos que tienen un vértice común, y los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

## B

**Baricentro.** Punto en que concurren las medianas de un triángulo.

**Binomio.** Expresión algebraica que tiene dos términos.

**Bisectriz.** Recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

## C

**Circuncentro.** Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

**Coeficiente.** Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

**Cuadrado perfecto.** Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

## D

**Decimal periódico.** Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

**Desigualdad.** Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

**Dominio.** Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

## E

**Ecuación lineal.** Ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde $a$ y $b$ son números reales, $x$ representa la incógnita y $a \neq 0$.

**Esfera.** Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

**Espacio muestral.** Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Evento.** Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

**Eventos dependientes.** Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

**Eventos independientes.** Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

**Expresión algebraica irracional.** Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

**Expresión algebraica racional.** Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

## F

**Fracción algebraica.** Es el cociente entre dos polinomios.

**Fracción compleja.** Es aquella fracción cuyo denominador o numerador, o ambos, presentan una fracción.

**Frecuencia relativa.** Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realiza el experimento estadístico.

**Función.** Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto $A$ un único elemento de un conjunto $B$.

**Función afín.** Función de la forma $y = mx + b$, donde $m$ y $b$ son constantes.

**Frecuencia cuadrática.** Ecuación polinómica de segundo grado, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes $a$, $b$ y $c$ son números reales. La representación de la función equivale a una parábola.

**Función lineal.** Función de la forma $y = mx$, donde $m$ es una constante.

## I

**Incentro.** Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

**Inecuación.** Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

## L

**Logaritmo.** Se define como logaritmo en base a de un número *b*, a otro número *c* tal que *a* elevado al exponente *c* da como resultado el número *a*: $\text{Log}_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

## M

**Media aritmética.** Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

**Mediana (estadística).** Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

**Medidas de tendencia central.** Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

**Moda.** Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

## N

**Notación científica.** Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

**Número irracional.** Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

**Número racional.** Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

**Números reales.** Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

## O

**Ortoedro.** Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

**Paralelepípedo.** Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

**Pendiente.** En la recta dada por la ecuación $y = mx + b$, el valor $m$ corresponde a una constante diferente de cero, denominada pendiente.

**Polígono cóncavo.** Es aquel en el que la recta que pasa por uno o más lados corta a otro lado del polígono.

**Polígono convexo.** Es aquel cuyos lados interiores son menores que 180°. Además, la recta que pasa por cualquiera de los lados no corta a ningún otro lado del polígono.

## S

**Sistemas de ecuaciones lineales.** Conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen ambas ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

## T

**Teorema.** Proposición que afirma una verdad demostrable.

**Teorema de Pitágoras.** Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

**Término.** Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

**Triángulo acutángulo.** Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

**Triángulo equiángulo.** Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

**Triángulo equilátero.** Triángulo que tiene todos los lados iguales.

**Triángulo escaleno.** Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

**Triángulo isósceles.** Triángulo que tiene dos lados iguales.

**Triángulo obtusángulo.** Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

**Triángulo rectángulo.** Triángulo que tiene un ángulo recto.

**Triángulos congruentes.** Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

## V

**Valor absoluto.** El valor absoluto de un número real *c* se simboliza $|c|$ y se define como:

**Valor numérico de un monomio.** Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

**Variable algebraica.** Cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión.

**Variable dependiente.** Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

**Variable independiente.** Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

# Bibliografía


- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Barcelona: Gedisa, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A. Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis, 1995.
- Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje* 5. Madrid: Síntesis, 1997.
- Clemens *et al*. *Geometría* Serie Awli. México: Pearson, 1998.
- De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Málaga: Ágora, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Pearson-Addison Wesley V. A. M, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Barcelona: Gedisa, 1995.
- Jouette, André. *El secreto de los números*. Bogotá: Intermedio, 2002.
- Küchemann, D. "The meaning children give to the letters in generalised arithmetic." En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds (2002): 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. México: Harla, S. A. de C.V., 1972.
- Mason, J.; Burton, L., y Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Barcelona/Madrid: Labor/MEC, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, 1998.
- Moise, Edwin, y Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Moscú: Mir, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. México: Compañía Editorial Continental S. A., 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. México: McGraw-Hill, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes, y Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra*. México: Síntesis, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. México: McGraw-Hill, 1975.
- Suppes, Patrick, y Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Bogotá: Reverté, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson Editores, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. México: Limusa, 1988.
- Zill, Dennis, y Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. México: McGraw-Hill, 2000.