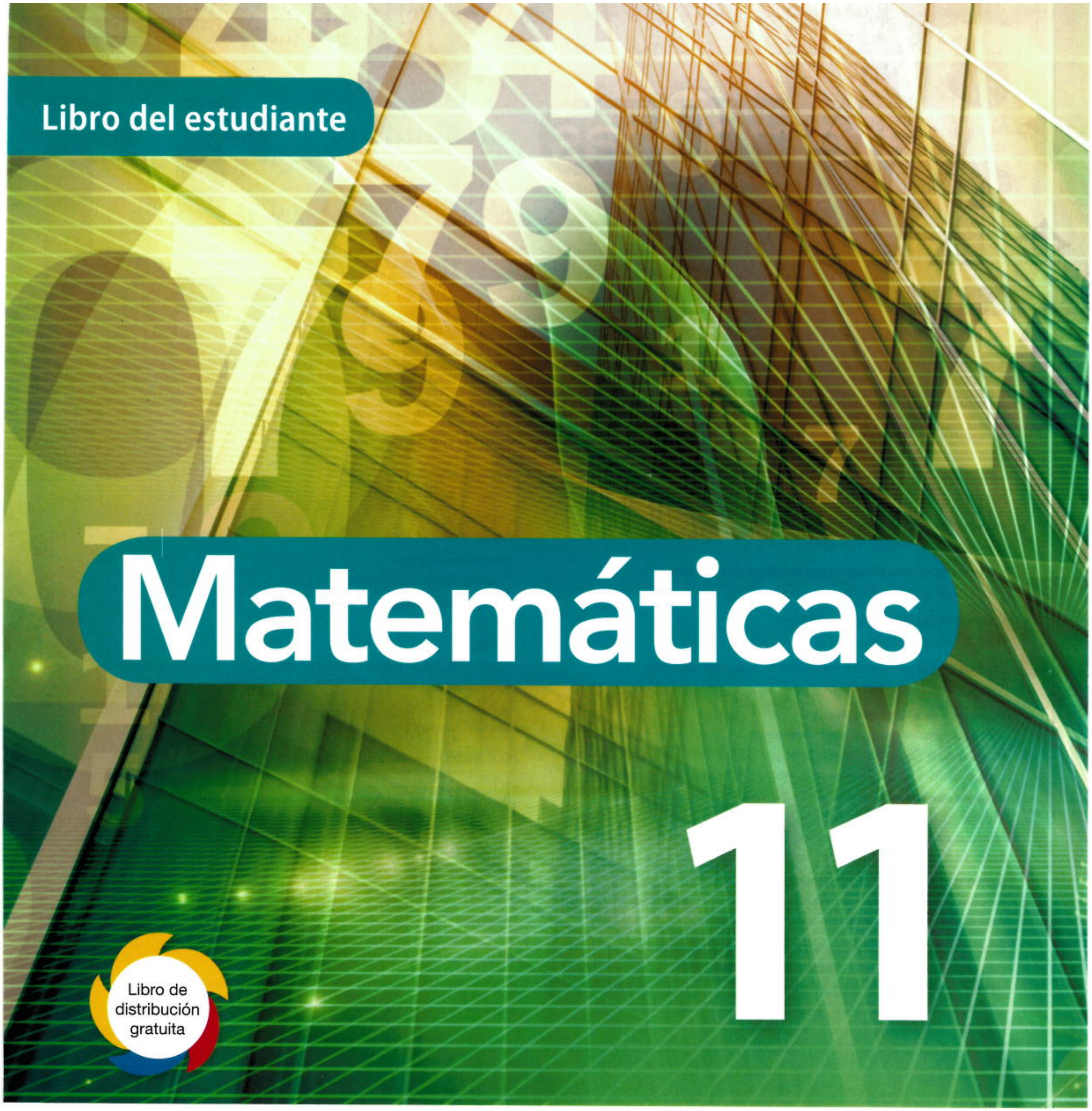
Libro del estudiante

Matemáticas

11



Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Matemáticas

Libro del estudiante

11

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Juan Manuel Santos Calderón

MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL
Yaneth Cristina Giha Tovar

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Víctor Javier Saavedra Mercado

DIRECTORA DE CALIDAD DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Paola Andrea Trujillo Pulido

SUBDIRECTOR DE FOMENTO DE COMPETENCIAS
Alfredo Olaya Toro (E)

SUBDIRECTORA DE REFERENTES Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
María Claudia Sarta Herrera

EQUIPO DE MATERIALES PEDAGÓGICOS
COORDINADORA: Angélica Ortega Santacruz
PROFESIONALES: Deyanira Alfonso Sanabria, Edna Maritza Corredor Suárez, Diana Patricia Tobón Maldonado, Andrés Alberto Andrade Ceballos

EQUIPO TÉCNICO DE MATEMÁTICAS
ASESORA: Yadira Sanabria Mejía
PROFESIONALES: Jenny Andrea Blanco Guerrero, Guillermo Andrés Salas Rodríguez, Jairo Aníbal Rey Monroy

EQUIPO TÉCNICO EVALUADOR DE MATERIALES MATEMÁTICAS
Ricardo Cañón Moreno, María Isabel Noreña, Diana Velásquez Rojas, Ana Celia Castiblanco Paiba, María Beatriz Rocha

EQUIPO PROGRAMAS TRANSVERSALES Y COMPETENCIAS CIUDADANAS
COORDINADORA: Olga Lucía Zárate Mantilla
PROFESIONALES: Francine Botero Garnica, Sandra Patricia Mora Varela, Juan Camilo Caro Daza

EQUIPO LAROUSSE

DIRECTOR DE LA SERIE
Carlos Arturo Riaño Forero

EDITORES
Equipo Editorial SM

CORRECCIÓN DE ESTILO
Gustavo Adolfo Patiño Díaz

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Equipo de Diseño SM

FOTOGRAFÍA
Ángel Camacho Linares / Rafael Niebles / Wikimedia Commons / Shutterstock.com / A.RICARDO / Andrey Khrolenok / Radu Razvan / Giuseppe Costantino /Kaliva /Teddy Leung / Zeynep Demir /Anthony Hall / rmnoa357 / Luckies /Chones /

© Difusora Larousse de Colombia Ltda., 2017
Calle 117 No. 11 A – 65
Bogotá, D. C., Colombia

© Ediciones SM S.A., 2017
Carrera 85 K N° 46 A - 66
Bogotá, D. C., Colombia

ISBN 978-958-689-080-9

IMPRESIÓN
Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
Impreso en Quad/Graphics

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier otro medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros medios, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

LAROUSSE

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Presentación

Aceptar el reto de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el 2025 es una decisión que genera una gran responsabilidad. La necesidad de no perder ni un segundo en el camino hacia la calidad es un llamado urgente a rectores, docentes y padres de familia que se levantan cada mañana comprometidos con el futuro de miles de estudiantes.

Lograr una educación de calidad es el objetivo que nos hemos trazado para construir un país con igualdad de oportunidades para todos y en paz. Una igualdad que no sólo contempla el derecho que cada uno de los colombianos tiene a la educación, sino que se refuerza en la idea de equilibrar la cancha de juego y hacer que todos nuestros niños, niñas y adolescentes tengan las mejores condiciones en los colegios, incluyendo materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento de su proceso de aprendizaje.

Como Ministerio sabemos que la excelencia educativa se gesta en el aula, y es allí donde se deben concentrar todos los esfuerzos de transformación. Por esto, dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clase, es la forma en la que se hará visible el esfuerzo de un equipo de rectores y docentes pioneros comprometidos con el mejoramiento de la calidad en la educación.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional presenta el siguiente material de apoyo para el proceso pedagógico de enseñanza de lenguaje y matemáticas, de alta calidad. Este material ha sido seleccionado de manera juiciosa por expertos, para que docentes y estudiantes lo incorporen a la práctica de aula, los trabajen, los disfruten con su familia, aprendan con ellos y descubran un mundo de narraciones mágicas y problemas matemáticos que les dará paso a un nuevo universo de posibilidades.

Estos libros, cuadernos de trabajo y guías llegarán a los colegios y cobrarán vida en el aula gracias al compromiso y dedicación de cada uno de ustedes. Por esto es importante explorarlos, conocerlos y apropiarlos; con seguridad este será un paso más hacia nuestra meta de hacer de Colombia la más educada con ustedes como los protagonistas en este nuevo capítulo de su historia.

Sin lugar a duda, esta es una de las apuestas más importantes por el futuro del país.

Estructura de tu libro

Este libro está organizado en seis divisiones o unidades. Cada una de ellas se compone de subdivisiones o temas. Las unidades presentan la siguiente estructura:

Apertura de unidad

En esta doble página recordarás **aquello que ya sabes** y **conocerás lo que vas a aprender** y su aplicación en tu vida cotidiana.

Ruta didáctica

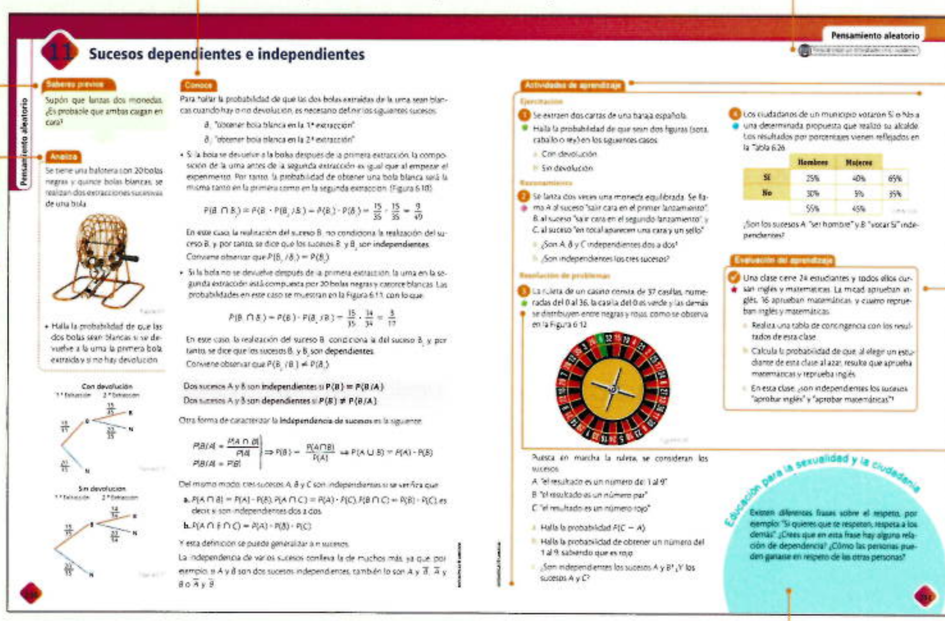
El desarrollo de todos los contenidos presenta la siguiente **ruta didáctica**.

Conoce
Desarrolla los contenidos del tema. Sintetiza los conceptos básicos que debes aprender.

Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

Saberes previos
Explora lo que ya sabes.

Analiza
Establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.



Actividades de aprendizaje
Aplica y refuerza lo que has aprendido.

Evaluación del aprendizaje
Evalúa tus conocimientos.

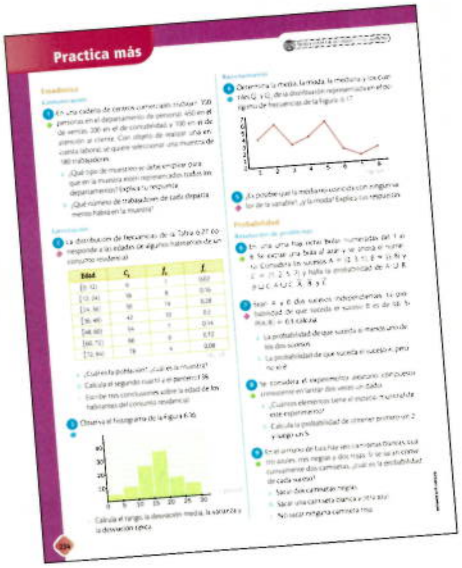
Temas transversales

Procesos cognitivos
- Memoria
- Comprensión
- Análisis
- Aplicación
- Síntesis
- Evaluación

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

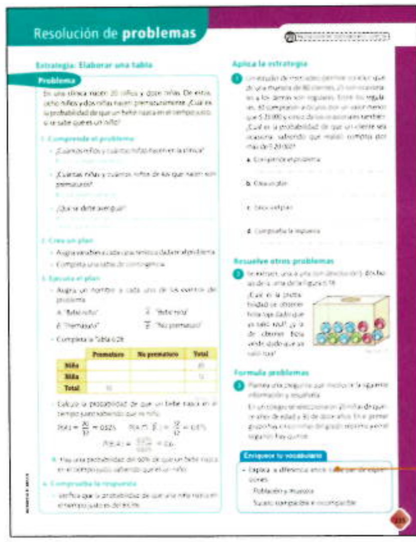
Practica más

Resuelve **más actividades** relacionadas con los temas de la unidad y **desarrolla las habilidades** propias de la actividad matemática.



Resolución de problemas

Resuelve problemas con el uso de diferentes estrategias. Sigue el **ejemplo resuelto** como guía y pon en práctica la estrategia estudiada.

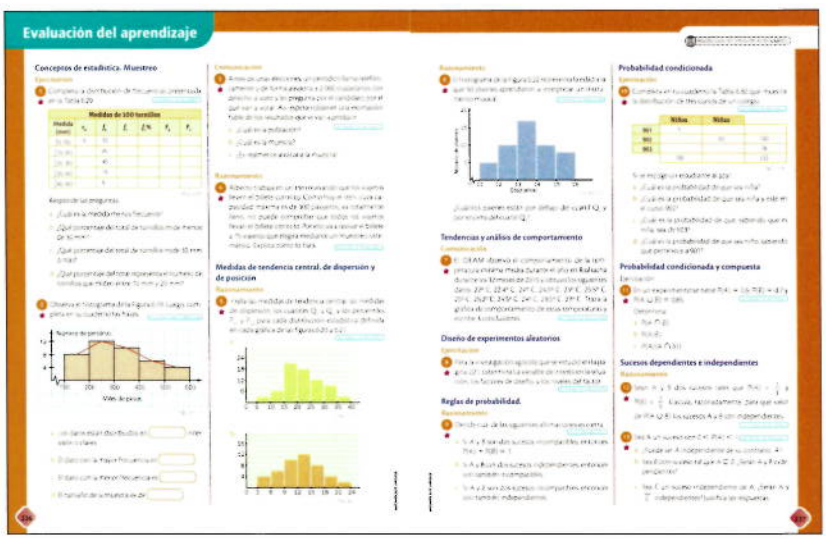


Enriquece tu vocabulario

Amplía tu vocabulario matemático.

Evaluación del aprendizaje

En esta sección tendrás la oportunidad de **aplicar los temas vistos** y **reforzar tus conocimientos**.



Temas transversales

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Con este tema desarrollarás competencias para **ejercer, respetar y promover los derechos humanos**, los cuales están presentes en tus relaciones cotidianas.

Educación ambiental

Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las **relaciones entre el individuo y su entorno natural**, como proceso interactivo, y **la protección y el cuidado** de los recursos naturales y los seres vivos.

Estilos de vida saludable

Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a **tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar** físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo.

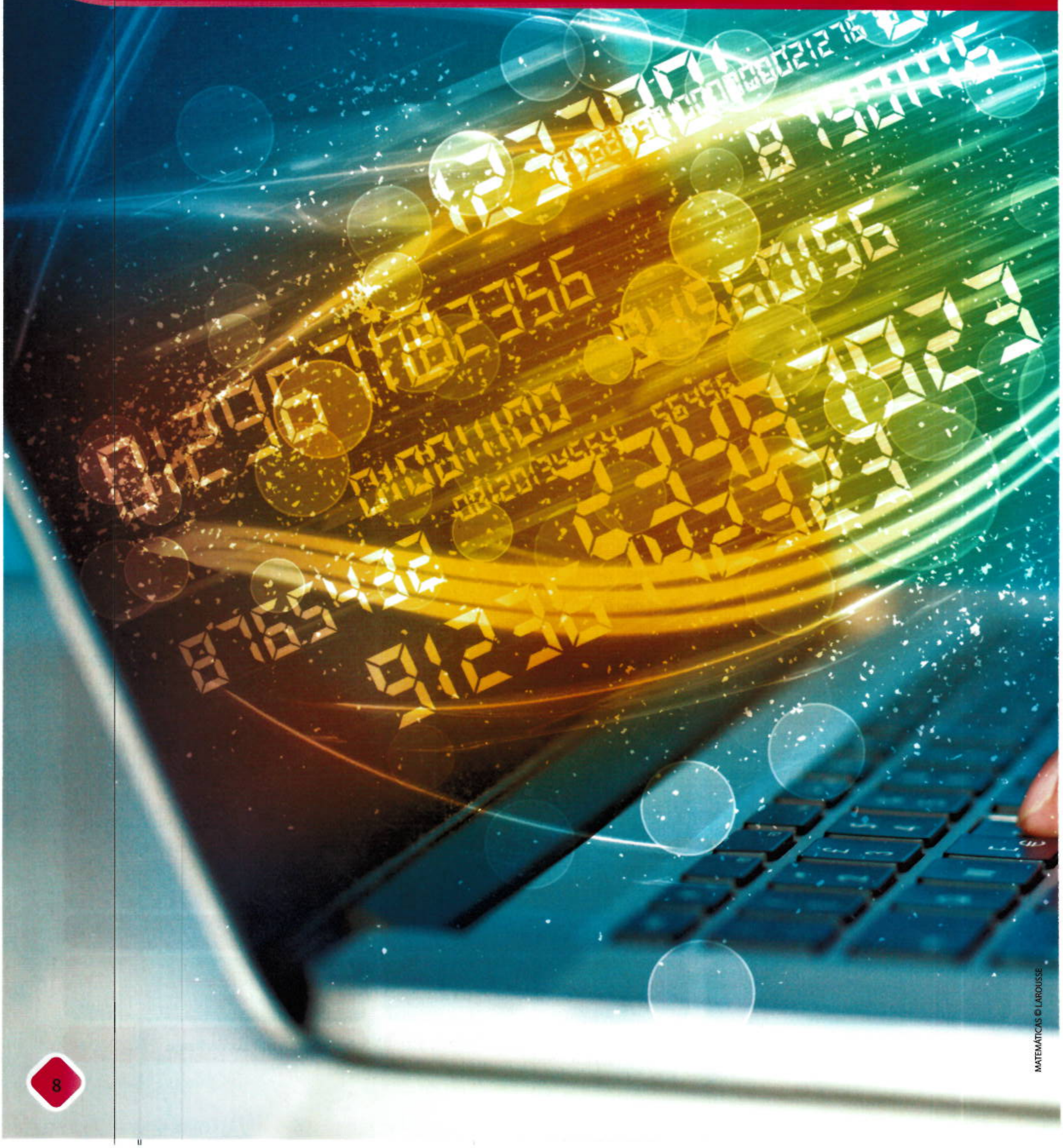
MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Contenido Matemáticas 11

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Números reales



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ya sabemos

- Resolver operaciones con números racionales e irracionales.
- Ubicar números racionales e irracionales en la recta numérica.

Vamos a aprender

- A identificar y representar intervalos y entornos.
- A expresar la solución de una inecuación como un intervalo.

Nos sirve para

- Resolver situaciones que se puedan modelar mediante inecuaciones.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Conjuntos

Saberes previos

Repasa y haz una breve descripción de cómo se clasifican los seres vivos.

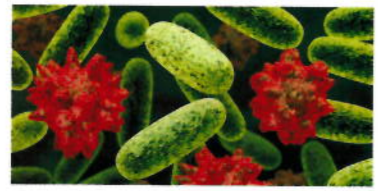
Analiza

Los científicos creen que hay alrededor de 10 millones de especies diferentes en la Tierra. Para hacer su trabajo más fácil, clasifican a los seres vivos en grupos y subgrupos cada vez más pequeños, basándose en las semejanzas y diferencias de los organismos.

- ¿Dentro de qué reino se clasifica a las bacterias?

Conoce

Estos seres vivos pertenecen al reino de las Bacterias que se caracterizan por ser un conjunto de organismos procariotas que no tienen el núcleo definido y habitan en casi todos los lugares del planeta en presencia o ausencia de oxígeno.



Un **conjunto** puede definirse como la agrupación de varios elementos que comparten características similares.

Para notar un conjunto se usan letras mayúsculas y para los elementos se suelen emplear letras minúsculas.

Ejemplo 1

Según su envoltura celular, las células procariotas se clasifican en bacteria Gam negativa, bacteria Gram positiva, arquea y micoplasma.

En un laboratorio se separó una célula de cada tipo, se les denominó a, b, c y d, respectivamente y se agruparon en un conjunto P. Para notar este conjunto, se puede escribir:

$$P = \{a, b, c, d\}$$

1.1 Clases de conjuntos

De acuerdo con la cantidad de elementos, un conjunto puede ser **vacío**, **finito** o **infinito**. Existe además un conjunto conocido como **referencial** o **universal** cuyos elementos son todos los objetos de estudio en un contexto dado.

Ejemplo 2

El conjunto B de todos los números pares que son impares es vacío, pues no existe un número que sea par e impar al mismo tiempo.

El conjunto C de todos los divisores de 20 es finito, pues sus elementos se pueden contar.

El conjunto D de todos los números impares es infinito, pues no existe un último número impar.

Para todos estos conjuntos, el conjunto universal o de referencia es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Ejemplo 3

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el de los números enteros $\mathbb{Z}$, el de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el de los números irracionales $\mathbb{I}$ son todos infinitos. En este caso, podría considerarse como conjunto de referencia el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.2 Representación gráfica de conjuntos

Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante curvas cerradas, conocidas con el nombre de **diagramas de Venn**.

Para interpretar un diagrama de Venn se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. Los elementos que pertenecen al conjunto se representan con puntos interiores a la curva.
2. Los elementos que no pertenecen al conjunto se representan con puntos exteriores a la curva.
3. Ningún punto puede representarse sobre la curva.
4. El conjunto referencial se representa mediante un rectángulo para diferenciarlo de los otros diagramas.

Ejemplo 4

De la Figura 1.1 se deduce que los elementos 2, 4, 6, 7 y 8 pertenecen al conjunto B, el cual se escribe de la siguiente manera: $B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.

Los elementos 0, 1, 3, 5 y 9 no pertenecen al conjunto B.

Todos los números dentro del rectángulo conforman el conjunto referencial o universal U. En este caso, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es el conjunto de los números naturales entre 0 y 9 incluyendo al 0.

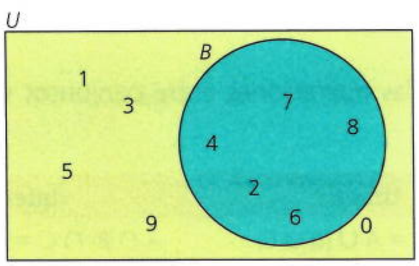


Figura 1.1

Ejemplo 5

El diagrama de Venn de la Figura 1.2 muestra el conjunto U de todos los estudiantes de undécimo grado de un colegio y, en el conjunto A, se representa a quienes estudiarán Administración de Empresas en la universidad.

De acuerdo con el esquema se pueden deducir algunos hechos:

- En el grado undécimo hay 16 estudiantes.
- Los estudiantes que se inscribirán en Administración de Empresas son: {Sebastián, Carolina, Manuela, Marcela, Ximena, Julio, Hernán}
- Los que están por fuera del conjunto A estudiarán una carrera distinta. En total nueve estudiantes se dedicarán a otras profesiones.
- Es imposible saber qué profesiones prefieren quienes no están en el conjunto A.

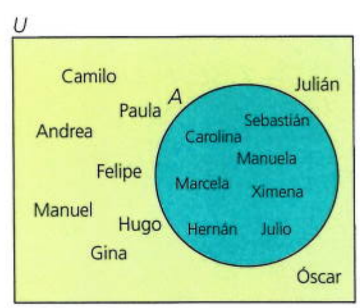


Figura 1.2

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.3 Operaciones entre conjuntos

Existen unas **operaciones básicas** que se pueden realizar con los conjuntos. Estas operaciones son la **unión**, la **intersección**, la **diferencia**, la **diferencia simétrica** y el **complemento**.

- La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto al que pertenecen todos los elementos de A y B. Se representa $A \cup B$.
- La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto al que pertenecen todos los elementos comunes de A y B. Se nota $A \cap B$.
- La **diferencia** entre A y B, notada como $A - B$, es el conjunto al que pertenecen todos los elementos de A que no pertenecen a B.
- La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \triangle B$ cuyos elementos pertenecen ya sea a A o a B, pero no a ambos a la vez.
- El **complemento** de un conjunto A es el conjunto A^c que contiene todos los elementos (respecto de algún conjunto referencial) que no pertenecen a A.

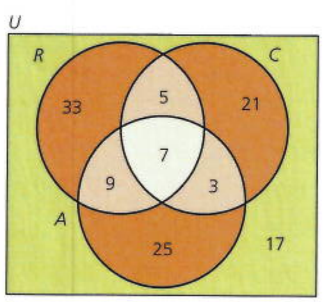


Figura 1.3

Ejemplo 6

Dado el diagrama de Venn de la Figura 1.3, se tiene:

- $A \cup R = \{3, 5, 7, 9, 25, 33\}$
- $A \cap C = \{3, 7\}$
- $R - C = \{9, 33\}$
- $C - R = \{3, 21\}$
- $R \triangle C = \{3, 9, 21, 33\}$
- $A^c = \{5, 17, 21, 33\}$

Algunas propiedades de las operaciones entre conjuntos se muestran en la Tabla 1.1.

Propiedad	Unión	Intersección
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Absorción	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Tabla 1.1

Ejemplo 7

Considera la Figura 1.3 y verifica que la propiedad distributiva se cumple para los conjuntos A, C y R. En el diagrama de Venn se observa que $A = \{3, 7, 9, 25\}$, $C = \{3, 5, 7, 21\}$ y $R = \{5, 7, 9, 33\}$

Se debe verificar que $A \cup (C \cap R) = (A \cup C) \cap (A \cup R)$

Al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad, se tiene que:

$A \cup (C \cap R) = \{3, 7, 9, 25\} \cup \{5, 7\} = \{3, 5, 7, 9, 25\}$

Al lado derecho de la igualdad se tiene que:

$(A \cup C) \cap (A \cup R) = \{3, 5, 7, 9, 21, 25\} \cap \{3, 5, 7, 9, 25, 33\} = \{3, 5, 7, 9, 25\}$

De esa forma, $A \cup (C \cap R) = (A \cup C) \cap (A \cup R)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Observa el diagrama de Venn de la Figura 1.4.

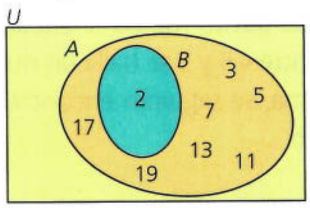


Figura 1.4

a. Escribe los elementos del conjunto A. ¿Qué tipo de números pertenecen a tal conjunto?

b. ¿Qué clase de conjunto es B?

c. ¿Existe $A \cap B$? Si es así, indica cuáles son sus elementos; si no existe, explica las razones.

d. Halla $A \cup B$ y $B \cup A$, y escribe una conclusión.

e. Halla $A \cap B$ y $B \cap A$, y escribe una conclusión.

f. Halla $A - B$ y $B - A$, y escribe una conclusión.

g. ¿Cuál es el complemento de U?

h. ¿Cómo son $A \triangle B$ y $B \triangle A$? Explica.

Comunicación

2 Construye y representa un diagrama de Venn con tres conjuntos A, B y C. Luego, verifica que se satisfagan cada una de las siguientes propiedades.

a. $A - B = A \cap B^c$

b. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

c. $A \cup \varnothing = A$

d. $A \cap U = A$

e. $A \cup U = U$

f. $A \cap \varnothing = \varnothing$

g. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

h. $A \cup A^c = U$

Resolución de problemas

3 De 40 estudiantes de undécimo grado, 14 toman clases de piano y 29 clases de violín.

a. Si cinco estudiantes toman ambas clases, ¿cuántos estudiantes no asisten a ninguna de las dos?

b. ¿Cuántos estudiantes toman clase de piano o de violín?

c. ¿Cuántos estudiantes toman únicamente clase de violín?

4 Encuentra el número de elementos de la unión de los dos conjuntos finitos A y B, teniendo en cuenta que $A - B$ tiene 20 elementos, $B - A$ tiene 28 y la intersección de estos conjuntos tiene 36.

5 En un grupo de 60 personas, 27 toman bebidas frías y 42 toman bebidas calientes, y a cada persona le gusta al menos alguno de esos tipos de bebida. ¿A cuántos les gustan ambos tipos de bebida?

6 En un grupo de 100 personas, 72 hablan inglés y 43 hablan francés.

a. Representa los datos en un diagrama de Venn.

b. ¿Cuántos hablan inglés solamente?

c. ¿Cuántos hablan solamente francés?

d. ¿Cuántos hablan ambos idiomas?

Evaluación del aprendizaje

Cada uno de los 40 estudiantes de un curso practica al menos uno de estos deportes: fútbol, baloncesto o voleibol. Se sabe que 18 juegan fútbol, 20 practican baloncesto, 27 juegan voleibol, 7 prefieren fútbol y baloncesto, 12 juegan baloncesto y voleibol y 4, los tres deportes.

a. Dibuja un diagrama de Venn para interpretar el enunciado. Llama F al conjunto de los estudiantes que juegan fútbol, V al de quienes juegan voleibol y B a quienes practican baloncesto.

b. De acuerdo con el diagrama, ¿cuántos estudiantes practican fútbol y voleibol?, ¿cuántos juegan fútbol y voleibol pero no baloncesto?

Estilos de vida saludable

Dependiendo de su origen, los alimentos pueden ser de origen animal o de origen vegetal. El agua y la sal son alimentos de origen mineral. Basándose en la función nutritiva principal que desempeñan en el organismo se diferencian en energéticos, constructores y protectores.

- ¿Por qué crees que es importante para la salud combinar distintos tipos de alimentos?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Números reales y la recta real

Saberes previos

Escribe cinco números comprendidos entre 1 y 2.

Analiza

Andrés observó la recta numérica de la Figura 1.5 y dijo que los únicos números que había entre 3 y 6 eran 4 y 5.

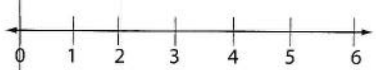


Figura 1.5

- ¿Qué opinas de esa conclusión?

Conoce

En realidad entre 4 y 5 hay una cantidad infinita de números. Por ejemplo, si se toma la unidad entre 4 y 5 y se halla su punto medio se encuentra el número 4,5; si luego se halla el punto medio entre 4,5 y 5 se halla un nuevo punto: 4,75 (Figura 1.6). Si se continúa de esa forma, se seguirán encontrando más y más números sin que se termine el proceso.

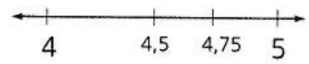


Figura 1.6

2.1 La recta real

Existe una condición que cumplen los números reales conocida como **axioma de completitud** que garantiza una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos en la recta. A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta y a cada punto en la recta, se le asocia un único número real.

Los puntos en la recta se identifican con los números que representan o con letras mayúsculas como *A*, *B*, *C*, etc. Mientras que las rectas se suelen nombrar con letras minúsculas como *a*, *b*, *c*, etc. o diciendo "la recta *AB*", para hacer referencia a los puntos *A* y *B* que pertenecen a ella.

El conjunto de los reales cubre o completa la recta sin dejar "huecos".

Ejemplo 1

Sobre la recta *a* de la Figura 1.7, se representaron algunos números reales. Entre cada par de estos números existen infinitos números reales.

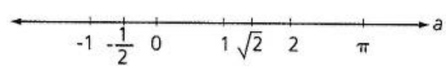


Figura 1.7

Ejemplo 2

Observa cómo se halla el resultado de cada operación entre números reales y cómo se ubica en el esquema de la Figura 1.8.

- $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- $0{,}25 \div 0{,}6 = 0{,}41\overline{6}$
- $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^5 = \frac{25\sqrt{5}}{243}$
- $\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 6 + 2 \cdot \sqrt{5}$

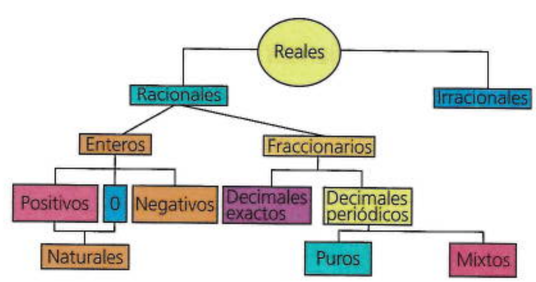


Figura 1.8

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Identifica en la Figura 1.9 cada conjunto numérico así: $\mathbb{R}$, el de los números reales; $\mathbb{Q}$, el de los racionales; $\mathbb{Z}$, el de los enteros; $\mathbb{N}$, el de los naturales, e $\mathbb{I}$, el de los irracionales.

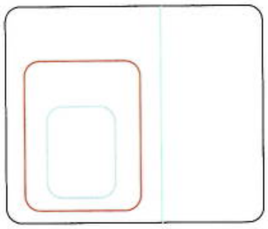


Figura 1.9

Escribe tres números que pertenezcan a cada conjunto.

2 Completa el esquema de la Figura 1.10 con dos ejemplos de números que pertenezcan a cada conjunto numérico.

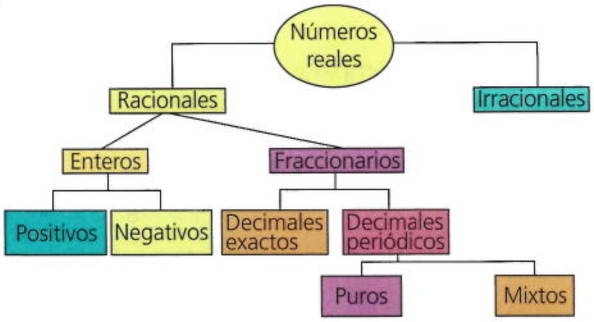


Figura 1.10

3 Determina el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles para cada una de las siguientes medidas de los catetos y clasifica el valor que halles como racional o irracional.

a. 1 cm b. 2 cm

c. 3 cm d. $\sqrt{2}$

Razonamiento

4 Escribe dos números racionales y dos irracionales que estén entre cada par de números dados.

a. 7 y 8 b. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ c. 1,5 y 1,8

d. $-0{,}1$ y $0{,}1$ e. $\sqrt{3}$ y 2,45 f. -1 y $-0{,}5$

Modelación

5 Analiza la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones.

a. La suma o la diferencia de dos números reales siempre es un número real.

b. El producto de dos números racionales es siempre un número racional.

c. El cociente de dos números racionales siempre es un número racional.

6 El valor del número pi (π) se obtiene cuando se divide la longitud de una circunferencia entre su diámetro. Elige varios objetos redondos, como latas de conserva, monedas, platos, pocillos, etc., y toma la medida del contorno y del diámetro. En cada caso, determina el cociente de la primera medida entre la segunda y escribe una conclusión.

Comunicación

7 Al número π que tiene infinitos decimales, se le han dedicado millones y millones de horas de estudio. Aunque se han llegado a descubrir unos 2,7 billones de decimales de π, ni la computadora más poderosa ha sido capaz de calcularlo sin márgenes de error.

De acuerdo con la lectura, ¿qué tipo de número es π?

Resolución de problemas

8 Un reloj adelanta $\frac{3}{7}$ de minuto cada hora. ¿Cuánto adelantará en 5 horas, en medio día y en una semana?

9 Para construir un metro de una obra, un albañil emplea 6 horas. ¿Cuánto empleará para hacer $14\frac{2}{3}$ metros? ¿Cuánto para $18\frac{11}{33}$ metros?

10 Se quiere cercar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro y la diagonal mide 30 m. Calcula el precio que se deberá pagar por hacer la cerca si cada metro cuesta $ 75 000 y se desperdicia un 10% del material empleado.

Evaluación del aprendizaje

i Halla y representa sobre la recta real tres números A, B y C, tales que:

B sea un número irracional negativo que se encuentra entre dos números racionales *A* y *C*.

ii Construye un cuadrado cuya diagonal satisfaga la condición en cada caso:

a. su longitud sea un número irracional mayor que 5.

b. su diagonal sea un número racional menor que 10.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Desigualdades

Saberes previos

¿Qué significa cada una de las siguientes palabras o expresiones: "a lo sumo", "al menos", "máximo", "como mínimo" y "a lo más"?

Analiza

Se debe determinar el peso de un camión antes de que atraviese un puente. El peso máximo permitido en el puente es de 32 toneladas. Si la cabina del camión pesa 10 toneladas y la parte trasera pesa 6 toneladas cuando está vacía, ¿cuál es la carga que puede llevar el camión para que se le permita pasar el puente?

Conoce

Según las condiciones del problema, la suma de los pesos de la cabina, de la parte trasera y de la carga debe ser menor o igual que el peso permitido para atravesar el puente.

Si se llama c al peso de la carga,

$10 + 6 + c$ debe ser menor o igual que 32.

Es decir, $16 + c$ deber ser menor o igual que 32.

Luego, c debe ser menor o igual que 16: $32 - 16 = 16$.

Así, la carga del camión debe ser de máximo 16 toneladas.

Una **desigualdad** es una relación de orden que se da entre dos cantidades cuando estas son distintas.

Ejemplo 1

Dos números reales a y b, se pueden comparar como se muestra en la Tabla 1.2.

Notación	Ejemplos
$a < b$ significa que a es menor que b.	$3 < 5$ $\quad -6 < -4$ $\quad -7 < 5$ $\quad 0 < 5$
$a > b$ significa que a es mayor que b.	$9 > 3$ $\quad -5 > -6$ $\quad 7 > -5$ $\quad 0 > -4$
$a \leq b$ significa que a es menor o igual que b.	$7 \leq 7$ $\quad -5 \leq -1$ $\quad -5 \leq 4$ $\quad 0 \leq 6$
$a \geq b$ significa que a es mayor o igual que b.	$8 \geq 7$ $\quad -8 \geq -9$ $\quad 6 \geq 6$ $\quad 0 \geq -4$
La notación $a \neq b$ significa que a no es igual a b.	$5 \neq 3$

Tabla 1.2

Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades. En cada una se usan los símbolos $<$ y $>$ pero también se cumplen para los símbolos $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

Transitividad

Para números reales arbitrarios a, b y c se cumple que:

- si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
- si $a > b$ y $b = c$, entonces $a > c$.
- si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- si $a < b$ y $b = c$, entonces $a < c$.

Adición y sustracción

- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.
- Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.

Multiplicación y división

Para números reales arbitrarios a y b, y c diferente de 0, se cumple que:

- si c es positivo y $a < b$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- si c es negativo y $a < b$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Opuesto

- Si $a < b$ entonces $-a > -b$.
- Si $a > b$ entonces $-a < -b$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Toma dos números reales a y b distintos de 0, ambos positivos o negativos a la vez y verifica que:

a. si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

b. si $a > b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Ahora toma dos números de distinto signo y verifica que:

c. si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

d. si $a > b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2 Escribe dos ejemplos para cada una de las propiedades de las desigualdades: transitividad, adición, sustracción, multiplicación, división y opuesto.

Razonamiento

3 Usa desigualdades para representar las siguientes expresiones.

a. Todos los números reales mayores o iguales que el opuesto de 10.

b. Todos los números reales menores que 5.

c. Todos los números reales mayores o iguales que -1 y menores que 15.

4 Determina entre qué par de números está cada expresión si x es un número mayor que 5 pero menor que 10.

a. $3x + 5$ b. $-2x + 2$ c. $5x + 3$

Resolución de problemas

5 Escribe una desigualdad para interpretar esta pregunta: ¿Qué número tiene que multiplicarse por 17 y al producto sumarle 34 para obtener como mínimo 68?

¿Existe una única solución para este problema? Si la respuesta es afirmativa, indica cuál es; si la respuesta es no, explica la razón.

6 Mike Powell tiene el récord mundial de salto largo con 8,95 m, el cual logró en el Mundial de Atletismo de Tokio, en 1991. El anterior récord mundial lo tenía Bob Beamon, con 8,9 m. ¿Cuáles distancias puede lograr un atleta que no supere el actual récord mundial y sea mayor o igual que el anterior?

7 Durante cierto período, la temperatura en grados Celsius (C) de una ciudad varió entre 25° y 30°. ¿En grados Fahrenheit entre qué valores varió la temperatura? Ten en cuenta que la temperatura en grados Celsius y en grados Fahrenheit se relaciona mediante la expresión $F = 1{,}8C + 32$.

8 Para determinar el coeficiente intelectual de una persona se usa la fórmula: $I = 100\frac{M}{C}$ donde I es el coeficiente intelectual, M es la edad mental (determinada mediante un test) y C es la edad cronológica.

Encuentra una desigualdad que muestre entre qué valores está la edad mental de un grupo de niños de 11 años, teniendo en cuenta que la variación de I está dada por $80 < I < 140$.

Evaluación del aprendizaje

Califica cada afirmación como verdadera o falsa. En cada caso a y b son números reales.

a. Si $a < b$ entonces $a - b < 0$.

b. Si $a < 0$ entonces a es negativo.

c. La desigualdad $a < b$ indica que a puede ser b o cualquier número menor que b.

d. Si a es un número real negativo y b es un real positivo, $a < b$.

e. Para todo número real no negativo $a - a < 0$.

f. Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

g. Si $a < 0$ entonces $a^2 < 0$.

h. Si $a = 0$, $a^2 = 0$.

Educación ambiental

La bacteria A. *ferrooxidans* crece en lugares con pH entre 1,5 y 2,5, y se alimenta de metales tóxicos, por lo que es importante en el proceso de limpieza de aguas contaminadas.

- Escribe la desigualdad que indica el pH en el que vive la bacteria.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Intervalos y entornos

Saberes previos

¿Cuántos números haya entre -5 y 5? ¿Qué desigualdad representa a esos números?

Analiza

Aquiles quiere alcanzar una tortuga que corre 10 veces más lento que él. ¿Podrá lograrlo?

Nombre del intervalo	Notación de intervalos
Abierto	(a, b)
Abierto a la izquierda y cerrado a la derecha	$(a, b]$
Cerrado a la izquierda y abierto a la derecha	$[a, b)$
Cerrado	$[a, b]$
Infinito abierto a la izquierda	$(a, +\infty)$
Infinito cerrado a la izquierda	$[a, +\infty)$
Infinito abierto a la derecha	$(-\infty, b)$
Infinito cerrado a la derecha	$(-\infty, b]$
Infinito	$(-\infty, +\infty)$

Tabla 1.4

Conoce

4.1 Intervalos

En la llamada Paradoja de Aquiles y la tortuga, se cuenta que Aquiles, un veloz corredor, decide competir en una carrera contra una tortuga. Convencido de su triunfo, Aquiles –ubicado en un punto A– le da una ventaja inicial al animal –ubicado en un punto B.

En poco tiempo, Aquiles llega al punto B, pero en ese momento se da cuenta de que la tortuga ya no está ahí, sino que ha avanzado un poco, hacia un punto C.

Cuando el corredor llega al punto C, la tortuga habrá nuevamente avanzado una pequeñísima longitud hasta un punto D, y así sucesivamente, infinitas veces.

Se conoce como **intervalo** al conjunto de números reales que va de un número a otro o que están comprendidos entre otros dos dados: a y b, o **extremos del intervalo**.

La clasificación de los intervalos aparece en la Tabla 1.3. En cada caso a y b son números reales. La tabla 1.4 muestra el nombre de cada uno de estos intervalos.

Determinación por conjuntos	Notación de intervalos	Representación gráfica	Interpretación
$\{x/a < x < b\}$	(a, b)	a b	Todos los números entre a y b.
$\{x/a < x \leq b\}$	$(a, b]$	a b	Todos los números entre a y b, incluyendo b.
$\{x/a \leq x < b\}$	$[a, b)$	a b	Todos los números entre a y b, incluyendo a.
$\{x/a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a b	Todos los números entre a y b, incluyendo a y b.
$\{x/x > a\}$	$(a, +\infty)$	a	Todos los números mayores que a.
$\{x/x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	a	Todos los números mayores o iguales que a.
$\{x/x < b\}$	$(-\infty, b)$	b	Todos los números menores que b.
$\{x/x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	b	Todos los números menores o iguales que b.
$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$		Todos los números reales.

Tabla 1.3

Ejemplo 1

Para representar un intervalo sobre la recta numérica, debe interpretarse a cuál subconjunto de la recta real corresponde. Así, $\{x/\ 2 < x \leq 5\}$ corresponde al intervalo $(2, 5]$, cuya representación se muestra en la Figura 1.11.

Figura 1.11

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

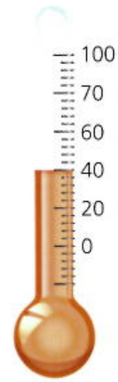
Ejemplo 2

Para participar en una prueba atlética, los competidores deben tener edades desde los 14 hasta los 18 años. Todos los jóvenes cuya edad se encuentre en ese intervalo pueden participar.

Figura 1.12

En este caso las edades pertenecen al intervalo cerrado $[14, 18]$.

Ejemplo 3



Se conoce como intervalo fundamental de temperatura, al comprendido entre la temperatura de fusión del hielo y la del vapor de agua hirviendo a la presión de 760 mm de mercurio; estas temperaturas constituyen los puntos fijos. En la escala Celsius esas temperaturas son 0° C y 100° C, respectivamente.

Así, el intervalo fundamental en esa escala es el intervalo $(0, 100)$.

Ejemplo 4

Sean $A = [-3, 4]$ y $B = [-1, 7]$ se pueden efectuar todas las operaciones establecidas para los conjuntos. En la Figura 1.13 se representan los intervalos A y B; luego se realizan algunas operaciones con ellos.

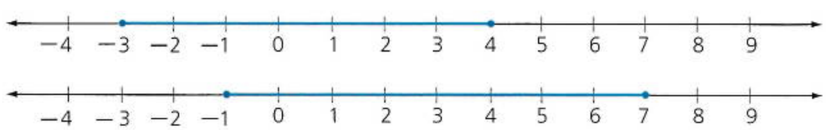


Figura 1.13

$A \cap B = [-1, 4]$ $A \cup B = [-3, 7]$ $A - B = [-3, -1)$

$B - A = (4, 7]$ $A^c = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$ $B^c = (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

4.2 Entornos

Se llama **entorno abierto** de centro a y radio r, y se denota por $E(a, r)$, al intervalo abierto $(a - r, a + r)$. Así, $E(a, r) = (a - r, a + r)$.

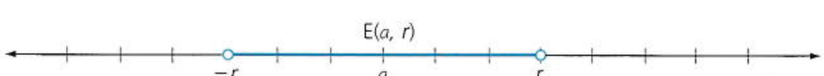


Figura 1.14

Ejemplo 5

Para representar el entorno $E(3, 4)$, se hallan los dos extremos del intervalo a partir del centro del entorno, así: $3 - 4 = -1$ y $3 + 4 = 7$.
Por tanto, $E(3, 4) = (-1, 7)$, como muestra la Figura 1.15.

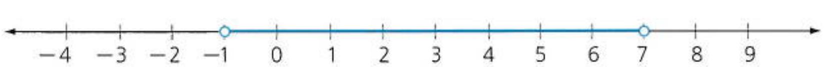


Figura 1.15

MATEMÁTICAS © LA ROUSSE

4 Intervalos y entornos

Se llama **entorno cerrado** de centro a y radio r, y se denota por $E[a, r]$, al intervalo cerrado $[a - r, a + r]$. Así, $E[a, r] = [a - r, a + r]$.

Ejemplo 6

La Figura 1.16 muestra el entorno $E\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

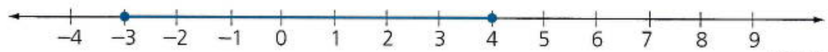


Figura 1.16

Un **entorno reducido** alrededor de a y radio r es un intervalo abierto al que no pertenece a: $Er^*(a, r) = \{x$ pertenece al intervalo $(a - r, a + r), x \neq a\}$.

Ejemplo 7

El entorno reducido $Er^*(3, 4)$ solamente tiene un punto menos que el entorno abierto $E(3, 4)$ como se observa en la Figura 1.17.

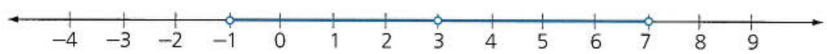


Figura 1.17

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe cada una de las siguientes desigualdades en su notación de intervalo.

a. $4 \leq x < 9$ b. $4 \geq x > -3$ c. $x < 6$

d. $x > -9$ e. $x < 0$ f. $x > 6$

2 Determina cada representación de la Figura 1.18 como conjunto y escribe su notación como intervalo.

a.
b.
c.

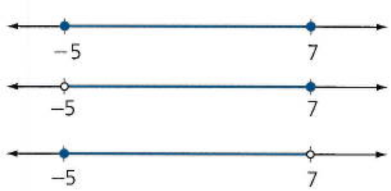


Figura 1.18

3 Representa cada conjunto en la recta real.

a. $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$ b. $(-\infty, 3] \cap [1, +\infty)$

4 Escribe con notación de intervalos la representación de la Figura 1.19.

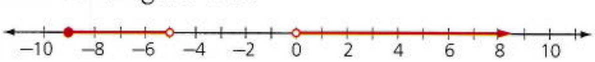


Figura 1.19

5 Determina la unión, la intersección y la diferencia simétrica para cada una de las parejas de intervalos.

a. $A = [2, 5]$ y $B = [-1, 3)$

b. $A = (2, 5)$ y $B = (-1, 3)$

c. $A = [2, 5)$ y $B = [-1, 3]$

d. $A = (2, 5]$ y $B = (-1, 3]$

Comunicación

6 El intervalo $\left(-\frac{5}{2}, 3\right]$ representado en la Figura 1.20 corresponde al resultado de alguna de las operaciones que se presentan abajo. Decide cuál y explica tu elección.

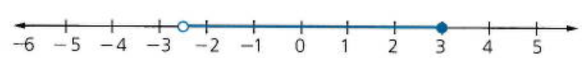


Figura 1.20

a. La intersección de $(-\infty, 3]$ y $\left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

b. La unión de $(-\infty, 3)$ y $\left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

c. La intersección de $(-\infty, 3)$ y $\left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

7 Representa en la recta real de la Figura 1.21 la intersección de los intervalos [1, 5] y (2, 6). Escribe el intervalo que obtuviste e interprétalo mediante una desigualdad.

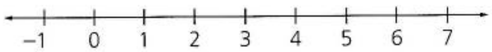


Figura 1.21

8 Escribe cinco números que se encuentren en cada una de las siguientes intersecciones.

a. $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$
b. $(\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{I}$
c. $(0, 1) \cap \mathbb{Z}$
d. $(\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{N}$

Razonamiento

9 Califica como verdadera o falsa cada afirmación.

a. Los intervalos $[a, b]$ y (a, b) son iguales.

b. El conjunto de los números reales se puede representar como un intervalo abierto.

c. $[a, b] \cap (a, b) = (a, b)$

d. $[a, b] - (a, b) = \varnothing$

10 Analiza qué se obtiene en cada una de las siguientes intersecciones:

a. $(-\infty, +\infty) \cap \mathbb{Z}$
b. $(-\infty, +\infty) \cap \mathbb{Q}$
c. $(-\infty, +\infty) \cap \mathbb{I}$
d. $(-\infty, +\infty) \cap \varnothing$

11 Escribe dos intervalos que cumplan la condición que se enuncia en cada caso.

a. Su intersección es vacía.

b. Su intersección es un único punto.

c. Su unión es el conjunto de todos los números reales.

d. Su diferencia simétrica es vacía.

e. Su complemento es $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$.

f. Su intersección es uno de los dos intervalos.

12 Halla dos entornos que cumplan las condiciones que se mencionan en cada caso:

a. Abiertos y cuya intersección sea vacía.

b. Cerrados y cuya unión sea el entorno [0, 3].

c. Reducidos con el mismo centro, pero uno con un radio que sea el doble que el del otro.

13 Observa la Figura 1.22.

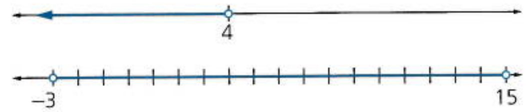


Figura 1.22

a. Escribe en notación de intervalo cada representación.

b. Escribe una operación entre los intervalos de la figura de modo que el resultado sea $(-3, 4)$.

c. Determina la intersección de los complementos de los intervalos representados.

Resolución de problemas

14 El intervalo *QT* es la medida del tiempo entre el comienzo de una onda y el final de otra en un electrocardiograma (ECG). El valor normal del intervalo *QT* está entre 0,30 y 0,44 segundos.

a. Escribe en notación de intervalo los valores de un *QT* normal.

b. ¿Cuánto tiempo dura la onda de un *QT* normal?

Evaluación del aprendizaje

i Observa la representación de la Figura 1.23 y realiza lo que se indica en cada caso.

Figura 1.23

a. Nombra como conjuntos los intervalos de la figura.

b. Escribe cada conjunto en notación de intervalo.

c. Clasifica cada uno de los intervalos que nombraste en el literal a.

d. Interpreta mediante desigualdades cada uno de los intervalos que determinaste.

e. Escribe una operación cuyo resultado sean los puntos de la gráfica que tienen doble rayado.

ii Analiza y responde la pregunta en cada enunciado.

a. Si el centro de un entorno abierto es 3 y su radio es 0, ¿cuántos puntos tiene ese entorno? Explica tu respuesta.

b. Si el centro de un entorno reducido es 3 y su radio es 0, ¿cuántos puntos tiene ese entorno? Explica tu respuesta.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Inecuaciones y valor absoluto

Saberes previos

¿Cuáles números sobre la recta numérica están a 7 unidades del número 8?

Analiza

Una persona que toma un taxi debe pagar \$ 2 000 por el arranque de la carrera y \$ 0,8 por cada metro recorrido.

- Si la persona tiene \$ 12 000, escribe la expresión que muestre cuántos metros puede avanzar como máximo en su recorrido, con ese dinero.

Conoce

Por el hecho de subirse al taxi, la persona debe pagar \$ 2 000, y si se llama x a la cantidad máxima de metros que puede avanzar con el dinero que tiene, entonces la expresión buscada es $2\,000 + 0{,}8x \leq 12\,000$. Esta expresión es una desigualdad que contiene una incógnita y recibe el nombre de **inecuación lineal**.

5.1 Inecuaciones lineales

Una desigualdad que tiene por lo menos una incógnita con exponente 1 recibe el nombre de **inecuación lineal.**

Cuando se plantea una inecuación lineal puede ocurrir que uno, ninguno o varios valores satisfacen la desigualdad. Encontrar dichos valores consiste en resolver la inecuación y para ello, se aplican las propiedades de las desigualdades y los procesos algebraicos empleados en el despeje de ecuaciones.

Ejemplo 1

Para saber cuántos metros puede avanzar como máximo la persona de la situación inicial, se debe resolver la inecuación $2\,000 + 0{,}8x \leq 12\,000$ así:

$2\,000 - 2\,000 + 0{,}8x \leq 12\,000 - 2\,000$ ← Se resta 2 000 a ambos lados de la inecuación.

$0{,}8x \leq 10\,000$ ← Se reducen términos semejantes.

$x \leq 12\,500$ ← Se dividen ambos lados de la inecuación entre 0,8.

Por tanto, la persona puede avanzar máximo 12 500 m, que son 12,5 km, con el dinero que tiene. La solución se puede escribir $(-\infty; 12{,}5]$; en este problema, no tiene sentido hablar de distancias negativas, así que la solución real es $[0; 12{,}5]$.

5.2 Inecuaciones cuadráticas

Una **inecuación cuadrática** es de la forma: $ax^2 + bx + c < 0$, u otra expresión de la forma anterior, que incluya alguno de los otros símbolos de desigualdad.

Ejemplo 2

Para resolver la inecuación $x^2 - x - 20 > 0$, se aplican los siguientes pasos:

1. Se iguala el polinomio cuadrático $x^2 - x - 20$ a cero y se obtienen las raíces de la ecuación de segundo grado usando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-20)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

2. Se representan esos valores en la recta real, se toma un punto de cada uno de los tres intervalos en los que queda dividida la recta y se evalúa el polinomio $x^2 - x - 20$ con estos. La solución S está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que definen los resultados de la evaluación que satisfacen la desigualdad. En este caso, la solución es: $S = (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$.

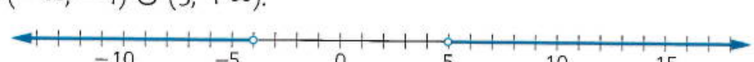


Figura 1.24

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5.3 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real representa la distancia que hay de ese número a cero. El valor absoluto de a, se denota $|a|$.

Ejemplo 3

La distancia de -4 y de 4 a cero es la misma, así que $|-4| = |4| = 4$, como se observa en la Figura 1.25.

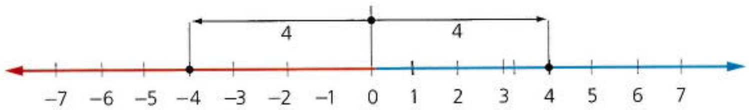


Figura 1.25

5.4 Propiedades del valor absoluto

El valor absoluto cumple las siguientes **propiedades** para a y b números reales.

1. $|a| \geq 0$ **2.** $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$ **3.** $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ **5.** $|-a| = |a|$ **6.** $|a - b| = 0$ si y solo si $a = b$

7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$ **8.** $|x|^2 = x^2$

9. Para k, un número real positivo, $|x| < k$ si y solo si $-k < x < k$.

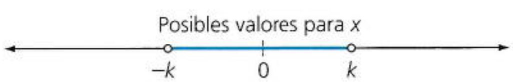


Figura 1.26

10. Para k, un número real positivo, $|x| > k$ si y solo si $x > k$ o $x < -k$.

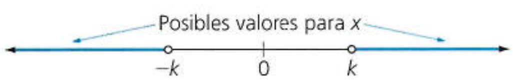


Figura 1.27

Ejemplo 4

Si $a = -4$ y $b = 6$, se verifican las siguientes propiedades:

3. $|(-4) \cdot (6)| = |-4| \cdot |6| = 4 \cdot 6 = 24$

4. $|-4 + 6| < |-4| + |6|$ ya que $2 < 4 + 6$

5. $|-4| = |4|$ y $|-6| = |6|$

7. $\left|\frac{-4}{6}\right| = \frac{|-4|}{|6|} = \frac{4}{6}$

8. $|-4|^2 = 4^2$ y $|6|^2 = 6^2$

Ejemplo 5

Existen inecuaciones con valor absoluto como $|x - 4| > 12$ y para saber cuáles valores de x la satisfacen se aplica la propiedad 10, ya que $12 > 0$. Con dicha propiedad se obtiene que $x - 4 > 12$ o $x - 4 < -12$. De donde $x > 16$ o $x < -8$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5.5 Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver una **inecuación con valor absoluto**, se deben aplicar las propiedades del valor absoluto, de manera conveniente.

Ejemplo 6

La inecuación $|x - 3| < 4$ se resuelve al aplicar la propiedad 9 del valor absoluto, ya que $4 > 0$. Con base en ella, $-4 < x - 3 < 4$ y para resolverla se adiciona 3 a cada miembro de la inecuación:

$-4 + 3 < x - 3 + 3 < 4 + 3$, de lo cual $-1 < x < 7$.

Así, la solución de la inecuación $|x - 3| < 4$ es el intervalo abierto $(-1, 7)$.

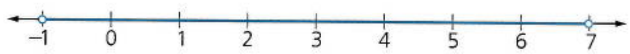


Figura 1.28

Si se toma el punto $x = 8$, que no está en el intervalo de la solución, se tiene $|8 - 3| = 5$ que no es menor que 4, mientras que para $x = 0$ se cumple que $|0 - 3| < 4$, por hacer parte de la solución, como se ve en la Figura 1.28.

Con base en lo anterior, si se toma cualquier valor en el intervalo solución, la inecuación se cumple mientras que para un valor fuera de este, no se satisface.

Ejemplo 7

Para resolver la inecuación $|3x + 5| > 8$ se aplica la propiedad 10 del valor absoluto, en cuanto que $8 > 0$.

De ello se tiene que: $3x + 5 > 8$ o $3x + 5 < -8$.

Al resolver la primera inecuación la solución es $x > 1$, es decir, cualquier valor en el intervalo $(1, +\infty)$; en tanto que la solución de $3x + 5 < -8$ es $x < -\frac{13}{3}$ o sea el intervalo $\left(-\infty, -\frac{13}{3}\right)$.

Con esto, la solución de la inecuación $|3x + 5| > 8$ es

$S = \left(-\infty, -\frac{13}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

La "o" que se usa en la propiedad 10, indica la unión de dos conjuntos.

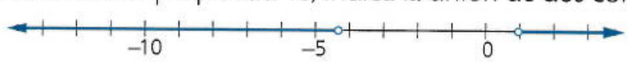


Figura 1.29

Ejemplo 8

La solución de la inecuación $|3x + 5| \geq 8$ incluye los valores extremos que no fueron incluidos en la inecuación del Ejemplo 7.

Así, la solución de $|3x + 5| \geq 8$ es el conjunto $S = \left(-\infty, -\frac{13}{3}\right] \cup [1, +\infty)$, ya que los valores extremos satisfacen la inecuación.

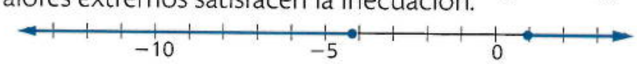


Figura 1.30

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve cada inecuación lineal. Expresa la solución como intervalo y represéntala en un gráfico.

a. $3x < 8$ b. $9x + 3 > 12$

c. $4x - 2 < -2$ d. $-6x > 12$

e. $-4x - 6 > -5$ f. $2x + 8 > 10$

2 Resuelve cada inecuación cuadrática. Expresa la solución como intervalo y represéntala en un gráfico.

a. $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ b. $x^2 - 2x + 1 < 0$

c. $x^2 - 6x + 8 > 0$ d. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

e. $x^2 - 8x + 7 < 0$ f. $6x^2 - 3x - 3 > 0$

3 Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto. Escribe la solución como intervalo y represéntala en un gráfico.

a. $|-3x + 4| < -1$ b. $|-x + 5| > -2$

c. $\left|\dfrac{x^2 - 1}{2}\right| \geqslant 1$ d. $-\left|-\dfrac{6}{5}x - 1\right| \leqslant 2$

4 Resuelve las inecuaciones realizando el procedimiento descrito: Primero, se hallan las raíces del numerador y del denominador. Luego, se representan estos valores en la recta real y se continúa el proceso como en las inecuaciones cuadráticas, evaluando las raíces en la expresión del lado izquierdo de cada inecuación.

a. $\dfrac{3x + 1}{4x - 2} < 0$ b. $\dfrac{3x + 1}{4x - 2} \geq 0$

c. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \geq 0$ d. $\dfrac{|4x + 5|}{x - 3} < 0$

Resolución de problemas

5 Interpreta y resuelve la inecuación que resulta de cada enunciado. Luego expresa la solución como un intervalo.

a. Tres veces un número x, restado de 18 es menor que -90.

b. Doce veces un número x restado de 34 es mayor que 8.

6 El cabello de Helena mide 4 cm de largo y crece a razón de 1,5 cm por mes. Helena quiere que su cabello crezca al menos 7 cm. ¿Cuántos meses debe esperar para que eso ocurra?

7 Una banda musical realizó una gira por tres ciudades, y logró reunir al menos 120 000 espectadores. En la primera ciudad la banda tuvo una audiencia de 45 000 y de 33 000 en la segunda. ¿Cuántas personas asistieron al concierto en la tercera ciudad?

Evaluación del aprendizaje

i Halla el conjunto solución de cada inecuación.

a. $x - 3 < 8$ b. $3x + 5 \geqslant 11$

c. $3x^2 - 2x - 8 \leq 0$ d. $4x^2 + 7x - 2 < 0$

e. $|6x + 9| > 15$ f. $|3x| > 21$

ii Una camioneta pesa 890 kg. La diferencia entre el peso de la camioneta vacía y el peso de la carga que transporta debe ser por lo menos de 410 kg. Si la camioneta debe cargar cuatro cajas iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada una para que las pueda transportar?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

De las personas que hacen pública su orientación sexual diversa, el 80% han percibido el rechazo de su entorno social y por lo menos el 70% han llegado a ser agredidas.

- ¿Qué significa la expresión "por lo menos el 70% han llegado a ser agredidas?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Conjuntos

Comunicación

1 Observa el siguiente conjunto:

$$G = \{x / -7 \leq x < 3\}$$

Luego, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. $G = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

b. $G = \{-7, 3\}$

c. $7 \in G$

d. $3 \notin G$

2 Determina las operaciones a partir de los siguientes conjuntos:

$K = \{x / 2x \leq 20\}$ $\qquad G = \{x / 3x < 18\}$

$P = \{$números primos menores que $15\}$

a. $(K \cup P) \cap G$

b. $P - G$

c. $(P \cap G) \cap K$

d. $(K \Delta G) \cup P$

Resolución de problemas

3 En una excursión de 100 personas, 38 visitaron una cueva, 24 navegaron por el río y 44 practicaron deportes extremos. Doce personas fueron al río y a la cueva, 20 estuvieron en la cueva y practicaron algún deporte extremo, 13 navegaron por el río y practicaron algún deporte extremo y 9 participaron en las tres actividades. ¿Cuántas personas fueron únicamente al río?

Números reales

Comunicación

4 Represента en la recta real los siguientes números:

$$-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{2},\ 3^{\frac{1}{2}}$$

5 Resuelve las siguientes operaciones y escribe el resultado redondeándolo hasta las centésimas.

a. $3\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) + \left(3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right)$

b. $\left(2\sqrt{2}\right) \div \left(2\sqrt{3}\right)$

c. $3\pi\left(\dfrac{2}{5\pi}\right)$

Ejercitación

6 Halla el perímetro de las regiones de las Figuras 1.31 y 1.32.

a.

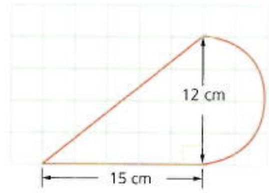


Figura 1.31

b.

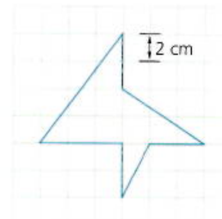


Figura 1.32

Desigualdades e inecuaciones

Ejercitación

7 Determina la desigualdad que se obtiene en cada caso. Dado que $12 > -5$:

a. adiciona -15 a ambos lados de la desigualdad.

b. multiplica por -3 a ambos lados de la desigualdad.

c. divide por $\frac{1}{4}$ a ambos lados de la desigualdad.

8 Halla tres números que hagan verdadera a cada inecuación.

a. $3 \leq b + 7$

b. $-x + 5 < 3$

c. $a + 3 \geq b - 12$

d. $5b + 1 < -5$

Resolución de problemas

9 Se tienen dos astas de madera, la más larga mide 3 dm más que el doble de la más corta, que no excede los 20 dm. La medida de la tercera parte de la más larga menos la mitad de la más corta es mayor que 2 dm.

a. Plantea la inecuación que representa la situación.

b. ¿Cuál es el valor mínimo que puede medir el asta más corta?

c. ¿Cuál es el valor máximo?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Estrategia: Descomponer el problema en partes

Problema

En un grupo de 40 estudiantes se encontró que 21 prefieren el helado con sabor a vainilla; 17, el de fresa; 19, el de mora; 8 prefieren combinar vainilla y fresa; 9, vainilla y mora, y 7, fresa y mora. Si cinco combinan los tres sabores, ¿cuántos estudiantes no prefiere ninguno de estos sabores?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes obtener del enunciado?
  R: El número de personas que prefieren uno, dos o tres sabores de helado.
- ¿Qué te piden encontrar?
  R: El número de personas que no prefieren ningún sabor.

2. Crea un plan

- Organiza la información en un diagrama de Venn.

3. Ejecuta el plan

- Denomina V al conjunto de los que prefieren el sabor a vainilla, F al de quienes prefieren fresa y M al de los que prefieren mora.
- Cinco prefieren los tres sabores; por tanto, se ubica el número 5 en la intersección de los tres conjuntos.

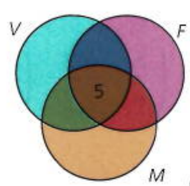


Figura 1.33

- Como siete prefieren fresa y mora y ya hay cinco en los tres, en la intersección entre fresa y mora faltan dos.

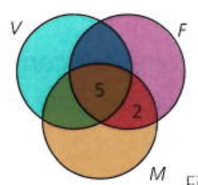


Figura 1.34

- Ubica las demás intersecciones y cuenta el total de elementos en los conjuntos.

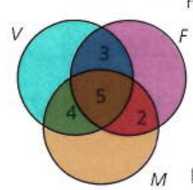


Figura 1.35

R: Solo dos estudiantes no prefieren ninguno de los tres sabores.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que los que prefieren fresa o mora, pero no vainilla, son 17.

Aplica la estrategia

1 En un grupo de 38 aspirantes a un cargo en una empresa extranjera, 19 hablan inglés, 14 hablan francés y 15 hablan alemán. Si 5 hablan inglés y francés; 7, inglés y alemán; 3, francés y alemán, y 2 personas hablan los tres idiomas, ¿cuántas personas hablan solo uno de estos idiomas?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2 Si a es un número real, ¿puedes encontrar un valor para el cual a y su recíproco no tengan el mismo signo?

3 La expresión $x = 200 + 5t$ representa la distancia en metros recorrida por un móvil, que realiza un movimiento lineal (t en segundos). ¿Cuánto tiempo mínimo debe transcurrir para que el móvil recorra una distancia no menor a 500 m?

Formula problemas

4 Plantea y resuelve un problema en el cual se utilice la información de la Figura 1.36

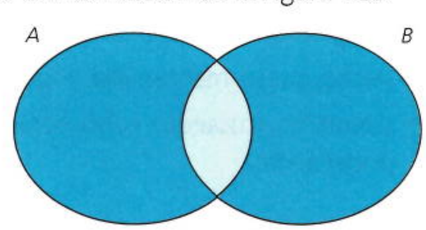


Figura 1.36

Enriquece tu vocabulario

- Busca en el diccionario las palabras unión, intersección y complemento. Escribe su significado en tu cuaderno.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Evaluación del aprendizaje

Conjuntos

Comunicación

1 Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

VERDADERO/FALSO

a. Un conjunto queda determinado por comprensión si se escriben todos sus elementos.

b. La unión de dos conjuntos es otro al que pertenecen los elementos de ambos conjuntos.

c. La intersección del conjunto vacío con un conjunto unitario es el mismo conjunto unitario.

d. La propiedad que indica la cantidad de elementos de un conjunto se conoce como cardinalidad.

e. La intersección de dos conjuntos unitarios siempre es vacía.

Razonamiento

2 Selecciona cuál de los siguientes diagramas de Venn representa la operación $A \cup B$, dado que $A = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ y $B = \{0, 1\}$.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

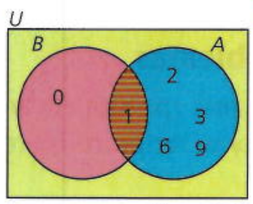
a.


Figura 1.37

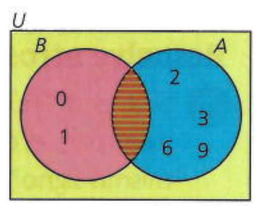
b.


Figura 1.38

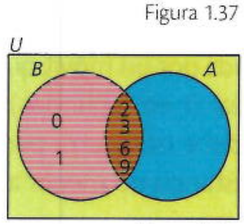
c.


Figura 1.39

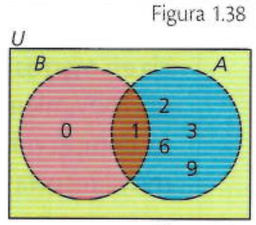
d.


Figura 1.40

3 Escribe los siguientes conjuntos por comprensión.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $A = \{$triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, …$\}$

b. $B = \{$leche, queso, mantequilla, yogur$\}$

c. $C = \{$tetraedro, icosaedro, cubo, octaedro, dodecaedro$\}$

4 Determina algunos elementos de cada conjunto y clasifícalos de acuerdo con la cantidad de elementos.

a. $A = \{x/x$ es un animal mamífero y acuático$\}$

b. $B = \{x/x$ es un natural menor que $0\}$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Números reales

Razonamiento

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

5 Completa cada oración con los términos dados, de tal forma que las afirmaciones sean verdaderas.

racionales, naturales, infinita,

único, semirrecta, distancia

a. A todo punto de la recta real le corresponde un ☐ número real.

b. El conjunto de números naturales se puede representar con una ☐, tomando la misma ☐ entre cada par de números.

c. El conjunto de números enteros es una ampliación del conjunto de números ☐.

d. Entre cada par de números ☐ siempre hay un número racional.

e. La cantidad de números reales es ☐.

Ejercitación

6 Realiza las operaciones entre números reales expresando el resultado con dos cifras decimales.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\left(\dfrac{1}{2} + 21{,}67\right)^2$

b. $\pi\left(4 - \sqrt[3]{7}\right) + \left(11\sqrt{2} - 7\right)$

c. $\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5}\right) - \left(\sqrt{5} + \sqrt{6{,}3^2 + 4{,}9^4}\right)^3$

Desigualdades

Ejercitación

7 Completa con los signos $<$, $>$, o $=$, según sea la relación entre cada par de números.

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $\dfrac{3}{4} \square \dfrac{4}{3}$

b. $33 \square 29{,}01$

c. $2{,}45604 \square 2{,}54604$

d. $100 \square -10{,}0003$

e. $13{,}2 \square 13{,}2$

f. $\dfrac{6}{3} \square \sqrt{3}$

Razonamiento

8 Ordena de menor a mayor los números de cada conjunto.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, 3, \dfrac{4}{3}, -1, \dfrac{7}{4}, 0$

b. $\pi, -2, -2\pi, \sqrt{3}, 6, -8, -\sqrt{2}$

c. $-\sqrt{5}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{8}, -\sqrt{7}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Intervalos y entornos

Comunicación

9 Representa cada intervalo en la recta numérica y clasifícalo como abierto, cerrado o semiabierto. Luego, exprésalo como conjunto y escribe cinco elementos que pertenezcan a él. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $[3, 18)$

b. $[-\pi, \pi]$

c. $\left(-\frac{29}{3}, -2\right)$

d. $(11{,}3; 11{,}4]$

e. $\left(\sqrt{5}, \sqrt{10}\right)$

10 Relaciona cada desigualdad con su respectiva representación gráfica. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $a < x < b$

b. $a \leq x \leq b$

c. $a \leq x < b$

d. $a < x \leq b$

e. $a < x$

f. $b > x$

g. $a \leq x$

h. $b \geq x$

i. $\mathbb{R}$

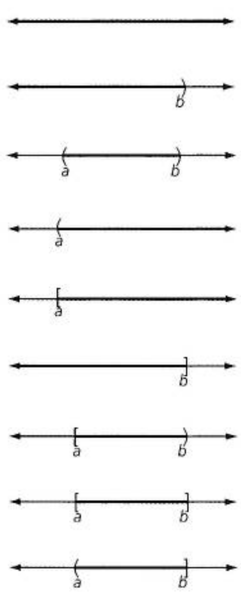


Figura 1.41

Inecuaciones y valor absoluto

Ejercitación

11 Une con una flecha cada inecuación con su correspondiente solución. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $x^2 + 7x > -10$	$x < 5$
b. $-3x + 6 > -9$	$x > 2$
c. $-12x - 8 < 16$	$x < 2$
d. $5x - 29 > 1$	$x > 6$
e. $6x - 3 < 9$	$x < -5$ o $x > -2$

12 Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto y grafica su solución. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\left|3x + \frac{1}{4}\right| > 3$

b. $2\left|x - \frac{3}{2}\right| < -1$

c. $\left|6 - \frac{1}{6}x\right| > 2$

d. $\left|\frac{x}{4}\right| > 15$

e. $|5x + 2| > 2$

13 En cada caso, plantea una inecuación cuya solución sea la que se indica. PREGUNTA ABIERTA

a. $\{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$

b. $\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{3}\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$

d. $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 4\}$

e. $\{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$

Resolución de problemas

14 A un estudiante le califican sus evaluaciones sobre 100 puntos. Si en seis evaluaciones ha obtenido 97, 98, 89, 80, 99 y 95, ¿cuál debe ser la nota mínima en su siguiente evaluación para obtener un promedio igual o superior a 93? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15 La suma de dos números enteros es menor que 100. Si uno de los números es el triple que el otro, ¿cuáles son los valores enteros máximos que satisfacen esta condición? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16 Propón una situación que se pueda describir con cada una de las siguientes inecuaciones. PREGUNTA ABIERTA

a. $x - 2 > 5$

b. $4q + 2 < 3$

c. $2c + 4 > 10$

d. $i - 3(i - 1) < 0$

e. $3m + 2 < 10$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Funciones

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ya sabemos

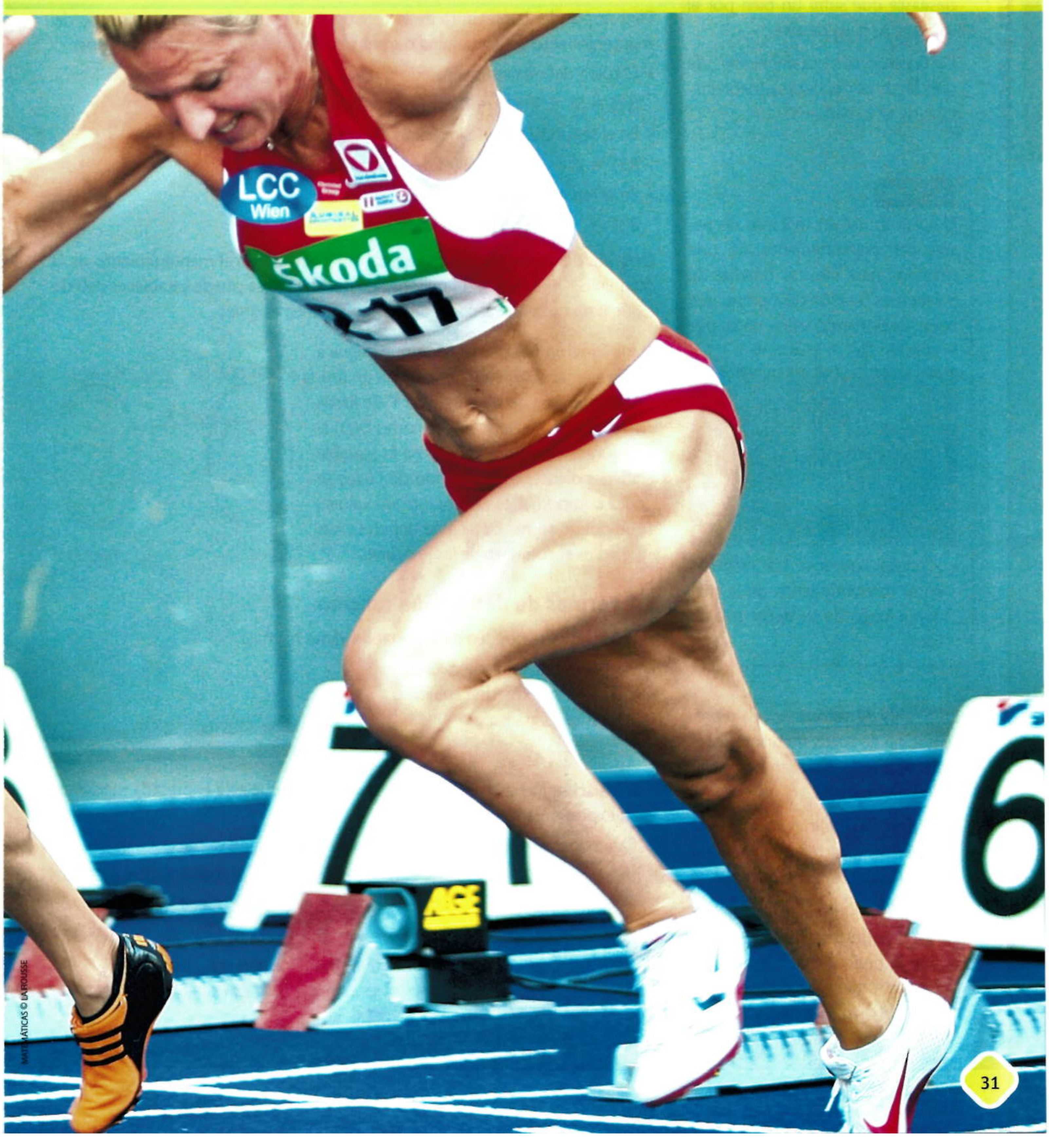
- Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas de las gráficas de algunas funciones.

Vamos a aprender

- A reconocer las propiedades de diferentes tipos de funciones, a realizar operaciones y a construir sus gráficas.

Nos sirve para

- Modelar fenómenos por medio de funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales o logarítmicas.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Concepto de función, dominio y recorrido

Saberes previos

La depreciación es el mecanismo mediante el cual se reconoce el desgaste que sufre un bien por el uso que se haga de este.

De acuerdo con esa definición, ¿de qué factores depende la depreciación de una máquina?

Analiza

El costo anual, en millones de pesos, del mantenimiento de una máquina para fabricar botellas de plástico en función del tiempo que lleva funcionando viene dado por la relación $f(x) = x^2 - x + 1$.

- ¿Cuánto dinero se ha invertido en el mantenimiento de la máquina luego de su tercer año de uso?

Una **tabla de valores** es una representación de datos, mediante pares ordenados que expresan la relación entre dos variables.

La **expresión analítica** de una función es una ecuación que relaciona algebraicamente las variables que intervienen.

La **gráfica de una función** es un dibujo o boceto que permite conocer intuitivamente el comportamiento de dicha función.

Conoce

1.1 Concepto de función. Dominio y recorrido de una función

Para responder la pregunta de la sección Analiza, se debe sumar el costo del mantenimiento de la máquina durante cada uno de los tres primeros años.

- El costo del mantenimiento de la máquina durante el primer año fue:
  $f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$ (esto es 1 millón de pesos).
- En el segundo año esa inversión fue de:
  $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$ (es decir, 3 millones de pesos).
- En el tercer año, el mantenimiento costó:
  $f(3) = 3^2 - 3 + 1 = 7$ (o sea, 7 millones de pesos.).

Después del tercer año de uso, se habían invertido en el mantenimiento de la máquina: $1 + 3 + 7 = 11$ millones de pesos. Esto se puede establecer debido a que para cada año el costo de mantenimiento es único.

Una **función *f*** es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto X un único elemento y de un conjunto Y. Se llama **dominio** de f (que se indica como $D(f)$) al conjunto de valores que toma la variable independiente, x. El **recorrido** de f (que se nota como $R(f)$) es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, y, esto es el conjunto de las imágenes.

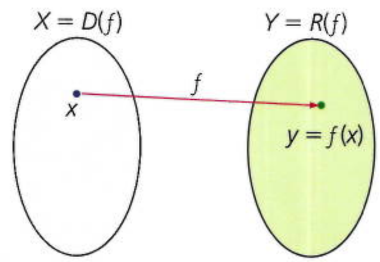


Figura 2.1

1.2 Formas de definir una función

Las funciones se pueden determinar de varias formas:

- Mediante una tabla de valores.
- Mediante su expresión analítica.
- Mediante su gráfica.

Ejemplo 1

La relación $f(x) = x^2 - x + 1$ es una función que está expresada mediante su expresión analítica.

Para trazar su gráfica, puede construirse una tabla de valores.

x	$f(x)$
-3	13
-2	7
-1	3
0	1
1	1
2	3

Tabla 2.1

$f(-3) = (-3)^2 - (-3) + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$f(0) = 0^2 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Al representar las parejas ordenadas $(-3, 13)$, $(-2, 7)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 3)$ y unirlas mediante un trazo, se obtiene la representación gráfica de la función $f(x)$. (Figura 2.2).

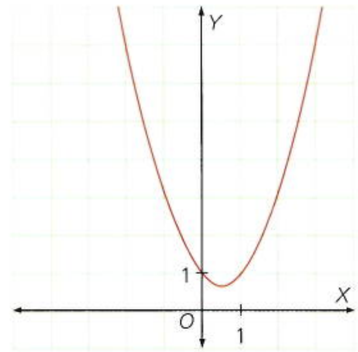


Figura 2.2

A partir de la gráfica de la función f es posible determinar su dominio y recorrido.

Puesto que x puede tomar cualquier valor real $D(f) = \mathbb{R}$.

De otro lado, se observa que la función toma valores para $y \geqslant \frac{1}{2}$, así que

$R(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ que puede indicarse mediante el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Escribe la expresión analítica de las funciones definidas en los siguientes enunciados.

a. A cada número real se le asigna el triple de su cuadrado menos el doble de su cubo.

b. A cada número natural se le asocia la raíz cuadrada negativa de la suma de su cuadrado con él mismo.

2 Dibuja la gráfica de estas funciones. Elabora una tabla de valores en cada caso.

a. $f(x) = x^2$

b. $f(x) = 5x - 1$

c. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$

Resolución de problemas

3 Indica el dominio y el recorrido de las funciones representadas en las figuras 2.3 y 2.4.

a.

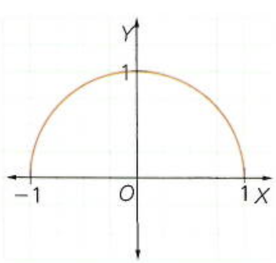


Figura 2.3

b.

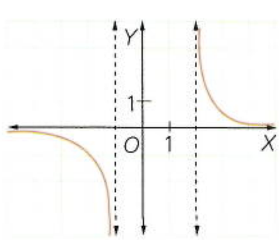


Figura 2.4

Evaluación del aprendizaje

Se quiere construir un rectángulo de 12 m^2 de área. El área depende de las medidas que tengan la base x y la altura, y. Por ejemplo si la base es 6 cm, la altura será 2 cm.

a. Completa la tabla que da la medida de la altura y, para distintos valores de x.

Base x	1	1,5	2	3	4	5	6
Altura y	12	8					

Tabla 2.2

b. Ubica cada par de puntos y construye la gráfica correspondiente.

c. Determina la expresión analítica de esta función, su dominio y recorrido.

Estilos de vida saludable

La epidemiología es una rama de la medicina que trata la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa. Esta se vale de modelos matemáticos, que se interpretan con funciones.

- ¿Qué cuidados tienes en cuenta si te enteras de que ha aparecido un brote de una enfermedad contagiosa en el lugar donde estudias?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Puntos de corte con los ejes. Signo de una función

Saberes previos

Tabula seis valores de $-1{,}5$ a $1{,}5$ y traza la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$.

Analiza

Determina las coordenadas de los puntos de corte de la función f de la Figura 2.5, con los ejes de las abscisas y las ordenadas.

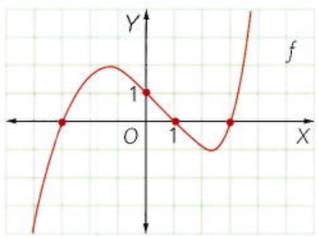


Figura 2.5

Conoce

2.1 Puntos de corte de una función con los ejes

Los puntos de la gráfica de una función $y = f(x)$ son de la forma $(a, f(a))$ con $a \in D(f)$. En la Figura 2.5 se observa que la gráfica de f corta el eje de las abscisas en los puntos $(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$ y el eje de las ordenadas en el punto $(0, 1)$.

Las coordenadas de los puntos que pertenecen al eje X, las abscisas, son de la forma $(a, 0)$ y las de los puntos que pertenecen al eje Y, las ordenadas, son de la forma $(0, a)$.

Los **puntos de corte** de la función f con el **eje X** se calculan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Puede haber más de un punto de corte de una función con el eje X.

El **punto de corte** de la función f con el **eje Y** es el punto $(0, f(0))$. Hay máximo un punto de corte con el eje Y, ya que si no, f no sería función.

2.2 Signo de una función

Para representar una función, es útil saber en qué intervalos la gráfica de la función va por encima o por debajo del eje X, es decir, dónde se cumple que $f(x) > 0$ y dónde que $f(x) < 0$. Para ello, se deben señalar sobre el eje X los puntos de corte de la función con este y los puntos de discontinuidad y, a continuación, estudiar el signo de la función en los distintos intervalos en que el eje queda dividido.

Ejemplo 1

Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de la función $f(x) = \dfrac{x-6}{x-2}$.

- **Puntos de corte con el eje X:** estos se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, es decir, $\dfrac{x-6}{x-2} = 0$. La única solución es $x = 6$; luego, el punto de corte de la función con el eje X es $(6, 0)$.
- **Punto de corte con el eje Y:** se calcula el valor de la función para $x = 0$. Es decir, $f(0) = \dfrac{0-6}{0-2} = 3$. Entonces, el punto de corte de la función con el eje Y es $(0, 3)$.
- **Signo de $f(x)$**: se debe resolver la inecuación $f(x) > 0$.

Intervalo	Signo de $f(x)$	Significado
$x < 2$	$f(0) = \dfrac{-}{-} = + \Rightarrow f(x) > 0$	La gráfica de $f(x)$ está por encima del eje X en $(-\infty, 2)$.
$2 < x < 6$	$f(3) = \dfrac{-}{+} = - \Rightarrow f(x) < 0$	La gráfica de $f(x)$ está por debajo del eje X en $(2, 6)$.
$x > 6$	$f(7) = \dfrac{+}{+} = + \Rightarrow f(x) > 0$	La gráfica de $f(x)$ está por encima del eje X en $(6, +\infty)$.

Tabla 2.3

En la Figura 2.6 se muestra la representación gráfica de $f(x)$.

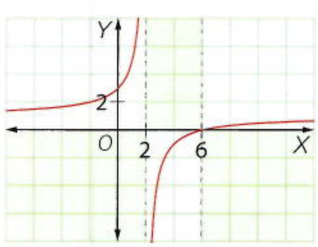


Figura 2.6

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Dibuja una función f que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

a. El dominio de f es $\mathbb{R}$; los puntos de corte con el eje X son $(-5, 0)$, $(1, 0)$ y $(4, 0)$; el punto de corte con el eje Y es $(0, 2)$ y el recorrido de f es $[-5, 5]$.

b. El dominio de f es $(0, \infty)$; los puntos de corte con el eje X son $(5, 0)$ y $(12, 0)$; y $f(x) \geq 0$.

c. Los puntos de corte con el eje X son $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$; el punto de corte con el eje Y es $(0, 2)$; y $f(x) \geq 0$ en $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$.

2 Traza la gráfica de una función que cumpla lo señalado en la Figura 2.7.

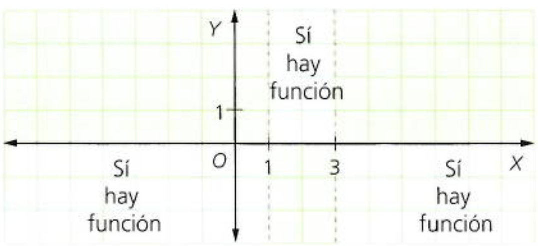


Figura 2.7

Ejercitación

3 Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones representadas en las figuras 2.8 y 2.9.

a.

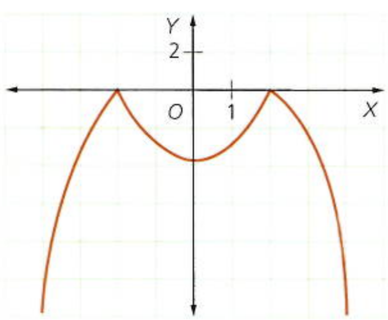


Figura 2.8

b.

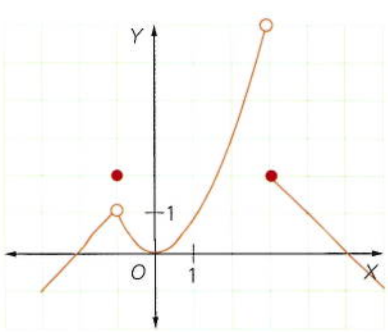


Figura 2.9

Resolución de problemas

4 Las funciones de oferta y demanda en función del precio p de un producto son respectivamente:

$$q = 2p - 10 \qquad q = \frac{2\,800}{p}$$

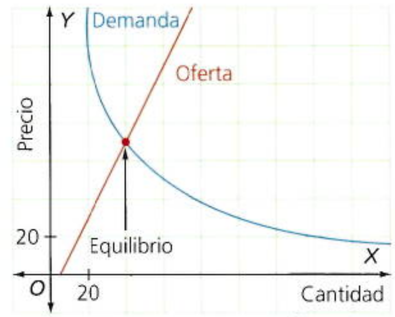


Figura 2.10

a. Encuentra el punto de equilibrio (Figura 2.10) y da el precio y el número de unidades correspondientes.

b. ¿Dónde corta la gráfica de la oferta el eje de las abscisas? Explica qué significado económico tiene ese punto.

c. Describe el comportamiento de las funciones de *oferta* y de *demanda* en términos de los puntos de corte y los signos.

Evaluación del aprendizaje

Calcula los puntos de corte con los ejes; halla el dominio y estudia el signo según los valores que tome la variable independiente a lo largo del dominio y, finalmente, esboza la gráfica de cada función.

a. $f(x) = 6x - 5$

b. $f(x) = x^2 + 3x - 4$

c. $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

d. $f(x) = (x^2 + 2x)(x - 1)^2(x - 3)$

e. $f(x) = x(x^2 + 2)(x^2 - 1)$

f. $f(x) = x(x^2 + 9)(x^2 - 9)$

g. $f(x) = (x - 9)(x^2 + 9)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Simetría

Saberes previos

Haz un dibujo que represente una montaña que se refleja sobre un lago. Explica cómo lo hiciste y describe las características (forma, tamaño y curvatura) de la imagen obtenida en comparación con la montaña.

Analiza

Observa la Figura 2.11 y determina el tipo de simetría que presenta.

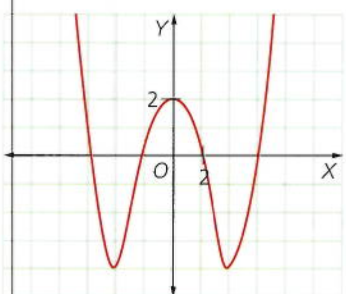


Figura 2.11

Conoce

3.1 Simetría respecto al eje de ordenadas

El estudio de la simetría de funciones facilita la construcción de la representación gráfica en el plano cartesiano si se reconoce la existencia de una reflexión de una parte de las curvas.

La función de la Figura 2.12 es simétrica con respecto al eje Y, pues su gráfica se puede obtener reflejando la mitad de la curva con respecto al eje de las ordenadas.

Una función **es simétrica respecto al eje Y** si se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función par**.

Ejemplo 1

La función $f(x) = x^2$ es par, pues $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

En la Figura 2.12 se aprecia la simetría respecto del eje de ordenadas.

Simetría par

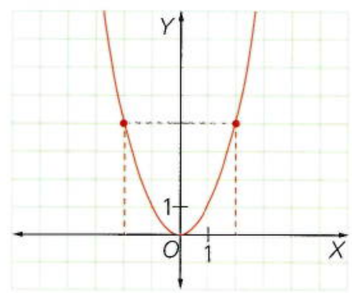


Figura 2.12

3.2 Simetría respecto al origen de coordenadas

Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas** si se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función impar**.

Ejemplo 2

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar, pues $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

En la Figura 2.13 se visualiza la simetría respecto al origen de coordenadas.

Simetría impar

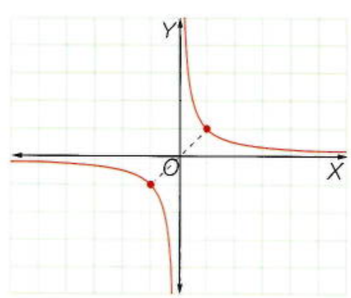


Figura 2.13

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Completa la gráfica de cada función, considerando que esta es impar.

a.

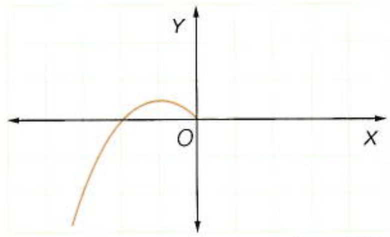


Figura 2.14

b.

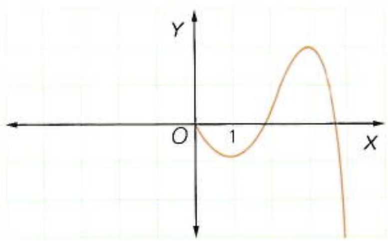


Figura 2.15

2 Para cada caso, grafica una función que cumpla las características dadas.

a. f tiene simetría par, $f(2) = -5, f(-4) = 1$, y su dominio es el conjunto de los números reales.

b. g tiene simetría impar, $g(2) = -5, g(-4) = 1$, y su dominio es $[-10, 10]$.

c. h no tiene simetría par ni impar, $h(1) = 0$, $h(-2) = 3$ y $D(h) = [-12, 5]$.

Razonamiento

3 Resuelve lo que se indica en cada caso.

a. Determina si la función $x^n + x^m$, donde n y m son números pares, es par, impar o no presenta ninguna de estas simetrías.

b. Haz lo mismo para una función $x^n + x^m$ con sus exponentes impares.

c. Si para la función $x^n + x^m$, m es par y n es impar, ¿qué tipo de simetría presenta la función?

d. ¿Por qué crees que se utilizan los términos *función par* y *función impar*?

4 Analiza y responde.

¿Por qué para las funciones no se estudia la simetría con respecto al eje X?

Ejercitación

5 Determina si las siguientes funciones son pares o impares, o si no presentan ninguna de estas simetrías.

a. $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 + 1|}$

b. $f(x) = x(x - 1) \cdot (x + 1)$

c. $f(x) = x^2 - 3x$

d. $f(x) = x^4 - x^3 + x - 7$

e. $f(x) = \sqrt{x}$

f. $f(x) = x^2(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$

g. $f(x) = \dfrac{x^4 + x}{2x + 1}$

h. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

i $f(x) = |x|$

j. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

k. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Resolución de problemas

6 Una piscina tarda tres horas en llenarse si se abren sus cinco grifos.

a. Escribe la función que relaciona el número de grifos, x, con el tiempo, y, que se emplea para llenar la piscina.

b. Representa la función obtenida.

c. ¿La función es par o impar?

Evaluación del aprendizaje

Lee, analiza y responde.

a. Si el punto (m, n) está sobre la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto esta también sobre la gráfica y es determinado a partir (m, n)?

b. Si el punto (m, n) está sobre la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto esta también sobre la gráfica y es determinado a partir de (m, n)?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Funciones polinómicas

Saberes previos

¿Para qué valores la expresión $(x - 4)(x + 1)$ es igual a 0? ¿En cuáles puntos $f(x) = (x - 4)(x + 1)$ corta al eje X? Escribe una función que corte al eje X en los puntos $x = 1$, $x = -2$ y $x = -5$.

Analiza

Describe las gráficas de las siguientes funciones.

a. $f(x) = c$; c es un valor constante.

b. $g(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$.

c. $h(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$.

Conoce

La gráfica de $f(x) = c$ es una recta paralela al eje X; la gráfica de $g(x) = mx + b$ es una recta de pendiente m; y, $h(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que abre hacia arriba, si $a > 0$, o abre hacia abajo, si $a < 0$.

Las funciones f, g y h se denominan **función constante**, **función afín** y **función cuadrática**, respectivamente; sin embargo, todas ellas son ejemplos de **funciones polinómicas**. Las funciones $f(x) = 2$, $g(x) = -x + 1$ y $h(x) = 2x^2 - 3$ son polinómicas.

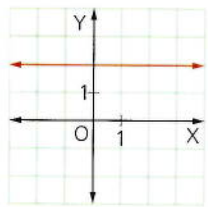


Figura 2.16

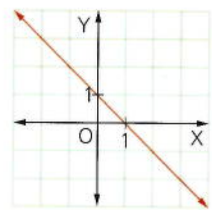


Figura 2.17

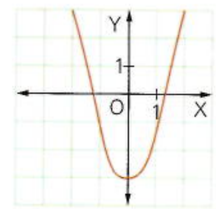


Figura 2.18

La función $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_n \neq 0$ y los exponentes de x son enteros positivos, se denomina **función polinómica de grado *n***. Las constantes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1, a_0$ se denominan **coeficientes** y a_0 se denomina **término independiente**. El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1

En la Tabla 2.4 se registra el grado y el término independiente de algunas funciones polinómicas.

Función polinómica	Grado	Término independiente
$r(x) = 4$	0	4
$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 1$	4	-1
$g(x) = 5x + 2$	1	2

Tabla 2.4

Para trazar un bosquejo de la gráfica de una función polinómica se deben hallar los cortes y los signos de la función.

En la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2$ se tienen:

- **Puntos de corte con el eje *X*:** se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$$

  Hay cuatro puntos de corte con el eje X: $(-3, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Puntos de corte con el eje *Y*:** $(0, 0)$, ya que $f(0) = 0$.
- **Signo de la función:** se obtiene a partir de la expresión factorizada de la función $f(x) = x^2(x + 3)(x + 1)(x - 1)$. Se completa la Tabla 2.5.

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ (Figura 2.19), está por encima del eje X en $(-3, -1)$ y $(1, +\infty)$ y por debajo del eje X en $(-\infty, -3)$ y $(-1, 1)$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x + 3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x + 1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x - 1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Tabla 2.5

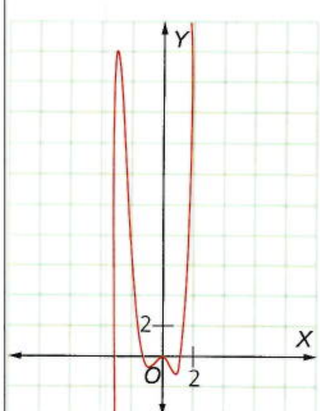


Figura 2.19

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4.1 Características de las funciones polinómicas de la forma $f(x) = x^n$

- El recorrido de las funciones de la forma $y = x^n$, con n un número par, es $[0, +\infty)$.
- El recorrido de las funciones de la forma $y = x^n$, con n un número impar, es el conjunto de los números reales.
- La gráfica de las funciones polinómicas de la forma $y = x^n$, con n un número par, tiene forma de parábola, similar a la función cuadrática $y = x^2$; si n es impar, la gráfica tiene una forma similar a la de la función cúbica $y = x^3$.
- Las funciones $y = x^n$, donde n es un número par, son simétricas respecto al eje Y.
- Las funciones $y = x^n$, donde n es un número impar, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- La gráfica de las funciones $y = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, corta los ejes en $(0, 0)$.

Ejemplo 2

Dado que las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = x^8$ son de la forma $y = x^n$, con n par se cumple que.

1. El recorrido de cada una es el intervalo $[0, +\infty)$.
2. Son simétricas respecto al eje Y porque:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$
$$g(-x) = (-x)^4 = x^4 = g(x)$$
$$h(-x) = (-x)^8 = x^8 = h(x)$$

3. Tienen forma de parábola, similar a $y = x^2$ y cortan a los ejes en el punto $(0, 0)$, como se muestra en la Figura 2.20.

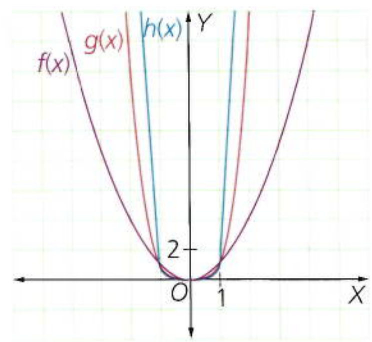


Figura 2.20

Ejemplo 3

Dado que las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$ y $h(x) = x^{11}$, son de la forma $y = x^n$, con n par se cumple que:

1. El recorrido es el conjunto de los números reales.
2. Son simétricas respecto al origen de coordenadas:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x = -f(x)$$
$$g(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -g(x)$$
$$h(-x) = (-x)^{11} = -x^{11} = -h(x)$$

3. Las gráficas funciones $g(x)$ y $h(x)$ tienen forma similar a $y = x^3$ y cortan a los ejes en el punto $(0, 0)$, como se muestra en la Figura 2.21.

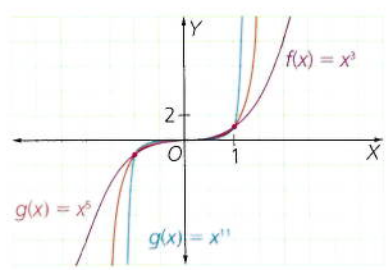


Figura 2.21

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Funciones polinómicas

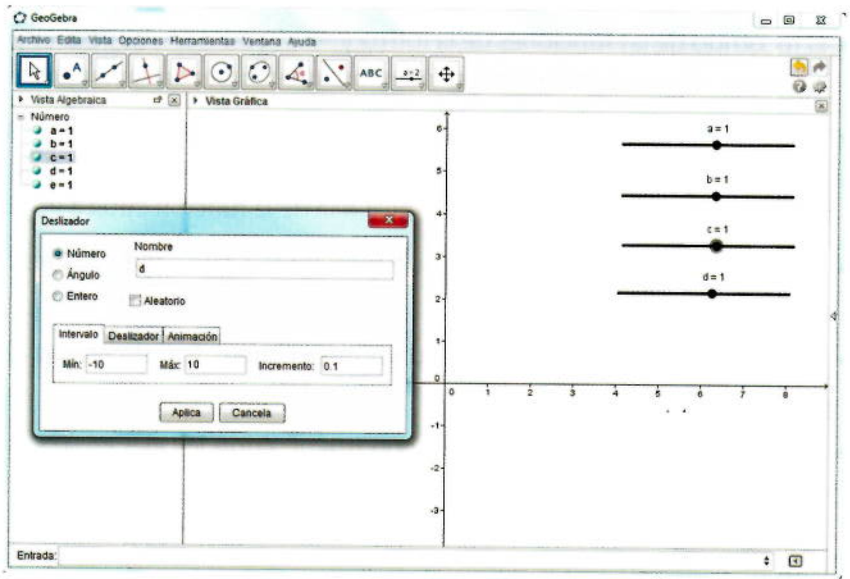
MatemaTICS

Representa funciones polinómicas en GeoGebra

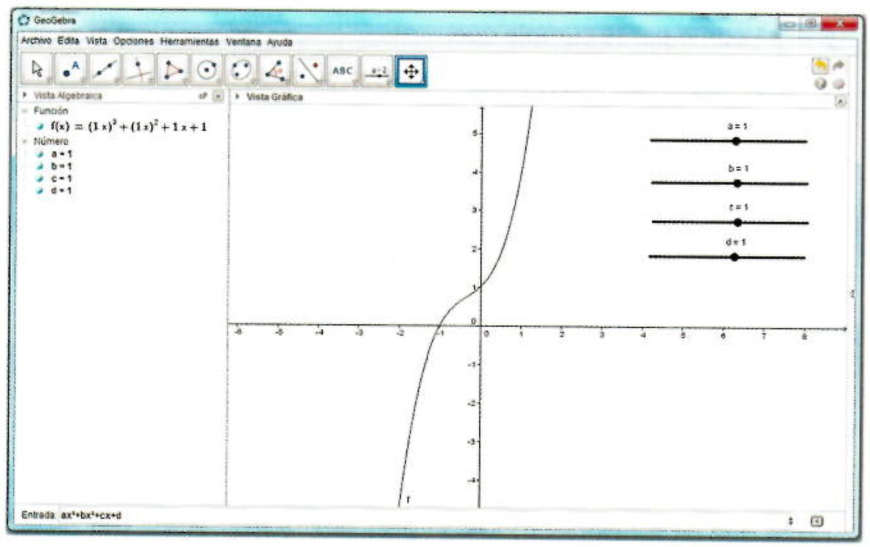
- Observa el procedimiento para representar funciones polinómicas hasta de grado 3.

Haz clic en el botón, selecciona la opción "Deslizador" y haz clic sobre la Vista Gráfica de GeoGebra. En la ventana que se despliega, cambia los valores máximo y mínimo del intervalo por -10 y 10, respectivamente. Deja el incremento en 0,1 y haz clic en el botón "Aplica".

En GeoGebra aparece el deslizador a. Construye otros tres deslizadores con las mismas características y nómbralos como b, c y d.



En la barra de entrada escribe $ax^3 + bx^2 + cx + d$ y pulsa Enter. En GeoGebra se observa la gráfica de la función $x^3 + x^2 + x + 1$, ya que todos los deslizadores están ubicados en 1.



Ten en cuenta que si ubicas un deslizador en 0, esto equivale a eliminar el término correspondiente al deslizador. De esta manera, podrás obtener la gráfica de funciones polinómicas de grado 0, 1, 2 y 3.

Mueve los deslizadores para cambiar el valor de los coeficientes de cada término; observa cómo varía la gráfica de la función polinómica y responde.

a. ¿Qué obtienes si ubicas todos los deslizadores en 0?

b. ¿Qué valores deben tomar los deslizadores para obtener una parábola? Escribe distintas posibilidades.

c. ¿Qué valores deben tomar los deslizadores para obtener una recta?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina cuáles de las siguientes funciones son polinómicas y, para estas, halla el grado y el término independiente.

a. $f(x) = 7$

b. $f(x) = 4x^2$

c. $f(x) = -4x^{\frac{1}{2}} + 3x^2$

d. $f(x) = 2(x^3 - 4x^5 + 1)$

2 Halla el dominio y recorrido de las siguientes funciones polinómicas.

a. $y = x^4 + 3$

b. $y = x^5 - 1$

c. $y = x^3 + 2$

d. $y = x^2 - 4$

Razonamiento

3 Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función polinómica.

a.

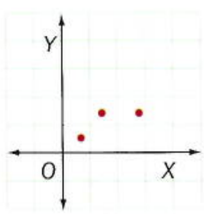


Figura 2.22

b.

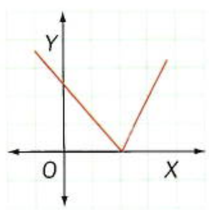


Figura 2.23

c.

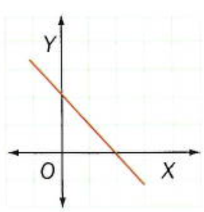


Figura 2.24

d.

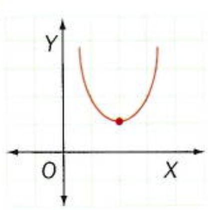


Figura 2.25

4 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Una función polinómica con todos los exponentes pares es una función par.

b. Una función polinómica en la que todos los exponentes que aparecen son impares es una función impar.

c. El producto de dos funciones polinómicas de grado m es una función polinómica de grado m.

d. La suma de dos funciones polinómicas de grado m es una función polinómica de grado m.

e. Si $P(x)$ es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, la ecuación $P(x) = 0$ siempre tiene al menos una solución real.

Modelación

5 Escribe un polinomio para cada caso.

a. Grado 1 y corte con el eje Y en $(0, 3)$.

b. Grado 4 y $(0, 0)$ como punto de corte con el eje X.

c. Grado 3 y es una función impar.

Resolución de problemas

6 Las gráficas de las funciones cuadráticas tienen un punto máximo si abren hacia abajo y un punto mínimo si abren hacia arriba. En cualquiera de los casos, tal punto se denomina **vértice**.

El vértice de una parábola es el punto que tiene abscisa $x = \dfrac{-b}{2a}$.

a. Determina el signo de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

b. ¿Cuál es el vértice de una parábola que corta los ejes en los puntos $(-1, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, -10)$?

c. Halla el dominio y el recorrido de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Luego, encuentra el vértice de la parábola correspondiente.

7 Una tenista ha lanzado una pelota que sigue una trayectoria dada por la fórmula $y = 8t - t^2 + 1{,}6$; donde t es el tiempo (en segundos) transcurrido desde el lanzamiento y y es la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.

a. ¿A qué tipo de gráfica corresponde la trayectoria que describe la fórmula?

b. ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?

c. ¿Cuál es la altura máxima conseguida?

Evaluación del aprendizaje

i Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas cada función polinómica y construye una tabla de valores para trazar el bosquejo de su gráfica.

a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

b. $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$

ii Describe las características de las funciones $p(x) = x^{12}$ y $m(x) = x^{15}$ y traza el bosquejo de sus gráficas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Funciones racionales

Pensamiento variacional

Saberes previos

Escribe dos números racionales en su representación como fracciones.

Analiza

Una empresa de bebidas desea diseñar una lata cilíndrica que contenga 330 cm³ de refresco.

- Expresa la cantidad de material que se va a necesitar para cada envase, en función del radio de la base.

Conoce

Para determinar la cantidad de material que se necesita para cada envase, se debe hallar el área total de la lata cilíndrica, la cual está en función del radio y la altura del envase, que son cantidades variables en la situación y deben expresarse de modo que permitan calcular el área.

Si r es el radio de la base y h es la altura de la lata cilíndrica en centímetros, entonces:

$$V = \pi r^2 h = 330 \text{ y } A_{\text{total}} = \underbrace{2\pi rh}_{\text{Área lateral}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{Área de las dos bases}} = 2\pi r(h + r)$$

Al despejar h en la expresión del volumen y sustituirla en la del área total se obtiene que:

$$h = \frac{330}{\pi r^2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2\pi r\left(\frac{330}{\pi r^2} + r\right) = 2\pi r\left(\frac{330 + \pi r^3}{\pi r^2}\right) = \frac{660 + 2\pi r^3}{r}$$

La expresión que corresponde al área total es una función en la variable r que recibe el nombre de **función racional** y tiene como dominio al conjunto de los números reales diferentes de 0.

Una función $f(x)$ de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$, se llama **función racional**.

El **dominio** de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 1

Las funciones $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x - 5}$ y $g(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ son funciones racionales. El dominio de cada una se halla determinando los valores de la variable independiente (en este caso x), que anulan el denominador:

- Para f se resuelve la ecuación $x - 5 = 0$, de donde se obtiene que $x = 5$. Luego, $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$.
- Para g se resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 2$$

De lo cual, $D(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

5.1 Asíntotas

Los valores que no pertenecen al dominio de una función racional definen en ella asíntotas, que son rectas a las que la función se acerca indefinidamente, pero que nunca interseca.

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ si $P(a) \neq 0$ y $Q(a) = 0$.
- La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de f si, a medida que $|x|$ se incrementa, el valor de $f(x)$ se aproxima a b.

La recta $y = mx + n$ (con $m \neq 0$) es una asíntota oblicua de f, si a medida que $|x|$ se incrementa, los puntos de la recta y los de la gráfica de f están cada vez más próximos.

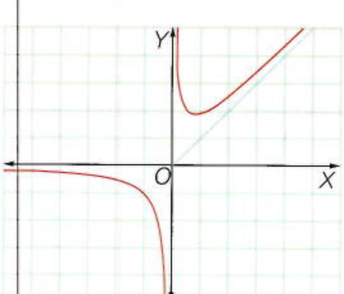


Figura 2.26

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $h(x) = \frac{2}{x-2}$.
En la Figura 2.27 se observa que la gráfica se acerca a la recta $x = 2$, pero nunca llega a tocarla. Con una calculadora se comprueba que, para valores de x mayores pero cercanos a 2, la función crece indefinidamente; por ejemplo, para $x = 2{,}1$ y $x = 2{,}001$, el valor de $h(x)$ es 20 y 2 000, respectivamente.

Por otro lado, para valores de x menores pero cercanos a 2, la función es decreciente; por ejemplo, para $x = 1{,}9$ y $x = 1{,}999$, los valores que toma $h(x)$ son -20 y $-2\,000$, respectivamente.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función $h(x)$ ya que a medida que x crece o decrece indefinidamente, la función se acerca al eje Y, pero nunca llega a tocarlo.

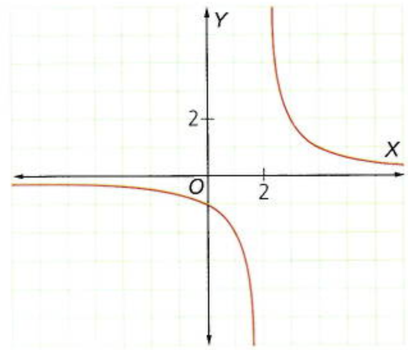


Figura 2.27

5.2 Características de las funciones racionales de la forma $f(x) = \frac{1}{x^n}$

- El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Si n es un número par, el recorrido es $(0, +\infty)$.
- Si n es un número impar, el recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Las funciones $y = \frac{1}{x^n}$, con n siendo un número par, son simétricas respecto al eje Y.
- Las funciones $y = \frac{1}{x^n}$, con n siendo un número impar, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- Las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son asíntotas, vertical y horizontal, respectivamente.

Ejemplo 3

En la función $f(x) = \frac{1}{x^8}$ el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.

Las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son asíntotas, vertical y horizontal, respectivamente, para $f(x)$.

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^8} = \frac{1}{x^8} = f(x)$; luego, $f(x)$ es una función par y simétrica respecto al eje Y.

La Figura 2.28 muestra la gráfica de $f(x)$.

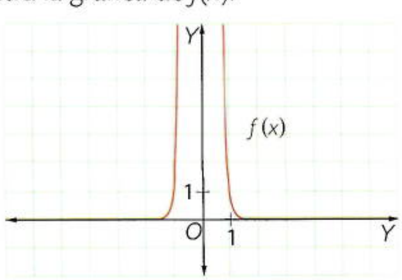


Figura 2.28

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Funciones racionales

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina cuáles de las siguientes funciones son racionales. Justifica tus respuestas.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$

b. $g(x) = \dfrac{5x + 3}{4}$

c. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5}$

d. $j(x) = \dfrac{x^2 + 2x^3}{x^2 + 7}$

e. $k(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 - 1}$

2 Determina el dominio y las asíntotas de cada una de las siguientes funciones racionales.

a. $g(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - x + 5}{x^2 - 4x + 4}$

b. $h(x) = \dfrac{3x + 4}{3x - 4}$

c. $j(x) = \dfrac{x - 3}{x^3 - 27}$

d. $k(x) = \dfrac{x^2 - 25}{2x^2 - 50}$

e. $f(x) = \dfrac{-6x^2}{x^2 + 1}$

f. $g(x) = \dfrac{x^5}{x^4 + 1}$

g. $h(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$

h. $k(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - 2x - 2}$

i. $f(x) = \dfrac{x - 7}{x^2 - 14x + 49}$

j. $g(x) = \dfrac{2x - 3}{2x^2 + 7x - 15}$

k. $h(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x^4 - 1000x}$

l. $j(x) = \dfrac{2}{(x - 3)(x + 4)x}$

m. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Modelación

3 Dibuja la gráfica de una función racional que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

a. Tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y una asíntota horizontal en $y = -1$.

b. Su dominio es $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ y tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

4 Relaciona cada una de las funciones de las figuras 2.29 y 2.30 con la fórmula que le corresponde. Luego, determina las asíntotas, el dominio y la simetría en cada una de ellas.

a. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

b. $f(x) = \dfrac{-1}{x - 1}$

1.

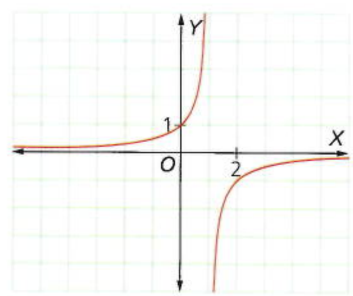


Figura 2.29

2.

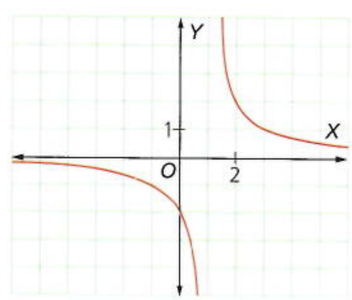


Figura 2.30

Razonamiento

5 Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales y, en caso afirmativo, escribe un ejemplo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Toda función polinómica es racional.

b. La suma de dos funciones racionales es una función racional.

c. El producto de dos funciones racionales, f y g, es una función racional cuyo dominio corresponde a $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.

d. Todas las funciones racionales tienen al menos una asíntota horizontal.

e. Todas las funciones racionales tienen mínimo una asíntota vertical.

7 Calcula las asíntotas de las siguientes funciones, si k y a son dos números reales cualesquiera.

a. $f(x) = \dfrac{k}{x}$ b. $f(x) = \dfrac{kx}{x + a}$

c. $f(x) = \dfrac{k}{x + a}$ d. $f(x) = \dfrac{kx^2}{x + a}$

8 Una función racional tiene una o más asíntotas oblicuas solo cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador. De acuerdo con esta información, determina si las siguientes funciones tienen o no asíntotas oblicuas.

a. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6}$

b. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x + 3}{x^2 - 4}$

c. $f(x) = \dfrac{-3x + 2}{x^2}$

Ejercitación

9 Determina los puntos de corte con los ejes, el signo, la simetría y las asíntotas de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 9}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$

d. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$

Resolución de problemas

10 La función racional f tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y el dominio de la función g es $\mathbb{R} - \{1\}$.

a. ¿Se puede afirmar que 2 no es un punto del dominio de la función f?

b. ¿Es $x = 1$ una asíntota vertical de g?

11 Se ha comprobado empíricamente que las ganancias que obtiene un casino en la ruleta dependen del tiempo que se permanezca jugando. Esta relación entre el tiempo y las ganancias se modela con la función $G(t) = \dfrac{10\,000t}{t^2 + 40\,000}$, donde t representa el tiempo de juego en minutos y $G(t)$, las ganancias en miles de pesos.

a. ¿Por qué se puede afirmar que este casino siempre obtiene ganancias?

b. ¿Qué ganancias obtiene el casino si la ruleta está ocupada durante media hora?

c. ¿La función $G(t)$ tiene alguna asíntota?

Evaluación del aprendizaje

Halla el dominio, el recorrido y la ecuación de las asíntotas de las siguientes funciones. Luego, traza la gráfica aproximada de cada una.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ b. $f(x) = \dfrac{-3}{x - 4}$

a. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ b. $f(x) = 1 + \dfrac{-5}{x - 2}$

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

El índice de masa corporal (IMC) asocia la masa y la talla de un individuo. Se calcula usando la expresión: IMC = masa/estatura^2, donde la masa se expresa en kg y el cuadrado de la estatura en m^2.

Si dos personas tienen la misma masa pero una mide 1,73 m y la otra 1,5 m, ¿cuál de ellas tiene mayor IMC? Explica.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

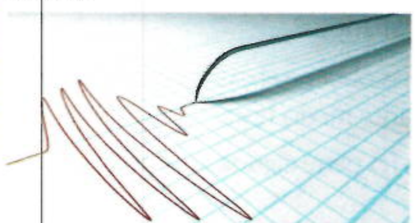
6 Funciones exponenciales y logarítmicas

Saberes previos

¿Qué sabes en cuanto a los terremotos? Ellos se miden con expresiones matemáticas que contienen potencias. Menciona tres características de la potenciación.

Analiza

La energía liberada en un terremoto, medida en kilovatios-hora, se modela aproximadamente mediante la función $E(x) = 0{,}02 \cdot 10^{1{,}5x}$, donde x es la magnitud del sismo en la escala de Richter.



- ¿La energía liberada por un terremoto de magnitud 6 es el doble de la liberada por uno de magnitud 3?

Conoce

6.1 Función exponencial

Una opción para responder la pregunta, consiste en calcular el cociente entre la energía liberada por el terremoto de mayor magnitud y el de menor y, si éste es 2 se responderá afirmativamente al interrogante.

$$\frac{E(6)}{E(3)} = \frac{0{,}02 \cdot 10^{1{,}5 \cdot 6}}{0{,}02 \cdot 10^{1{,}5 \cdot 3}} = \frac{0{,}02 \cdot 10^{9}}{0{,}02 \cdot 10^{4{,}5}} = 10^{4{,}5} = 31\,622{,}78$$

Luego, la energía liberada por el terremoto de magnitud 6 no es el doble de la liberada por el terremoto de magnitud 3, sino mucho mayor, de aproximadamente 31 600 veces.

Las funciones del anterior tipo y las de la forma $f(x) = 10^x$ son exponenciales y se emplean para medir magnitudes que tienen un rango de variación muy grande. En este caso, para medir la energía liberada por un terremoto.

Una función de la forma $f(x) = b^x$ es una **función exponencial**, siempre que b sea un número real positivo distinto de 1.

6.2 Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

- El dominio de $f(x) = b^x$ es el conjunto de los números reales.
- El rango de $f(x)$ es $(0, +\infty)$.
- El punto de corte de la función $f(x)$ con el eje Y es el punto $(0, 1)$.
- El eje X es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.
- La función $f(x) = b^x$ vista de izquierda a derecha asciende si $b > 1$, y desciende si $0 < b < 1$.

Ejemplo 1

En la Figura 2.31 se representan las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para ellas se cumple que:

$D(f) = \mathbb{R} = D(g)$

$R(f) = (0, +\infty) = R(g)$

La intersección de f y g con el eje Y es $(0, 1)$.

f vista de izquierda a derecha asciende, mientras que g desciende.

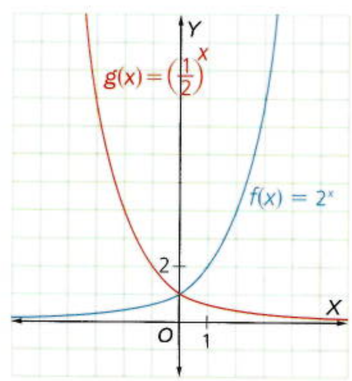


Figura 2.31

6.3 Funciones exponenciales de la forma $f(x) = a \cdot b^x$

Las funciones de la forma $f(x) = a \cdot b^x$, con $a \neq 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$, son funciones exponenciales, cuyo dominio es el conjunto de los números reales.

El recorrido de $f(x) = a \cdot b^x$ es el intervalo $(0, +\infty)$ si $a > 0$, o el intervalo $(-\infty, 0)$ si $a < 0$. El punto de corte de estas funciones con el eje Y es $(0, a)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

En la Figura 2.32 se muestran las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = 2 \cdot 3^x$ y $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

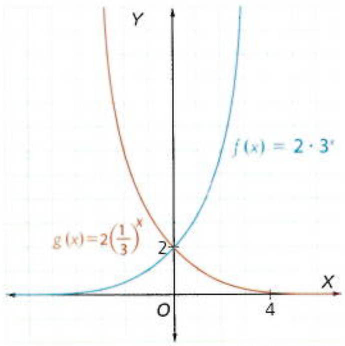


Figura 2.32

El punto de corte con el eje Y de las funciones f y g es $(0, 2)$ y, $D(f) = \mathbb{R} = D(g)$ y $R(f) = (0, +\infty) = R(g)$.

6.4 Función logarítmica

Una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a \neq 0$ y $a^{f(x)} = x$, se conoce como **función logarítmica**.

Ejemplo 3

Si $f(x) = \log_2 x$, para hallar el valor de $f(1) = \log_2 1$, se debe encontrar un valor y, tal que $2^y = 1$; este valor es 0, ya que $2^0 = 1$.

Para hallar otros valores de $f(x) = \log_2 x$, se realiza un procedimiento similar.

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3,\ f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2,\ f(2) = \log_2 2 = 1.$$

6.5 Propiedades de la función logarítmica

- El dominio de la función $f(x) = \log_a x$ es el conjunto de los números reales mayores que 0 y el rango es el conjunto de los números reales.
- Para todo valor $a \neq 0$, $\log_a 1 = 0$; es decir, la intersección con el eje X es el punto $(1, 0)$. La gráfica de la función $f(x) = \log_a x$ no interseca el eje Y.
- El eje Y es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.
- La gráfica de $f(x)$ vista de izquierda a derecha asciende si $a > 1$, y desciende si $0 < a < 1$.

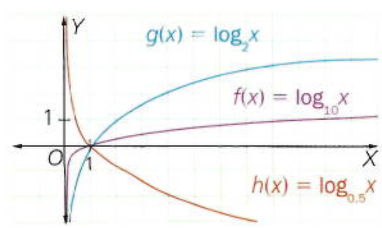


Figura 2.33

Ejemplo 4

En la Figura 2.33 se muestran las gráficas de $f(x) = \log_{10} x$, $g(x) = \log_2 x$ y $h(x) = \log_{0,5} x$. Todas ellas se intersecan en $(1, 0)$ y cumplen las demás propiedades mencionadas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina lo que se indica si $f(x) = 4^x$ y $g(x) = \log_4 x$.

a. $f(-2)$ b. $f(0)$ c. $g(4)$ d. $g(1)$

2 Halla el dominio y el recorrido de cada función.

a. $g(x) = \log_2(2x - 1)$ b. $h(x) = 4^x$

c. $f(x) = 4^{-x}$ d. $r(x) = \log\left(\dfrac{x-7}{x^2-1}\right)$

3 Lee y resuelve.

La función $f(x) = e^x$ es exponencial y es muy importante porque aparece en la descripción de múltiples procesos naturales, como el crecimiento de poblaciones de microorganismos.

Emplea la calculadora para elaborar una tabla de valores y a partir de ella trazar la gráfica de las siguientes funciones. Luego, halla su dominio y su recorrido.

a. $y = -\dfrac{1}{2}e^x$ b. $y = 3e^x - 1$

4 Lee y resuelve.

El logaritmo que tiene por base el número e se denomina logaritmo natural, se representa como $\ln x = \log_e x$ y cumple que

$$y = \log_e x \Leftrightarrow e^y = x.$$

¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones bien definidas? Realiza la gráfica de aquellas que lo sean. Utiliza la calculadora.

a. $f(x) = \ln(x + 1)$ b. $g(x) = \ln(-x)$

5 Traza sobre un mismo plano la gráfica de cada una de las siguientes funciones y de su simétrica respecto de la recta $y = x$.

a. $f(x) = 4^x$ b. $g(x) = \log_5 x$

c. $h(x) = \log x$ d. $i(x) = 7^x$

6 Dibuja las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = e^x$ en el mismo sistema de ejes coordenados y describe tres características, de las aprendidas, que cumplan todas y al menos dos diferencias entre cada una.

Modelación

7 Dibuja las funciones simétricas con respecto a la recta $y = x$ de las funciones exponenciales de las figuras 2.34 y 2.35.

a.

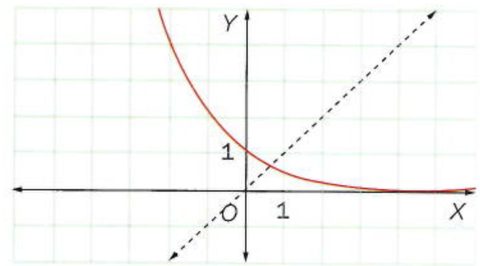


Figura 2.34

b.

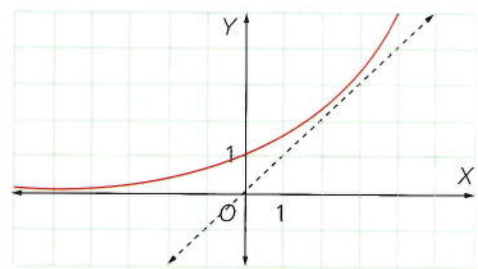


Figura 2.35

8 Representa cada par de funciones en un mismo plano cartesiano y con diferente color.

a. $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

b. $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c. $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ y $g(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

Comunicación

9 Completa en tu cuaderno la Tabla 2.6 indicando de qué tipo es cada una de las funciones.

a. $f(x) = e^{2x}$ b. $f(x) = e \cdot x$

c. $f(x) = \log(x + 3)$ d. $f(x) = x \cdot \ln 2$

e. $f(x) = 4^{-x}$ f. $f(x) = x^3$

g. $f(x) = \ln(2x)$ h. $f(x) = 5^x$

Exponencial			
Logarítmica			
Ni exponencial ni logarítmica			

Tabla 2.6

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10 Determina y escribe el dominio, los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \log_2(x^2 - 16)$ b. $g(x) = \log_2(6x)$

c. $f(x) = (1 - x) \cdot e^x$ d. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{|x - 1|}\right)$

Resolución de problemas

11 Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento $f(t)$ después de un tiempo t satisface la fórmula $f(t) = 60 \cdot 2^{-0{,}02t}$.

a. ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?

b. ¿Qué cantidad queda después de 500 años?

c. ¿Qué cantidad queda después de 1 000 años?

d. ¿Qué cantidad queda después de 2 000 años?

12 Una población de conejos crece un 1,04% por día. Define una función que describa el número de conejos después de t días, con una población inicial de 500 conejos.

13 La fórmula de interés continuo compuesto es $A(t) = Pe^{rt}$, en donde $A(t)$ es el interés obtenido después de t años, P es la cantidad inicial invertida y r es la tasa de interés. ¿Cuál es el dominio y punto de corte con el eje Y de $A(t)$?

14 La Tabla 2.7 muestra el número de peces, P, que hay en un estanque al cabo de t meses.

t	0	1	2	3	4	5
P	25	43	75	130	224	387

Tabla 2.7

a. Encuentra la función que modela esta situación.

b. ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, se necesita para duplicar en cualquier momento la población de peces que hay en el estanque?

c. ¿Al cabo de cuánto tiempo, aproximadamente, se llegará a una población de 1 000 peces?

15 La ley de enfriamiento de Newton establece que un objeto caliente se enfría siguiendo una ley exponencial de acuerdo con la siguiente expresión:

$$y(t) = L + (L_0 - L)e^{-kt}$$

donde $y(t)$ es la temperatura del objeto después de haber transcurrido t minutos; L, la temperatura ambiente; L_0, la temperatura inicial del cuerpo y k, una constante que depende de la naturaleza del objeto.

Con base en lo anterior, si una taza de café en una habitación a 20 °C se enfría de 80 °C a 60 °C en tres minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse a 30 °C? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la temperatura ambiente?

Evaluación del aprendizaje

Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Calcula el número de amebas que habrá después de 1, 2, 3 y 4 horas. Construye la tabla de datos correspondiente, escribe la expresión analítica de la función que define el crecimiento de la población de amebas, traza el bosquejo de su gráfica y describe tres de sus características.

Educación ambiental

Una bacteria en un ambiente favorable produce $4{,}7 \times 10^{21}$ bacterias en un día. Define la función que describa el número de bacterias después de t días, con una población inicial de 1 000 bacterias.

- ¿Crees que el crecimiento exponencial de las bacterias ayudan a los procesos de biorremediación? Justifica.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

7 Funciones definidas a trozos

Saberes previos

Si quieres hacer un envío de un lugar a otro, ¿de qué depende el valor que te cobran?

Analiza

Un mayorista de frutas exóticas distribuye su mercancía según los datos de la Tabla 2.7:

Precio de envío de frutas exóticas	
• Entre 0 kg y 50 kg	$ 5 000 por kg
• A partir de 50 kg menos de 100 kg	$ 4 500 por kg
Más $ 20 000 de gastos de envío.	
• A partir de 100 kg	$ 4 000 por kg
Más $ 25 000 de gastos de envío.	

Estudia la función que expresa el precio y, en función del peso x.

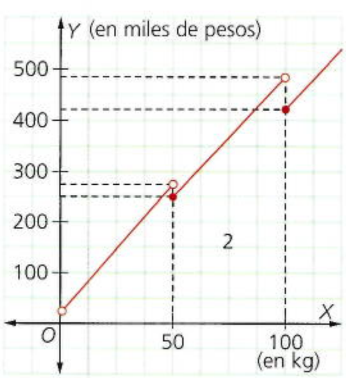


Figura 2.36

Conoce

De la tabla se deduce la expresión que permite definir la función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 20 + 5x, \text{ si } 0 < x < 50 \\ 20 + 4{,}5x, \text{ si } 50 \leq x < 100 \\ 25 + 4x, \text{ si } x \geq 100 \end{cases}$$

donde los precios están dados en miles de pesos.

Como se puede observar, esta función viene dada por una fórmula distinta para cada una de sus partes.

Las **funciones definidas a trozos** están definidas aplicando diferentes fórmulas a las distintas partes de su dominio.

Comportamiento de f en valores próximos a $x = 0$ y $x = 50$:

$x > 0$	$x < 50$	$x > 50$
$f(0{,}5) = 20 + 5(0{,}5) =$ \$ 22,5	$f(49{,}5) = 20 + 5(49{,}5) =$ \$ 267,5	$f(50{,}5) = 20 + 4{,}5(50{,}5) =$ \$ 247,25
$f(0{,}1) = 20 + 5(0{,}1) =$ \$ 20,5	$f(49{,}9) = 20 + 5(49{,}9) =$ \$ 269,5	$f(50{,}1) = 20 + 4{,}5(50{,}1) =$ \$ 245,45
$f(0{,}01) = 20 + 5(0{,}01)$ = \$ 20,05	$f(49{,}99) = 20 + 5(49{,}99)$ = \$ 269,95	$f(50{,}01) = 20 + 4{,}5(50{,}01) =$ \$ 245,045

Tabla 2.8

Comportamiento en valores próximos a $x = 100$:

$x < 100$	$x > 100$
$f(99{,}5) = 20 + 4{,}5(99{,}5) =$ \$ 467,75	$f(100{,}5) = 25 + 4(100{,}5) =$ \$ 427
$f(99{,}9) = 20 + 4{,}5(99{,}9) =$ \$ 469,55	$f(100{,}1) = 25 + 4(100{,}9) =$ \$ 425,4
$f(99{,}99) = 20 + 4{,}5(99{,}99) =$ \$ 469,955	$f(100{,}01) = 25 + 4(100{,}99) =$ \$ 425,04

Tabla 2.9

Todos los precios están dados en miles de pesos

En esta función hay tres puntos de discontinuidad: en $x = 0$, en $x = 50$ y en $x = 100$. Si se acerca a 0 tomando valores mayores, por la derecha, tiende a 20; si se acerca a 50 tomando valores inferiores, por la izquierda, la función tiende a 270 y si se acerca tomando valores superiores, por la derecha, tiende a 245. Cuando x se acerca a 100, la función tiende a 470 y a 425 según se tomen valores por la izquierda o por la derecha de 100, respectivamente.

Con esta información se traza la gráfica teniendo en cuenta que los puntos de discontinuidad deben representarse con un punto abierto, cuando el valor no haga parte de los intervalos definidos en la función. En la Figura 2.36 se observa la gráfica de la función.

A partir de la gráfica se observa que $D(f) = (0, +\infty)$.
De otro lado $R(f) = (20, +\infty)$.
La función f no corta ni al eje X ni al eje Y.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 1

Para graficar la función $f(x)$, se analizan los intervalos en los que está definida.

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ si } x<-3 \\ 5-x^2, \text{ si } -3\leq x\leq 2 \\ \dfrac{2x-4}{x}, \text{ si } x>2 \end{cases}$$

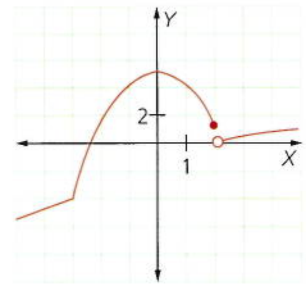


Figura 2.37

- El primer intervalo es $(-\infty, -3)$. La función es la recta $x-1$.
- En $[-3, 2]$, la gráfica corresponde a una parábola que abre hacia abajo.
- En $(2, \infty)$, la representación gráfica es una curva ascendente.

Observa que en el punto (2, 1) de la gráfica aparece un punto relleno. Esto es debido a que el intervalo $[-3, 2]$ es cerrado en 2. De otra parte el punto (2, 0) de la gráfica se ha representado con un punto vacío, debido a que el intervalo $(2, +\infty)$ es abierto en 2. Observa la Figura 2.37.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Representa las siguientes funciones e indica los intervalos en los que asciende y desciende.

a. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ si } x<1 \\ x^2+2x+2, \text{ si } 1\leq x\leq 2 \\ -3, \text{ si } x>2 \end{cases}$

b. $g(x)=\begin{cases} -2x-3, \text{ si } x<-2 \\ x^2+5, \text{ si } -2\leq x\leq 2 \\ -x+5, \text{ si } x>2 \end{cases}$

Razonamiento

2 Encuentra y escribe la expresión analítica de la función cuya gráfica se muestra en la Figura 2.38.

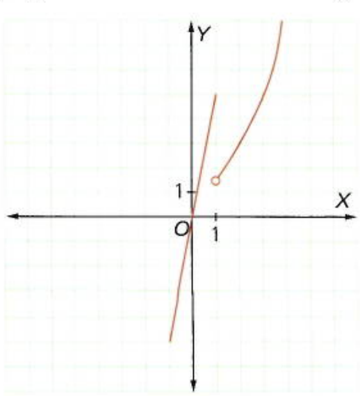


Figura 2.38

Resolución de problemas

3 Escribe los intervalos en los que, vista de izquierda a derecha, la función de la Figura 2.39 asciende y aquellos en los que desciende.

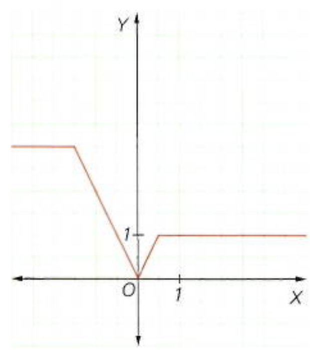


Figura 2.39

Evaluación del aprendizaje

Un médico cobra las consultas de acuerdo con su duración, así:

- Hasta 6 minutos, cobra \$ 50 000.
- Entre 6 y 15 minutos cobra \$ 80 000.
- Por encima de 15 minutos cobra \$ 80 000 más \$ 5 000 por cada minuto adicional a los 15 minutos.

a. Describe su dominio y su recorrido
b. Escribe la función que modela la situación.
c. Elabora una gráfica para esta situación.
d. Calcula el valor de una consulta de 20 minutos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8 Funciones valor absoluto y parte entera

Saberes previos

Representa sobre la recta numérica todos los números que se encuentran a menos de 8 unidades de 1.

Analiza

- Explica el significado de la expresión $|a|$.

Conoce

8.1 Función valor absoluto

La expresión $|a|$ simboliza el **valor absoluto de un número real *a*** y representa la distancia de a a 0. El valor absoluto de un número a se define así:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a > 0 \\ 0, \text{ si } a = 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

La **función valor absoluto** se define de manera similar al valor absoluto de un número real mediante una función definida a trozos.

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), \text{ si } x < 0 \\ f(x), \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Para dibujar la gráfica del valor absoluto de una función, se puede dibujar primero la función y luego se aplica una reflexión de la gráfica con respecto al eje X, en los intervalos en los que el signo de la función sea negativo. En la Figura 2.40 se observa la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$, y en la Figura 2.41, la gráfica de $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$. Como en el intervalo $[1, 5]$ el signo de $f(x)$ es negativo, se hace la reflexión de esa parte de la gráfica con respecto al eje X en la gráfica de $g(x)$.

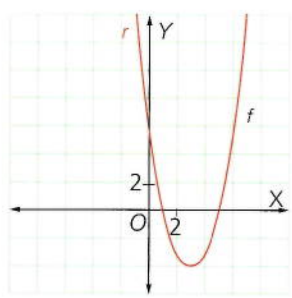


Figura 2.40

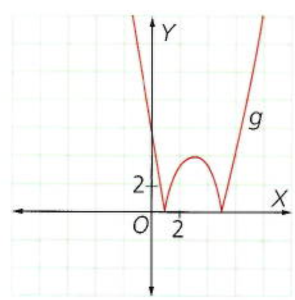


Figura 2.41

8.2 Propiedades de la función $f(x) = |x|$

- El dominio de la función valor absoluto es el conjunto de los números reales.
- El rango es el conjunto de los números reales mayores o iguales que 0.
- La función $f(x) = |x|$ es simétrica respecto al eje Y.
- En la Figura 2.42 se representa la gráfica de la función $f(x) = |x|$. Esta consta de dos partes: la recta $y = x$, para $x \geqslant 0$, y la recta $y = -x$, para $x < 0$.

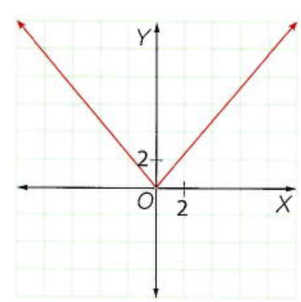


Figura 2.42

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8.3 Función parte entera

La función parte entera, que se representa por $f(x) = [x]$, es la función que asocia a cada número decimal su parte entera, es decir, el mayor número entero menor o igual que x.

Por ejemplo, $f(3{,}45) = 3$, $f(0{,}48) = 0$.

Observa que $f(-1{,}28) = -2$, pues -2 es el número entero más próximo $-1{,}28$ y es menor que este.

La función parte entera se puede definir como una función por partes, así:

$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ -2, \text{ si } -2 \leq x < -1 \\ -1, \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ 0, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \dots \end{cases}$$

La gráfica de esta función y sus características se muestran en la Figura 2.43.

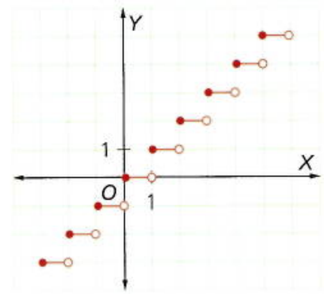


Figura 2.43

$D(f) = \mathbb{R}$

$R(f) = \mathbb{Z}$

f corta al eje X en el intervalo $[0, 1)$ y al eje Y en $(0, 0)$.

f no es simétrica.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Representa las siguientes funciones e indica el dominio y el rango de cada una.

a. $r(x) = |5x|$ b. $q(x) = |3x + 1|$

c. $g(x) = [4x] - 4$ d. $h(x) = [-x + 2]$

e. $j(x) = \left|\frac{1}{2}x - 3\right|$ f. $k(x) = [x] + 3$

2 Expresa la función $f(x) = |2x + 6| - 2 \cdot |x - 1|$ como una función definida a trozos.

a. Representa su gráfica.

b. Halla su dominio y su recorrido.

c. Determina los puntos de corte con los ejes.

Modelación

3 ¿Cuál de los siguientes enunciados se puede modelar con la función $f(x) = 3 - 0{,}8\,[1 - x]$?

a. Un estacionamiento cobra $ 3 000 por la primera hora y descuenta $ 800 por cada hora adicional de parqueo.

b. Una lavandería cobra $ 3 000 por el primer kilogramo de ropa y $ 800 por cada libra o fracción adicional.

c. En la panadería cobran $ 3 000 por cada libra de queso costeño y rebajan $ 800 por cada libra adicional que lleve un cliente.

4 En cada caso, escribe una expresión que modele la gráfica que se representa.

a.

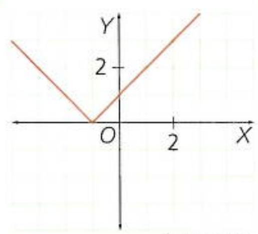


Figura 2.44

b.

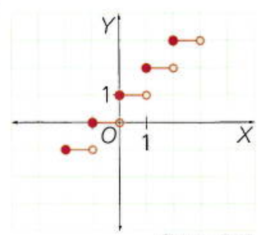


Figura 2.45

Evaluación del aprendizaje

i Un artista lanzó un nuevo álbum musical. Las ventas semanales x (en miles de unidades) aumentaron durante cierto tiempo pero luego decrecieron de acuerdo con el modelo: $s = -2|t - 20| + 40$ donde t es el tiempo en semanas.

a. Grafica la función.

b. ¿Cuál es el número máximo de unidades vendidas en una semana?

ii El costo por alquilar un videojuego durante t horas esta determinado por la función $f(t) = 2800 + 500[t]$.

a. Determina el costo de alquilar el videojuego por 2 horas y media.

b. Traza la gráfica de la función f.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

9 Operaciones con funciones

Saberes previos

¿Por qué $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para todos los números reales? ¿Para qué valores de x está definida? Construye una tabla de valores y haz un bosquejo de $f(x)$.

Analiza

En una práctica de biología han encontrado que el número de gusanos de seda que ha criado cada grupo de trabajo se modela mediante la función $f(x) = x^2 + 1$, donde x es el número de semanas.

- Si en la clase hay cinco grupos, ¿cuántos gusanos habrá en total al final de cada semana?

Conoce

En la segunda columna de la Tabla 2.10 se muestra el número de gusanos que hay en un grupo al transcurrir las semanas y en la tercera columna, el número de gusanos que hay en total en los cinco grupos al final de cada semana. Tales valores corresponden a la función $g(x) = 5 \cdot f(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$
0	1	5
1	2	10
2	5	25
3	10	50
4	17	85
5	26	130

Tabla 2.10

Al igual que en los números reales, en las funciones también se definen las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Si f y g son dos funciones reales de variable real, algunas de las operaciones básicas que se pueden definir entre f y g son:

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$

9.1 Dominio de las funciones suma, diferencia, producto y cociente

Los **dominios de las funciones suma, diferencia y producto** están formados por la intersección de los dominios de las funciones f y g, es decir, por los números que simultáneamente pertenecen a los dominios de f y g. En el caso del cociente sucede lo mismo, pero además hay que excluir del dominio los valores que anulan el denominador, $g(x) = 0$.

Ejemplo 1

Dadas las funciones $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{(1-x)(x-3)}$, se sabe que sus dominios son $D(f) = [2, +\infty)$ y $D(g) = [1, 3]$.

Por lo tanto, $D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = [2, 3]$.

Para hallar el dominio de la función cociente $\dfrac{f}{g}$, se determinan los valores que anulan el denominador. En este caso, $g(x) = 0$ cuando $x = 1$ o $x = 3$.

Como $x = 1 \notin$ a $D(f) \cap D(g)$, entonces $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{3\} = [2, 3)$.

9.2 Composición de funciones

Otra forma de obtener una función a partir de dos funciones dadas es evaluar una de ellas en la otra. Esta operación se llama **composición de funciones**.

La **composición de una función f con una función g** se representa por $f \circ g$ y se define como $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Si $f(x) = (x - 3)^2$ y $g(x) = x + 1$, entonces:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 1) = (x + 1 - 3)^2 = (x - 2)^2$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(x - 3)^2] = (x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$

Dado que, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ se puede identificar que la composición de funciones NO es conmutativa.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Opera las funciones según se indica y halla los dominios de sus resultados, teniendo en cuenta que $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = \sqrt{2x - 4}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ y $t(x) = 1 - x^2$.

a. $(f - t)(x)$

b. $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$

c. $(h \circ g)(x)$

d. $(g \circ t)(x)$

e. $(f \cdot h)(x)$

f. $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)$

2 Halla los dominios que se indican, dadas $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 3$ y $h(x) = x - 5$.

a. Dominio de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

b. Dominio de $f \circ g$.

c. Dominio de $g \circ f$.

d. Dominio de $f \circ f$.

3 Realiza las operaciones y determina el dominio de cada función si $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$ y $h(x) = x^2 - 4$.

a. $\dfrac{g}{f}$

b. $f \circ g$

c. $g \circ f$

d. $f \circ g \circ h$

Razonamiento

4 Demuestra que $f \circ g = x - 2$ para $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ y explica por qué el dominio de esta función no es $\mathbb{R}$.

5 Construye la tabla de la función $f \circ g$, dadas f y g definidas por las tablas 2.11 y 2.12, respectivamente.

x	-1	0	1	4	10	12
$f(x)$	2	3	5	-3	2	1

Tabla 2.11

x	-1	2	3	5	7	10
$g(x)$	12	10	4	0	-1	-1

Tabla 2.12

6 Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ y $g(x) = x + h$, donde h es un número real:

a. calcula $f \circ g$.

b. ¿Para qué valores de h la función g compuesta con f tiene una raíz en $x = 0$?

Evaluación del aprendizaje

✓ Sean $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = |x|$ y $h(x) = x^2$. Completa la Tabla 2.13.

Función	Dominio
$(f + h)(x) =$	
$(f + g + h)(x) =$	
$(g - h)(x) =$	
$(g - f)(x) =$	
$f \cdot g\,(x) =$	
$\dfrac{f}{g}\,(x) =$	
$\dfrac{f}{h}\,(x) =$	
$(f \circ g)(x) =$	
$(h \circ h)(x) =$	

Tabla 2.13

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10 Funciones inversas

Saberes previos

Los recolectores de café multiplican por 0,18 la masa total de grano recolectado para saber cuánto de este al ser despulpado queda en almendra (semilla) que luego se seca y se muele.

Escribe una función que sirva para determinar cuántos kilos de almendra se obtienen de x kilos de granos de café. ¿Cuántos kilos de grano deben despulparse para obtener 15,66 kilos de café en almendra?

Analiza

La Tabla 2.14 muestra la relación entre la distancia recorrida por un atleta en una carrera de 100 m planos y el tiempo empleado, donde $f(d)$ mide los segundos utilizados en cubrir los primeros metros de la carrera.

d (metros)	$f(d)$ (segundos)
0	0
20	2,4
40	4,7
60	6,5
80	8,2
100	10

Tabla 2.14

- ¿Cuántos metros ha recorrido el atleta al cabo de 6,5 segundos?

Conoce

En la Tabla 2.14 se observa que a los 6,5 segundos el atleta ha recorrido los primeros 60 m. La función que relaciona el tiempo con la distancia es f^{-1}, se denomina **inversa de *f***, se denota $f^{-1}(t)$ y da los metros recorridos por el atleta en los primeros t segundos de su carrera.

La **función inversa de una función *f*** se denota como f^{-1} y se lee "inversa de f".

No toda función f tiene inversa, pero cuando existe, se define así:

$$f^{-1}(y) = x \text{ y significa que } f(x) = y$$

Si f y f^{-1} son inversas:

El dominio de f^{-1} es el recorrido de f.

El recorrido de f^{-1} es el dominio de f.

Su composición es la función identidad: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Para que una función tenga inversa debe ser uno a uno. Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal interseca su gráfica en máximo un punto.

Ejemplo 1

Para $y = x^3 - 1$ se cumple la prueba de la recta horizontal. Por lo tanto, $y = x^3 - 1$ tiene inversa. Para encontrar su expresión analítica, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se despeja la variable independiente: $x = \sqrt[3]{y+1}$. Se intercambian las variables y se obtiene $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$.
2. Las gráficas de las funciones f y $f^{-1}(x)$ que se observan en la Figura 2.46 son **simétricas respecto a la recta $y = x$.**

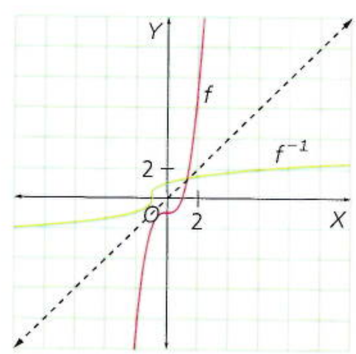


Figura 2.46

Observa que:

3. $D(f^{-1}) = \mathbb{R} = R(f)$ y $R(f^{-1}) = D(f)$.
4. $(f \circ g)(x) = f\left(\sqrt[3]{x+1}\right) = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = (x+1) - 1 = x$

   $(g \circ f)(x) = g(x^3 - 1) = \sqrt[3]{(x^3 - 1) + 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Decide si las funciones que se representan enseguida tienen inversa y si es así, traza el bosquejo de su gráfica.

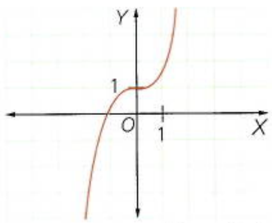
a.


Figura 2.47

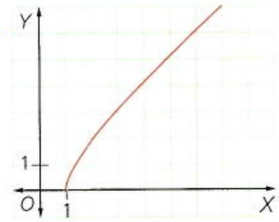
b.


Figura 2.48

2 Determina si cada una de las siguientes funciones tiene inversa. De ser así, escribe su expresión analítica, halla su dominio y recorrido y traza el bosquejo de su gráfica.

a. $f(x) = 2x - 3$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

c. $f(x) = x^2 + 2$

d. $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 3$

Comunicación

3 Lee, analiza y responde.

a. Si la imagen de 0 mediante una función f es 3, ¿qué se puede afirmar de la imagen de 3 respecto a la función inversa de f?

b. ¿Por qué las funciones que determinan parábolas no tienen inversa?

c. ¿Por qué la función $f(x) = |x|$ no tiene inversa?

Ejercitación

4 Calcula lo que se indica, si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{5-2x}$.

a. $f^{-1}(x)$ b. $f^{-1}(3)$

c. $g^{-1}(x)$ d. $g^{-1}(2)$

5 Calcula, cuando sea posible, las funciones inversas y los dominios de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$ b. $g(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

c. $h(x) = \log x$ d. $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$.

6 La composición de una función f y su inversa f^{-1} es equivalente a la función identidad; es decir, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f) = x$. Comprueba esta propiedad para cada par de funciones.

a. $f(x) = 1 - x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x}$

b. $g(x) = 2x^2 - 4$ $g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{2}}$

Resolución de problemas

7 En los países anglosajones se utiliza una escala de temperaturas diferente de la escala Celsius: la Fahrenheit. Las temperaturas expresadas en ambas escalas, Celsius (C) y Fahrenheit (F), se relacionan según esta sencilla función lineal:

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

a. ¿Cuántos grados Celsius son 41 grados Fahrenheit?

b. ¿Cuántos grados Fahrenheit son 23 grados Celsius?

c. Halla la función que permita hacer el cambio contrario, de Celsius a Fahrenheit, es decir, la función inversa de $C(F)$.

d. Representa las funciones $C(F)$ y su inversa sobre los mismos ejes.

Evaluación del aprendizaje

El costo (en dólares) de producción de x unidades de un artículo está dado por la función $C(x) = 0{,}03x + 0{,}63$.

a. Halla el costo de producir 4, 5 y 10 unidades del artículo.

b. Encuentra el número de artículos que se deben producir para que el costo de producción sea \$ 6.

c. Determina C^{-1} e interpreta su significado.

d. Halla $C^{-1}(1900)$, $C^{-1}(3400)$, $C^{-1}(16\,900)$.

e. Traza los bosquejos de las gráficas de C y C^{-1}.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11 Funciones periódicas

Saberes previos

Una cisterna vacía se llena completamente en 1 minuto, permanece llena durante 3,5 minutos y se vacía en 0,5 minutos. Traza una gráfica que muestre cómo se repite este proceso durante 20 minutos.

Analiza

Representa gráficamente la función altura del extremo del minutero de un reloj de pared con respecto al suelo, al transcurrir el tiempo, sabiendo que la altura máxima y mínima se alcanza a los 1,4 m y 1 m, respectivamente.

Conoce

En la Figura 2.49 se observa la gráfica de la función.

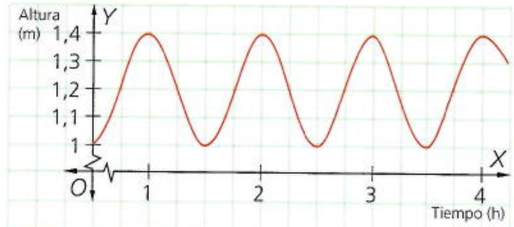


Figura 2.49

Los valores que toma esta función se repiten cada hora. Este tiempo que tarda en repetirse se denomina **periodo** y las funciones que tienen este comportamiento se llaman **funciones periódicas**.

Una función f es **periódica** si existe un número T que verifica que $f(x + T) = f(x)$, para todo x perteneciente al dominio de la función.

El menor número positivo T con esta propiedad se denomina **periodo**.

Como la gráfica de una función periódica se repite por intervalos de longitud igual al periodo, para estudiar dónde asciende o desciende, determinar si es par o impar y hallar los puntos en los que su gráfica corta los ejes, se elige un intervalo de amplitud T y se analiza allí su comportamiento. Después, se extienden las características obtenidas a todo el dominio.

Aunque las funciones periódicas por excelencia son las trigonométricas, ya que permiten describir de forma adecuada una multitud de fenómenos naturales, hay otras funciones que tienen esta propiedad.

Ejemplo 1

Observa a continuación el estudio de la gráfica de la función $f(x)$ = "Distancia de x al entero más próximo".

Esta función es periódica de periodo 1; por lo que cumple que $f(x + 1) = f(x)$ para todo x y para estudiarla basta con analizar el intervalo $[0, 1)$. En la Figura 2.50 se observa la gráfica de la función $f(x)$ en tal intervalo.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

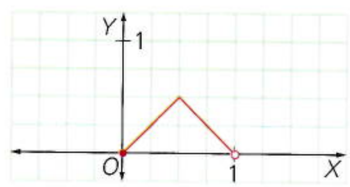


Figura 2.50

La gráfica de la función en todo $\mathbb{R}$ se representa en la Figura 251.

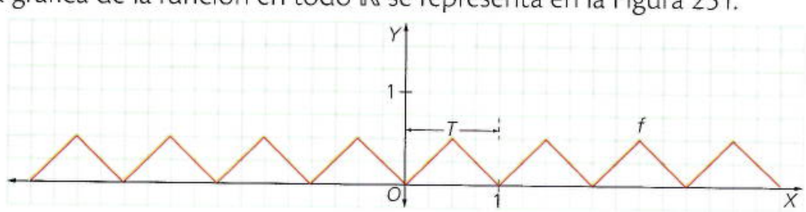


Figura 2.51

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Observa la representación de función $f(x) = (x - [x])^2$ para $x \geqslant 0$.

El periodo de esta función es $T = 1$, ya que $f(x + 1) = f(x)$. En consecuencia, se puede limitar el estudio al intervalo $[0, 1)$.

En dicho intervalo, la gráfica de la función asciende, corta cada uno de los ejes X y Y en el punto $(0, 0)$ y no es simétrica ni con respecto al eje Y (así que no es par) ni con respecto al origen (así que no es impar).

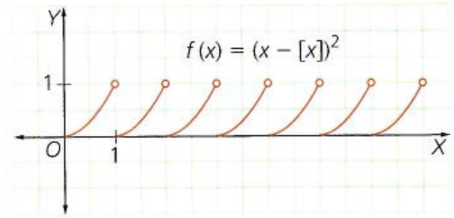


Figura 2.52

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Indica si la función de la Figura 2.53 es periódica. En caso afirmativo, determina su periodo.

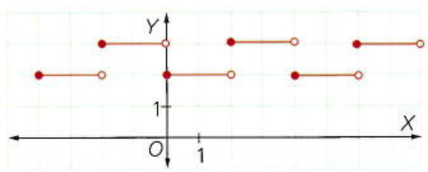


Figura 2.53

2 Observa la función periódica de periodo 5 en el intervalo $[-4, 4]$.

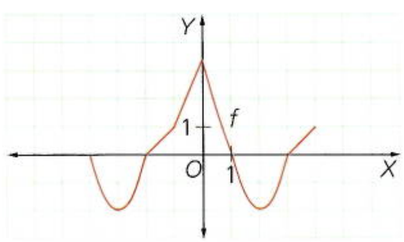


Figura 2.54

a. ¿En qué puntos del intervalo $[-10, 15]$ cortará la gráfica al eje X?

b. Estudia el signo de la función en el intervalo $[-6, 8]$.

3 La función $f(x)$ asocia a cada número real su parte decimal; por ejemplo, $f(2,6) = 0,6$; $f(-4,2) = 0,2$.

a. Dibuja su gráfica.

b. ¿Esta función es periódica? En caso afirmativo, indica su periodo.

c. ¿Cuál es su dominio?

Resolución de problemas

4 Demuestra que si una función es periódica, de periodo T, se verifica que $f(x + 3T) = f(x)$.

Evaluación del aprendizaje

En la Figura 2.55 se observa la función que describe el movimiento de un péndulo.

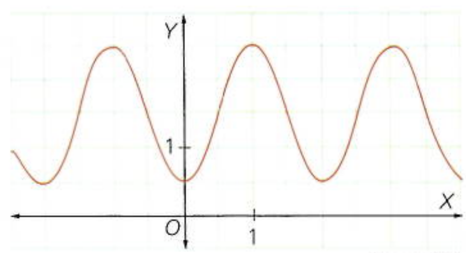


Figura 2.55

a. ¿La función que modela este movimiento es periódica? Si lo es, ¿cuál es su periodo?

b. ¿Para qué valores de t el péndulo alcanza su altura máxima?

c. ¿Para qué valores de t el péndulo alcanza su altura mínima?

Estilos de vida saludable

Cada vez que vas a dormir inicias un periodo de sueño en el que te recuperas y relajas física y mentalmente.

- Consulta en qué tiempo alcanzas una relajación mental y busca la gráfica que representa las etapas de un ciclo de sueño.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

12 Funciones trigonométricas

Saberes previos

Supongamos que una marea tiene un comportamiento periódico así: a las 0 h su altura es 0 m, va subiendo hasta alcanzar un altura de 30 cm a las 6 h; luego, baja durante las siguientes 6 horas hasta llegar a 0 m nuevamente y sigue bajando hasta llegar a una profundidad de 30 cm a las 18 h para finalmente ascender hasta llegar de nuevo a 0 m a las 24 h. Dibuja ese comportamiento y el de las siguientes 24 horas.

Analiza

Representa las funciones $f(x) = \text{sen}x$ y $g(x) = \cos x$. Analízalas y determina su periodo.

Conoce

12.1 Funciones seno y coseno

Para la función $f(x) = \text{sen}x$ se verifica que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}x$ y para la función $g(x) = \cos x$ se cumple que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$; por lo tanto, el periodo de las funciones trigonométricas seno y coseno es $T = 2\pi$ y basta representarlas en el intervalo $[0, 2\pi)$ para luego ir copiando cada trozo de la gráfica a ambos lados de dicho intervalo según el periodo.

En la Figura 2.56, la gráfica de color rojo corresponde a $f(x)$ y la de color verde corresponde a $g(x)$.

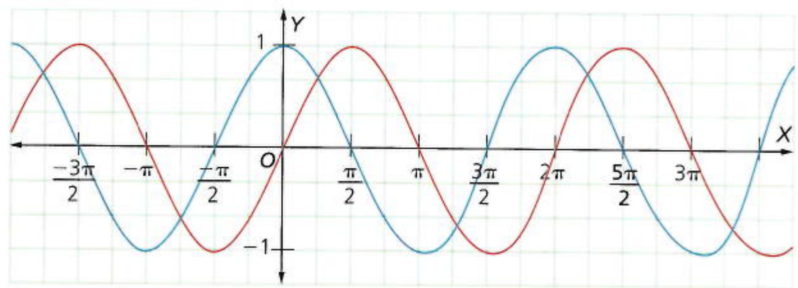


Figura 2.56

12.2 Características de las funciones seno y coseno

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $[-1, 1]$.
- La función $\text{sen}x$ es impar, ya que $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$. Como $\cos(-x) = \cos x$, coseno es una función par.
- Como $f(x) = \text{sen}x$ es periódica, entonces $(0 + 2\pi k, 0)$ y $(\pi + 2\pi k, 0)$, con k entero, son puntos de corte con el eje X.
- Como la función coseno es periódica, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 0\right)$, con k entero, son puntos de corte con el eje X.

12.3 Función tangente

- Como $\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$ no está definida cuando $\cos x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, siendo k cualquier entero porque en dichos valores se anula el denominador, entonces su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.
- El recorrido de la función tangente es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y su periodo es $T = \pi$, pues $\tan(x + \pi) = \frac{\text{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\text{sen}x}{-\cos x} = \tan x$.
- Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales.
- Es una función impar, ya que $\tan(-x) = -\tan x$.

En la Figura 2.57 se observa la gráfica de la función tangente.

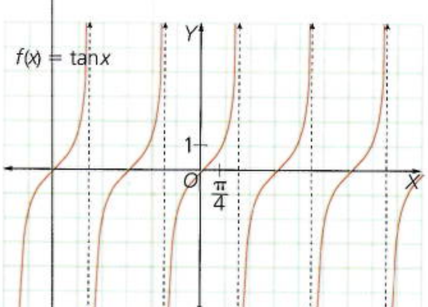


Figura 2.57

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

12.4 Función cotangente

- Como $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ no está definida cuando $\tan x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = k\pi$, siendo k cualquier entero su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.
- El recorrido de la función cotangente es $\mathbb{R}$.
- Su periodo es $T = \pi$.
- Las rectas $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son asíntotas verticales.
- Al igual que la tangente, se trata de una función impar.

La gráfica de la cotangente se observa en la Figura 2.58.

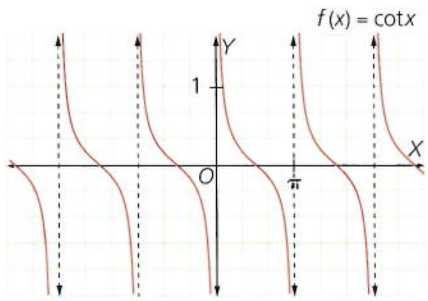


Figura 2.58

12.5 Funciones cosecante y secante

Al ser $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, las propiedades de las funciones cosecante y secante se pueden deducir a partir de las propiedades de las funciones seno y coseno, respectivamente.

- La función cosecante no está definida cuando $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = k\pi$, siendo k cualquier número entero, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.

  De forma análoga, la función secante no está definida si $\cos x = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, siendo $k \in \mathbb{Z}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$.
- El recorrido de ambas funciones es $\mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$.
- Su periodo es $T = 2\pi$.
- La función cosecante presenta asíntotas verticales en las rectas $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Las rectas $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, son asíntotas verticales de la función secante.
- Son funciones simétricas. La función cosecante es impar, como el seno, mientras la función secante es par, como el coseno. Sus gráficas se observan en las figuras 2.59 y 2.60.

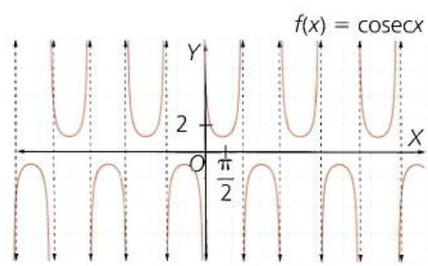


Figura 2.59

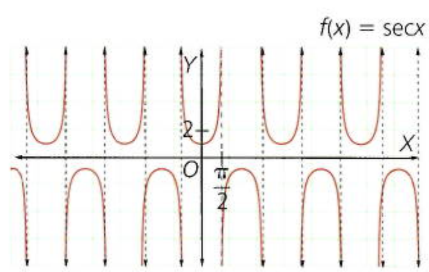


Figura 2.60

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

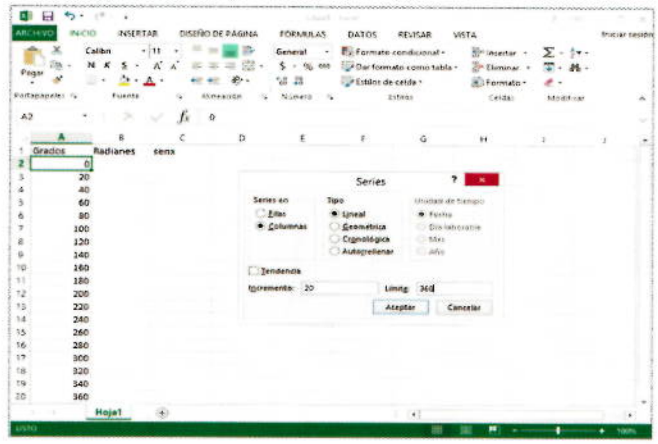
12 Funciones trigonométricas

MatemaTICS

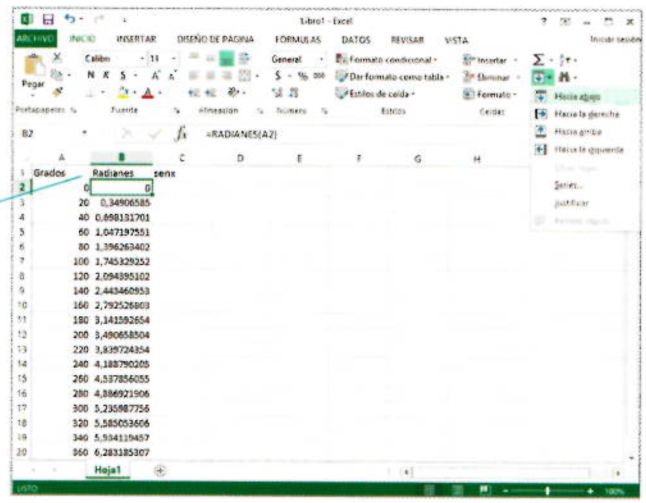
Gráficas de funciones trigonométricas en Excel

En Excel no solo es posible obtener la tabla de valores de las funciones trigonométricas, sino que puedes trazar la gráfica correspondiente. Para ello, es necesario convertir los ángulos dados en grados a radianes, debido a que Excel calcula el valor de las funciones trigonométricas para ángulos expresados en radianes.

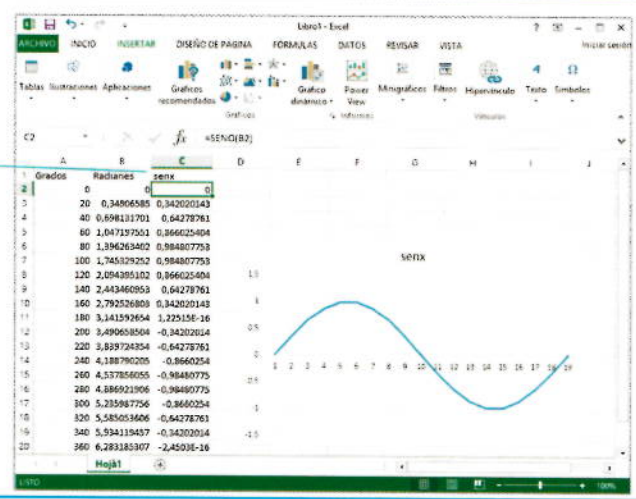
- Observa cómo trazar la gráfica de la función seno.



- Nombra las tres primeras columnas de Excel como grados, radianes y senx. Debajo de la columna de grados, ubica el número 0.
- En la pestaña Inicio haz clic en el ícono y selecciona la opción "Series". En la ventana que se despliega, selecciona columnas; en incremento escribe 20 y en límite, 360. Al dar clic en "Aceptar", aparecerán los números de 20 en 20 hasta 360.



- En la celda B2 escribe =RADIANES(A2) y pulsa Enter. Luego, selecciona las celdas desde la B2 hasta la B20, haz clic nuevamente en el ícono y selecciona "Hacia abajo".



- Después, repite el paso anterior, pero escribiendo inicialmente en la celda C2 =SENO(B2).

- Finalmente, selecciona la columna senx y, en la pestaña "Insertar", selecciona el gráfico de líneas o el de áreas.

Obtén la gráfica de la función coseno y la función tangente realizando un procedimiento similar al descrito para la función seno.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la Tabla 2.15.

x	sen$x$	sec$x$	tan$x$	cot$x$
0	0	1	0	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$			$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$			1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1			0
$\frac{2\pi}{3}$		-2		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$				
π	0	-1	0	
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		
$\frac{5\pi}{4}$		$-\sqrt{2}$	1	1
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$			$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$				0
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		-1	
$\frac{11\pi}{6}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$-\sqrt{3}$
2π	0	1	0	

Tabla 2.15

2 Determina y escribe el periodo de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \text{sen}(4x)$ b. $f(x) = \cos(5x + \pi)$

c. $f(x) = \tan\left(\frac{x}{8}\right)$ d. $f(x) = \cot(2x)$

Modelación

3 Representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas. Para ello, primero determina su dominio, su recorrido, su periodo y sus puntos de corte con los ejes.

a. $f(x) = \text{sen}(3x)$ b. $f(x) = 5\cos x$

c. $f(x) = \cot(2x)$ d. $f(x) = 2 + 3\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

e. $f(x) = \text{sen}x + \cos x$ f. $g(x) = \text{sen}x - \text{sen}2x$

Resolución de problemas

4 Sean las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = \text{sen}x$ y $h(x) = \tan x$. Indica si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) y explica por qué.

a. $f \circ g$ es una función periódica de periodo 2π. ( )

b. $g \circ f$ es una función periódica de periodo 2π. ( )

c. $f \circ h$ es una función periódica de periodo π. ( )

d. $h \circ f$ es una función periódica de periodo π. ( )

e. $f \circ f$ no es una función periódica. ( )

Evaluación del aprendizaje

Dibuja la gráfica de cada una de las siguientes funciones trigonométricas y determina su dominio, su paridad, su periodo, sus asíntotas (si las tiene) y las intersecciones con los ejes de coordenadas.

a. $f(x) = -0{,}5\text{sen}x - 0{,}5$

b. $f(x) = (\text{sen}x + \cos x)^2$

c. $f(x) = \left(\tan x - \frac{\pi}{2}\right)$

d. $f(x) = -\cot(x - \pi)$

e. $f(x) = 2|\text{sen}x| - 2$

f. $f(x) = \sec(x - \pi)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

13 Sistema de coordenadas polares

Saberes previos

Un barco que parte del punto (0, 0) se ubica en el punto (4, 4) de un plano cartesiano después de un par de horas. ¿Qué ángulo forma en ese momento con respecto al eje X?

Analiza

Halla las coordenadas polares del punto que tiene por coordenadas cartesianas $P(12, 5)$.

El valor de $\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)$ se obtiene con la calculadora empleando la tecla $\tan^{-1}$ (que suele activarse pulsando SHIFT $\tan\left(\dfrac{5}{12}\right)$). Para que la medida del ángulo aparezca en grados la calculadora debe estar en modo DEG.

Conoce

Para determinar las coordenadas polares que se denotan por (r, θ), del punto (12, 5), dado en coordenadas cartesianas, se debe ubicar el punto P, construir el triángulo rectángulo correspondiente y hallar su hipotenusa junto el ángulo que forma con el eje X. Observa la Figura 2.61.

Después de construir el triángulo, se calcula la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras.

$$r^2 = 12^2 + 5^2$$

$$r = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$r = \sqrt{169} = 13$$

Como $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$, entonces

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}6^\circ.$$

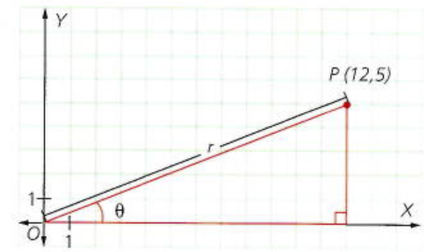


Figura 2.61

Por lo tanto, las coordenadas polares de P son $(13; 22{,}6^\circ)$ aproximadamente.

En **coordenadas polares** un punto $P(r, \theta)$ queda determinado por los números:

- r, que es la distancia del punto P al origen de coordenadas o **polo**, O.
- θ, que es el ángulo, en radianes y comprendido entre 0 y 2π, que forma el segmento OP con la parte positiva del eje X, denominado **eje polar**.

Las coordenadas del polo son $O(0, 0)$.

13.1 Conversión entre coordenadas cartesianas y polares

Si un punto tiene por coordenadas cartesianas $P(x, y)$ y por coordenadas polares $P(r, \theta)$, se puede establecer que:

$$P(r, \theta) = \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{x}{y} \end{cases} \qquad P(x, y) = \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{y} \longrightarrow x = r\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \longrightarrow y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Las primeras coordenadas se utilizan para pasar de coordenadas cartesianas a polares, y las segundas, para pasar de polares a cartesianas.

Ejemplo 1

Observa cómo se hallan las coordenadas cartesianas del punto de coordenadas polares $P(3, \pi)$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 3\cos\pi = -3 \\ y = r\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\pi = 0 \end{cases} \longrightarrow P(-3, 0)$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

13. 2 Curvas en coordenadas polares

Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas cartesianas.

Ejemplo 2

La gráfica de la ecuación polar $r = 3$ consta de todos los puntos que se encuentran a tres unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es un círculo que tiene su centro en el origen y radio 3. (Figura 2.62) Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación en coordenadas cartesianas: $x^2 + y^2 = 3^2$.

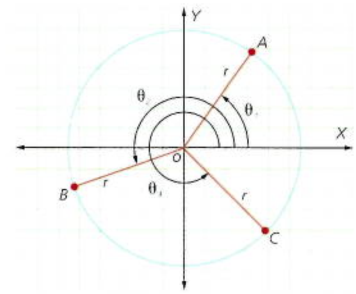


Figura 2.62

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla las coordenadas polares de los siguientes puntos que tienen coordenadas cartesianas.

a. $P\left(1, -\sqrt{3}\right)$ b. $A\ (3, 3)$

c. $C\ (-1, 0)$ d. $B\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

e. $D\left(3, -\sqrt{3}\right)$ f. $Q\left(-1, \sqrt{3}\right)$

2. Pasa a coordenadas cartesianas los puntos que tienen por coordenadas polares.

a. $P\ (3, \pi)$ b. $A\ (2, \pi)$

c. $Q\left(2, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ d. $B\left(1, \dfrac{5\pi}{3}\right)$

e. $C(0, 0)$ f. $D\left(3, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Razonamiento

3. La gráfica de la ecuación polar $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ consta de todos los puntos sobre la semirrecta que forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ con el eje X positivo.
Confirma este hecho utilizando la relación $\tan\theta = \dfrac{x}{y}$ para obtener la ecuación en coordenadas cartesianas.

4. Halla la ecuación en coordenadas cartesianas de $r = \sec\theta$. Para ello, recuerda que $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

Resolución de problemas

5. Pasa la ecuación $r = \theta$ a la forma cartesiana y traza la gráfica correspondiente.

6. Transforma la ecuación $x^2 + y^2 = 4x$ a coordenadas polares. Explica el procedimiento.

7. Determina la nueva ecuación polar de la curva $r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 8$, referida al mismo polo, pero cuando el eje polar gira un ángulo de 45°.

Evaluación del aprendizaje

i. Determina las coordenadas polares del vértice D del hexágono regular de la Figura 2.63, tomando como polo el punto $(0, 0)$ y como eje polar el rayo $OC = 1$.

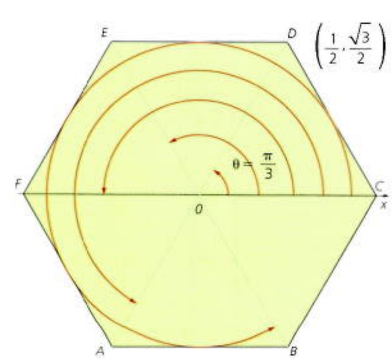


Figura 2.63

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Concepto de función

Ejercitación

1 Determina el dominio y el recorrido de la siguiente función representada en la Figura 2.64.

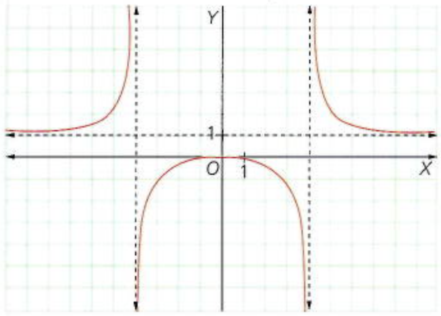


Figura 2.64

2 Determina el dominio y recorrido de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ b. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{(x - 2)}$

c. $f(x) = x^2 - x - 6$ d. $f(x) = \dfrac{(x - 1)}{x^2 - x}$

3 Representa gráficamente la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ , si } x < 0 \\ x^2 + x, \text{ si } 0 \leq x \leq 5 \\ x^3 \quad \text{ ,si } x > 0 \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes, signo y simetría de una función

Comunicación

4 Observa las funciones representadas en las figuras 2.65 y 2.66 y determina los cortes con los ejes, su signo y simetría.

a.

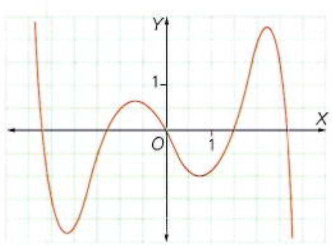


Figura 2.65

b.

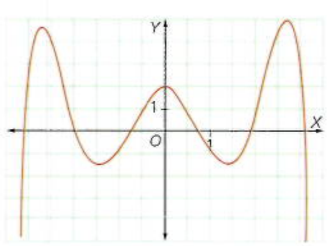


Figura 2.66

Funciones polinómicas y racionales

Ejercitación

5 Halla los puntos de corte, el dominio, el rango, la simetría y el signo de cada función.

a. $f(x) = x^2 - x - 6$

b. $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$

c. $f(x) = x^2 + 4x - 21$

d. $f(x) = x(x^2 + 6x + 9)$

6 Determina los puntos de corte, el dominio, el rango y el signo de cada función. Esboza su gráfica.

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x\,(x^2 - 6x + 5)}$

Funciones exponenciales y funciones logarítmicas

Razonamiento

7 Observa la Figura 2.67.

a. Determina el dominio y el recorrido de cada una de las funciones que se representan.

b. Halla las asíntotas de cada gráfica.

c. Escribe los puntos de corte de cada gráfica con los ejes de coordenadas.

d. Describe los intervalos donde cada gráfica asciende o desciende.

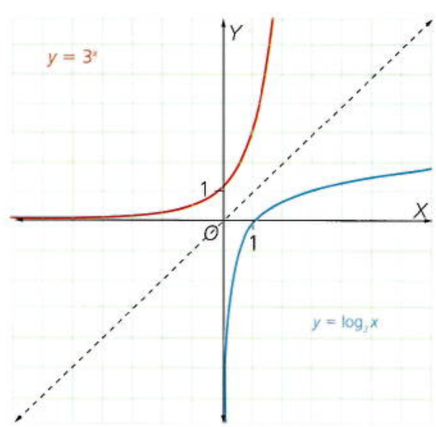


Figura 2.67

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Identificar submetas

Problema

El costo total de la producción de un artículo es de \$180 000 más \$ 2 000 por cada unidad fabricada. Si el precio de venta del artículo es de \$ 5 000, ¿cuántos artículos debe vender para no tener ni pérdida ni ganancia?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información da el enunciado?

  R: El costo total de producir un número de artículos y el precio final de venta de cada uno.

- ¿Qué debes encontrar?

  R: El número de artículos para no tener pérdidas ni ganancias.

2. Crea un plan

- Identifica cada una de las funciones involucradas y establece una relación entre ellas que permita averiguar el punto de equilibrio.

3. Ejecuta el plan

- La función costo es $C(x) = 2\,000x + 180\,000$.
- La función ingreso es $I(x) = 5\,000x$.
- La función utilidad $U(x)$ es $U(x) = I(x) - C(x)$.

$$U(x) = 5\,000x - (2\,000x + 180\,000)$$

$$U(x) = 3\,000x - 180\,000$$

Entonces, no habrá pérdidas ni ganancias cuando $U(x) = 0$.

$$U(x) = 3\,000x - 180\,000 = 0 \Rightarrow x = 60$$

Se obtiene la siguiente gráfica de las funciones costo e ingreso, representada en la Figura 2.68.

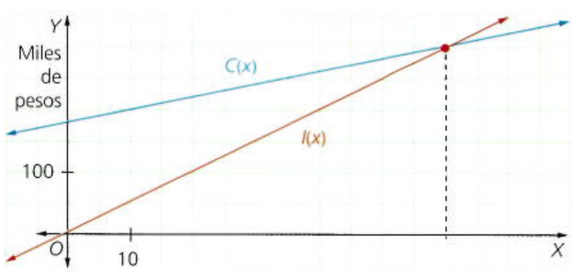


Figura 2.68

R: Debe vender 60 artículos.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que si el precio de venta de cada artículo es de \$ 6 000, el punto de equilibrio es 45.

Aplica la estrategia

1 El organizador de un evento calcula en \$ 2 000 000 los costos fijos del montaje, más \$ 5 000 por cada asistente. Si considera que el ingreso al evento debe tener un precio de \$ 10 000, ¿con cuántos asistentes debe contar como mínimo para no tener pérdidas?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2 Observa la gráfica de la Figura 2.69. y describe su dominio, su recorrido, los puntos de corte con los ejes de coordenadas. ¿Existe la inversa de esta función? Explica.

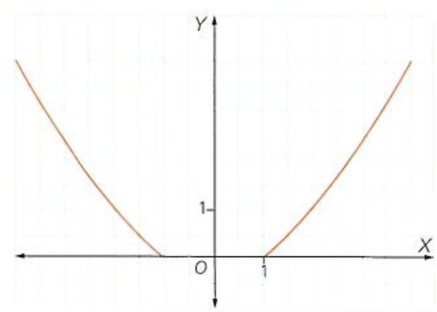


Figura 2.69

Formula problemas

3 Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

"La función x^3 es una función impar".

Enriquece tu vocabulario

- Describe qué diferencia hay entre el dominio y el recorrido de una función.

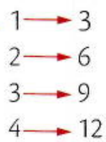
MATEMÁTICAS © LAROUSSE

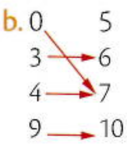
Evaluación del aprendizaje

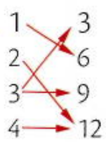
Concepto de función

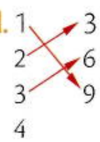
Ejercitación

1 Selecciona las relaciones que corresponden a funciones y para aquellas que lo sean halla su dominio y su recorrido. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 

b. 

c. 

d. 

Puntos de corte con los ejes y signo de una función

2 Determina los puntos de corte con los ejes y los signos de cada función. Luego, dibuja sus gráficas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = 4x^2 + 9x - 1$

c. $f(x) = 3 - x^3 + x^2$

d. $f(x) = -x^2 + 2$

Simetría

Razonamiento

3 Indica con una X si cada función es par, impar o no tiene simetría. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $f(x) = x^2 + 5x + 1$

Par | Impar | Ni par ni impar

b. $f(x) = (x - 2)^2$

Par | Impar | Ni par ni impar

c. $f(x) = 7 - x^3$

Par | Impar | Ni par ni impar

d. $f(x) = 4$

Par | Impar | Ni par ni impar

4 Clasifica las funciones dadas en pares, impares o no simétricas, a partir de su representación gráfica. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

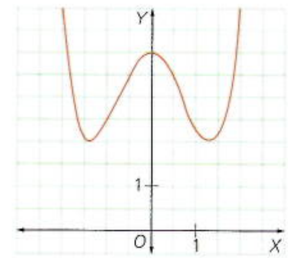


Figura 2.70

b.

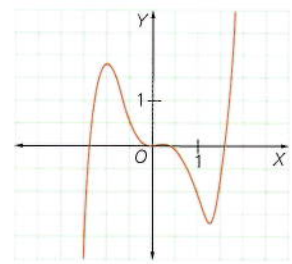


Figura 2.71

Funciones polinómicas y operaciones con funciones

Razonamiento

5 Lee las siguientes afirmaciones e indica si son verdaderas (V) o falsas (F). VERDADERO/FALSO

a. Una función polinómica está definida por un polinomio $P(x)$.

b. La suma de dos funciones polinómicas es una función polinómica.

c. El producto de dos funciones polinómicas es un polinomio de menor grado.

d. La diferencia de dos funciones polinómicas es una función polinómica de menor grado.

Funciones racionales

Comunicación

6 Une con una flecha cada función racional con su respectivo dominio. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $f(x) = \frac{2}{x}$	$\mathbb{R}$
b. $f(x) = \frac{2x^2}{x^5 - 1}$	$\mathbb{R} - \{4\}$
c. $f(x) = \frac{12 - x}{x - 4}$	$\mathbb{R} - \{1\}$
d. $f(x) = \frac{x}{2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Funciones exponenciales y funciones logarítmicas

Ejercitación

7 Completa las tablas a partir de cada expresión.

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $y = 3^x$

x	−2	0	3	4	−1
y					

Tabla 2.16

b. $y = \log_3 x$

x	−2	0	3	4	−1
y					

Tabla 2.17

c. $y = 0{,}2^x$

x	−2	−1	0	1	2
y					

Tabla 2.18

d. $y = \log_{0,2} x$

x	1	0,04	0,008	5	125
y					

Tabla 2.19

Funciones a trozos

Modelación

8 En una peluquería canina cobran el corte de pelo de acuerdo con el peso del animal. Si el perro pesa 15 libras o menos, se cobran \$ 35 000. Si pesa entre 15 y 40 libras, cobran \$ 40 000. Si pesa más de 40 libras, cobran \$ 40 000, más un adicional de \$ 2 000 por cada libra.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Escribe la función que interprete esta situación.

b. Traza la gráfica correspondiente.

Resolución de problemas

9 Una empresa de correos cobra los envíos de acuerdo con su peso así:

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Entre 0 y 0,5 kg cobra \$ 72 000; de 0,5 a menos de 1 kg cobra \$ 94 000; de 1 a menos de 1,5 cobra \$106 000; de 1,5 a menos de 2 kg cobra \$ 122 000 y de 2 a 2,5 kg inclusive cobra \$ 138 000.

a. Determina el dominio y el recorrido de la función que define los costos de envío.

b. ¿Cuánto se deberá pagar por enviar un paquete de 1,8 kg?

Función valor absoluto y función parte entera

Comunicación

10 Relaciona cada función con su gráfica.

ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a.

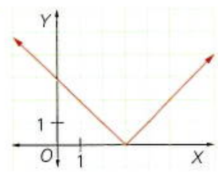


Figura 2.72

$[x]$

b.

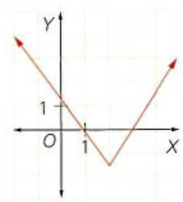


Figura 2.73

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases}$$

c.

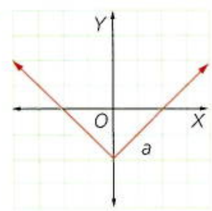


Figura 2.74

$f(x) = |x - 2| - 1$

d.

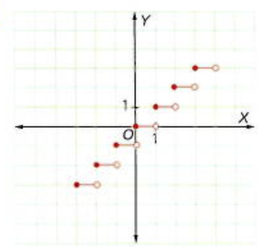


Figura 2.75

$f(x) = |x| - a, a > 0$

Funciones inversas

Razonamiento

11 Analiza la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica tus respuestas.

VERDADERO/FALSO

a. Toda función tiene función inversa.

b. Una función tiene inversa si y sólo si cada recta horizontal interseca su gráfica en exactamente un punto.

Funciones periódicas y trigonométricas

Ejercitación

12 Determina el periodo de cada función.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \text{sen}2x$

b. $f(x) = \cot\left(\frac{1}{2}x\right)$

Coordenadas polares

Ejercitación

13 Escribe en coordenadas polares la ecuación $y = x$.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Sucesiones y límites

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ya sabemos

- Seguir y completar algunas secuencias numéricas.
- Graficar funciones en el plano cartesiano.

Vamos a aprender

- A describir el comportamiento de una función alrededor de un punto y caracterizar sucesiones.

Nos sirve para

- Interpretar el comportamiento de las sucesiones y de las funciones de manera analítica.

MATEMÁTICAS © LA ROUSSE

1 Sucesiones de números reales. Monotonía y acotación

Saberes previos

Observa:

$1 + 5 = 6 \quad 6 + 5 = 11 \quad 11 + 5 = 16$

Si se continúa de esa manera, ¿se obtendrá el número 41 en algún momento?

Analiza

Lina escribió los primeros diez múltiplos de 5 y ahora quiere hallar el vigésimo, el quincuagésimo y el centésimo múltiplo de ese número.

- ¿Cómo puede hacerlo?

Conoce

Se conocen como **múltiplos** de un número a todos aquellos que resultan de la multiplicación de ese número con cada uno de los naturales. Así, los diez primeros múltiplos de 5, diferentes de 0, son {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

Para establecer una expresión que permita determinar cualquier otro múltiplo de 5, Lina podría empezar asignando a cada múltiplo una posición, como se muestra a continuación.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Tabla 3.1

Cada múltiplo está relacionado con la asignación dada, es decir, depende de su posición. Así, el primer término es 5, el segundo término es 10, el quinto término es 25. Cualquier múltiplo de 5 se puede hallar mediante la expresión $5n$, siendo n la posición del múltiplo que se desea encontrar.

Por tanto, el vigésimo término se obtiene cuando $n = 20$: $5 \cdot 20 = 100$; el quincuagésimo cuando $n = 50$: $5 \cdot 50 = 250$, y el centésimo cuando $n = 100$: $5 \cdot 100 = 500$.

El ejemplo anterior permite identificar una lista de números escritos en un orden definido: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$, en donde a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el enésimo término. Esta colección de números que guardan cierta correspondencia se denomina **sucesión**.

Una **sucesión de números reales** es una relación del conjunto de los números naturales con el conjunto de los números reales. Establecer una sucesión es encontrar una regla o **término general** que asigna a cada número natural n un único número real, a_n, conocido como **enésimo término** de la sucesión.

Muchas sucesiones quedan determinadas por su término general, a_n, que suele ser una expresión algebraica en términos de la variable indeterminada n.

Algunas veces, las sucesiones se determinan por sus primeros términos que, en ocasiones, permiten también intuir el valor del término general.

Ejemplo 1

Para encontrar los cinco primeros términos de una sucesión, se sustituye sucesivamente n por 1, 2, 3, 4 y 5 en el término general. El décimo término se encuentra al reemplazar n por 10. Para las sucesiones b_n y c_n dadas se tiene que:

Sucesión	Primeros cinco términos	Décimo término
$b_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$	$\frac{10}{11}$
$c_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.1 Sucesiones monótonas

Una sucesión a_n es **monótona creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, es decir, si cada término de la sucesión es mayor o igual que el anterior y **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para todo n.

Una sucesión a_n es **monótona decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n, es decir, si cada término de la sucesión es menor o igual que el anterior y **estrictamente decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para todo n.

Ejemplo 2

Son ejemplos de sucesiones estrictamente crecientes:

$$a_n = \frac{7n+3}{2n+1} = \left\{\frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{24}{7}, \frac{31}{9}, \frac{38}{11}, ...\right\}$$

$$a_n = 2n^{n+1} = \{2, 16, 162, 2\,048, 31\,250, ...\}$$

Esto sucede porque en ambas $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1}$, es decir, los valores de los términos de cada sucesión aumentan progresivamente.

Son ejemplos de sucesiones decrecientes:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, ...\right\}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \left\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{5}, ...\right\}$$

Esto sucede porque en ambas $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{n+1}$, es decir, los valores de los términos de la sucesión disminuyen progresivamente.

Ejemplo 3

Para mostrar que $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ es una sucesión estrictamente decreciente, debe probarse que $a_n > a_{n+1}$ para todo número natural n; esto significa que:

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

En efecto, puesto que $(n+1)^2 > n^2 + 1$ y ambos son positivos; entonces, por las propiedades de las desigualdades:

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

Luego, $a_n > a_{n+1}$, así que a_n es estrictamente decreciente.

Ejemplo 4

La sucesión $a_n = 1^n = \{1, 1, 1, 1, 1, ...\}$ es una sucesión **constante**, ya que todos sus términos son iguales, es decir, $a_n = a_{n+1}$ para todo n.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.2 Sucesiones acotadas

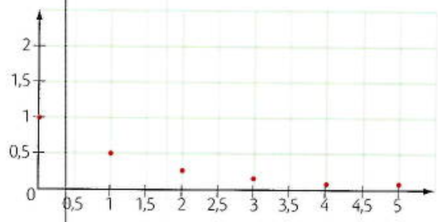


Figura 3.1

Una **sucesión** está **acotada superiormente** si existe algún número real mayor o igual que todos los términos de la sucesión. Es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a_n \leq M \text{ para todo } n.$$

Una **sucesión** está **acotada inferiormente** si existe algún número real menor o igual que todos los términos de la sucesión. Es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a_n \geq m \text{ para todo } n.$$

Una **sucesión** acotada superior e inferiormente a la vez se dice que es **acotada**.

La Figura 3.1 corresponde a la representación gráfica de una sucesión acotada.

Ejemplo 5

- La sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\right\}$ es una sucesión acotada, puesto que $0 < a_n \leq 1$. Una cota superior de la sucesión es 1 y una inferior es 0.
- Para $a_n = \dfrac{5}{n+1} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, 1, \frac{5}{6}, ...\right\}$, se tiene que $0 < a_n \leq 5$ para todo n. Así, una cota superior de la sucesión es 5 y una inferior es 0.
- La sucesión $a_n = 2n + 1 = \{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$ es acotada inferiormente por $m = 3$, pero no tiene una cota superior.

Ejemplo 6

Se quiere demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{2n+3}{n+3}$ es acotada superiormente y monótona creciente.

Para demostrar que es acotada superiormente, se debe encontrar un número real M que sea mayor o igual que todos los a_n:

$$a_n = \frac{2n+3}{n+3} < \frac{2n+3+3}{n+3} = \frac{2(n+3)}{n+3} = 2 \Rightarrow$$ Por tanto, el número buscado puede ser $M = 2$.

Para demostrar que es creciente, se debe comprobar que $a_n \leqslant a_{n+1}$, para cualquier valor de n. Pero eso es equivalente a comprobar que $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$, para cualquier n:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+3} - \frac{2n+3}{n+3} = \frac{(2n+5)(n+3) - (2n+3)(n+4)}{(n+4)+(n+3)}$$

$$= \frac{3}{(n+4)(n+3)} \geqslant 0$$ pues tanto el numerador como el denominador son siempre positivos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encuentra los primeros cinco términos de cada sucesión.

a. $a_n = 3n - 2$ b. $a_n = \frac{1}{3n}$

c. $a_n = \frac{1}{n+1}$ d. $a_n = n^2 + 2$

e. $a_n = \frac{2}{2n+1}$ f. $a_n = \frac{2n^2}{3}$

2 Halla el término general para cada una de las siguientes sucesiones.

a. $a_n = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

b. $a_n = \{1, 4, 9, 16, ...\}$

c. $a_n = \{4, 8, 12, 16, ...\}$

d. $a_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\right\}$

e. $a_n = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, ...\right\}$

f. $a_n = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{11}, \frac{4}{18}, ...\right\}$

3 Encuentra los primeros cuatro términos y el décimo término de cada sucesión.

a. $a_n = \frac{7 - 4n^2}{3 + 2n^2}$ b. $a_n = \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$

c. $a_n = 1 - \frac{2}{n}$ d. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$

e. $a_n = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ f. $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$

g. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ h. $a_n = (-1)^n\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

4 Encuentra los cinco primeros términos de cada sucesión dada: $a_n = \frac{n+1}{n-1}$, $b_n = \frac{1}{2n+1}$ y $c_n = \frac{n}{5n}$.

a. a_n b. b_n

c. c_n d. $a_n + b_n$

e. $a_n + c_n$ f. $b_n + c_n$

g. $a_n \cdot b_n$ h. $b_n \cdot c_n$

Razonamiento

5 Clasifica las siguientes sucesiones en crecientes, decrecientes o constantes.

a. $a_n = 2^n$ b. $a_n = 1 - n$

c. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ d. $a_n = (-1)^n \cdot n$

6 Determina formalmente cuáles sucesiones son crecientes y cuáles no.

a. $a_n = n - 1$ b. $a_n = \frac{3}{n}$

c. $a_n = \frac{10-1}{2n^{n-1}}$ d. $a_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n}{(n+1)^3}$

Resolución de problemas

7 Después de una operación de rodilla, Mario debe comenzar una rutina de ejercicios y aumentar gradualmente el ritmo. El médico le sugiere trotar doce minutos diariamente durante la primera semana. En las semanas posteriores debe incrementar el tiempo seis minutos con respecto a la semana anterior. ¿En cuántas semanas Mario llegará a entrenar 60 minutos diarios?

Evaluación del aprendizaje

✓ Halla los primeros cinco términos de cada sucesión y clasifícala de acuerdo con su monotonía.

a. $a_n = 2n + 3$ b. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

c. $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ d. $a_n = \frac{\text{sen}(n)}{2}$

e. $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ f. $a_n = \frac{n}{2}$

Estilos de vida saludable

Para una relación huésped – parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de parásitos es p, con $p(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x + 1}$.

- ¿Qué sucede con el número de parásitos cuando la densidad de huéspedes es muy grande?
- ¿Cómo evitas el contacto con parásitos?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Límite de una sucesión. Convergencia de sucesiones

Saberes previos

Al ejercitar un músculo, éste aumenta 3 milímetros el primer día. Además, el incremento de cada día es igual a 0,95 del incremento del día anterior. ¿Cuál será el incremento total al final del día 18?

Analiza

Un minero encuentra una muestra de mineral que contiene 500 mg de material radioactivo. Ese material tiene una vida media de un día, lo que significa que al final de cada día, queda la mitad de este.

- Halla la cantidad de material radioactivo al comienzo del séptimo día.

Conoce

Si $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ corresponde a la cantidad de material al comienzo del día, entonces:

$a_1 = 500$ mg $\quad a_2 = 250$ mg $\quad a_3 = 125$ mg $\quad a_4 = 62{,}5$ mg

$a_5 = 31{,}25$ mg $\quad a_6 = 15{,}625$ mg $\quad a_7 = 7{,}8125$ mg

A medida que pasan los días, la cantidad de material radioactivo sigue disminuyendo hasta casi desaparecer, pero nunca llega a ser 0 mg.

2.1 Sucesiones convergentes

Sea a_n una sucesión en $\mathbb{R}$. Se dice que a_n converge a L, si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N$, $|a_n - L| < \varepsilon$.

Entonces y sólo entonces se dice que L es el límite de la sucesión a_n cuando $n \to \infty$; esto es, $a_n \to L$ cuando $n \to \infty$ o simplemente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Es decir, el límite de la sucesión a_n es el número real L si, para cualquier entorno de centro L y radio ε tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un término de la sucesión tal que, a partir de este, todos los términos de la sucesión pertenecen al entorno (Figura 3.2).

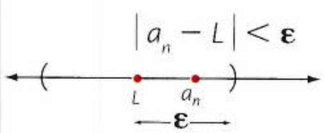


Figura 3.2

Ejemplo 1

Observa cómo se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, es decir que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0.

Sea $\varepsilon > 0$, ¿Para qué valor de n es cierto que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$?

Para $n > \frac{1}{\varepsilon}$, es decir, para cualquier número positivo ε, hay un número $N = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n > N$.

En la Figura 3.3 se observa que cuando n crece, los términos se acercan progresivamente a 0.

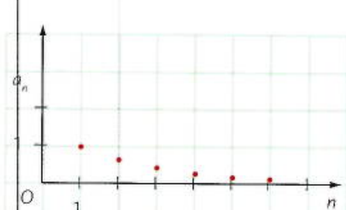


Figura 3.3

2.2 Sucesiones divergentes

Una sucesión a_n es **divergente** si su límite es $+\infty$ o $-\infty$. En este caso, se dice que a_n diverge hacia $+\infty$ o $-\infty$.

Que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M existe un número entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $a_n > M$.

Ejemplo 2

Si a_n es una sucesión divergente con $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\frac{1}{a_n}$ converge a 0. Para demostrar esta afirmación, se fija $\varepsilon > 0$.

Para $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,, entonces $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Como $\varepsilon > \frac{1}{a_n}$ y por definición $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, la sucesión converge a cero.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 3

Los términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n^2$ crecen indefinidamente a medida que n también lo hace. Así, a_n no se acerca a un $L \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\lim_{n \to \infty}(1 + 2n^2) = +\infty$.

La sucesión $a_n = 1 + 2n^2$ es divergente (Figura 3.4).

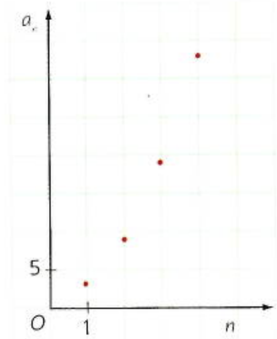


Figura 3.4

2.3 Otras sucesiones

Existen sucesiones que ni son convergentes a un número ni son divergentes hacia $+\infty$ o $-\infty$. Estas reciben el nombre de **sucesiones alternantes**.

Ejemplo 4

$a_n = (-1)^n$ es una sucesión que oscila entre -1 y 1 (Figura 3.5), es decir, ni converge ni diverge, alterna entre los valores dados.

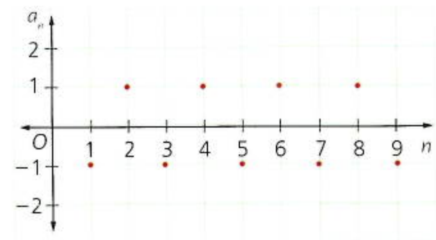


Figura 3.5

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el término general de cada una de las siguientes sucesiones. Clasifícalas como convergentes, divergentes o ninguna de estas.

a. $-3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

b. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

c. $3, -2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$

d. $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{24}, \frac{11}{48}, \frac{13}{96}, \ldots$

e. $-4, 9, -16, 25, -36, \ldots$

2 Resuelve lo que se indica si $a_n = 3 + \frac{1}{n}$.

a. Halla sus primeros 10 términos.

b. Dibuja en el pano cartesiano los 10 puntos que encontraste en el literal a.

c. Demuestra que a_n converge a 3.

Resolución de problemas

3 Dada la sucesión definida por recurrencia de la siguiente manera:

$$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$$

Decide si es convergente.

Evaluación del aprendizaje

Encuentra los cuatro primeros términos de cada sucesión e indica si es convergente, divergente o ninguna de las dos.

a. $a_n = 2^n$

b. $a_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$

c. $a_n = 3 - \frac{1}{n+1}$

d. $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$

e. $a_n = \frac{(-2)^n}{2^n}$

f. $a_n = \frac{(-n)^2}{n + 1}$

g. $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

h. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

Educación ambiental

Si el porcentaje de contenido de oxígeno después de t días de tirar basura orgánica en un estanque está dado por $p(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$ con respecto al nivel normal. ¿Qué ocurre con ese porcentaje cuando t aumenta toma valores tan grandes como se quiera? ¿Cómo crees que se puede acelerar este aumento?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Propiedades de los límites de sucesiones

Saberes previos

¿Si se suman dos sucesiones divergentes, se obtendrá otra sucesión divergente? Si consideras que no es así, muestra un ejemplo que apoye tu respuesta.

Analiza

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right)$$

Conoce

En la sucesión $a_n=\dfrac{n^2-1}{2n^2}=\left\{0, \dfrac{3}{8}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{15}{32}, \dfrac{12}{25}, \dfrac{35}{72}, ..., \dfrac{99}{200}, ...\right\}$, cuando n crece, los términos se acercan progresivamente a $\frac{1}{2}$. Si se usa la calculadora para hallar la expresión decimal de cada uno de los anteriores términos se puede evidenciar esta tendencia: {0, 0,38, 0,44, 0,47, 0,48, 0,49, ... , 0,495,...}.

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3.1 Álgebra de límites

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(k\cdot a_n)=k\cdot a;\ k\in\mathbb{R}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n}=\sqrt[p]{a}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$, siempre que $b\neq 0$

f. $\lim\limits_{n\to\infty}k^{a_n}=k^a$

g. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

h. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right)=a^b$

i. $\lim\limits_{n\to\infty}k=k$, esto es, el límite de una sucesión constante $a_n=k$ es la misma constante.

Además, si dos sucesiones son divergentes hacia $+\infty$, la sucesión formada por la suma de los términos de ambas también diverge hacia $+\infty$, es decir:

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \text{ y } \lim_{n\to\infty} b_n=+\infty, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplican las propiedades anteriores para evaluar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}$. En este caso no se puede aplicar el límite del cociente puesto que las sucesiones del numerador y del denominador no convergen. Sin embargo se pueden transformar así:

$$\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}=\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

Se factorizó n^2 y se simplificó.

Al aplicar la propiedad e. se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{3+0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla los primeros cinco términos de cada sucesión.

a. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ b. $a_n = 2^{-n}$

c. $a_n = -\dfrac{1}{2}n$ d. $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

e. $a_n = (-1)^n \cdot n$ f. $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$

2 Evalúa los límites de las siguientes sucesiones.

a. $a_n = \dfrac{n}{3n+1}$ b. $a_n = \dfrac{4n+1}{n+2}$

c. $a_n = \dfrac{4n-1}{n+2}$ d. $a_n = \dfrac{50n+20}{n^2-1}$

e. $a_n = \dfrac{5n^2+1}{n^2-2n+3}$ f. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$

g. $a_n = \dfrac{3^{n+1}+1}{3^n}$ h. $a_n = \dfrac{5^n-8}{4^n}$

i. $a_n = \dfrac{2^{n-1}+3^{n-1}}{3^n}$ j. $a_n = 2^{-n}$

3 Halla los términos a_{20}, a_{50} y a_{100} de cada una de las siguientes sucesiones. Usa la calculadora cuando sea necesario.

a. $a_n = \dfrac{2^{n-1}+2^n+2^{n+1}}{2^n}$ b. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

c. $a_n = \dfrac{3\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{3\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}$ d. $a_n = \dfrac{3n^2+5^n+2^{-n}}{2n^2}$

e. $a_n = 2 + 0{,}8^n$ f. $a_n = \dfrac{2n^3-n^2+1}{7n^3+n-3}$

g. $a_n = \dfrac{e^n}{2^n}$ h. $a_n = \sqrt{n(n+2)} - n$

Ejercitación

4 Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{n^2-2}$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-5n-1}{9n^2+2}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{5n^2-8n+6}$ d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+1}{n^3+3n^2}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{2n+6}{3n+1}\right)$ f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-7n^3+5n^2-2n}{4n^3-2n^2+1}$

Razonamiento

5 Indica cuál es el error, si existe, en el cálculo de este límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{7 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{7+0} = \frac{3}{7}$$

Resolución de problemas

6 Calcula los límites dadas las siguientes sucesiones.

$$a_n = \frac{3n+1}{n} \qquad b_n = \frac{n^2+1}{n^3}$$

a. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n)$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}a_n + 5b_n\right)$ d. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ f. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3b_n}{a_n}\right)$

7 Explica el comportamiento de la sucesión a_n. ¿Depende ese comportamiento del valor de a?

$$a_n = \frac{n^2-an+2}{n^2+an+2}$$

Evaluación del aprendizaje

¿Es posible aplicar las propiedades que se mostraron al inicio de este tema para hallar los siguientes límites? Si es así, calcúlalos.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n^2+5n-7}{7n^2-n-1}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-16n+30}{3n^2+n-144}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Indeterminaciones en el cálculo de límites de sucesiones

Saberes previos

Javier y Laura se encuentran a una distancia de 10 metros. Javier avanza la mitad de esa distancia y Laura retrocede la cuarta parte. Después, Javier avanza de nuevo la mitad de la distancia que lo separa de Laura y esta retrocede la cuarta parte. ¿Llegarán a encontrarse en algún momento?

Analiza

Los fractales son objetos geométricos que se generan luego de infinitas iteraciones, donde el mismo patrón de crecimiento se repite a diferentes escalas.

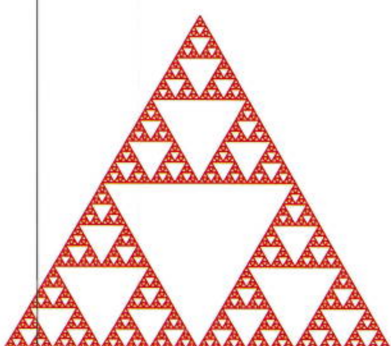


Figura 3.6

El perímetro del fractal anterior, denominado triángulo de Sierpinski, está dado por la sucesión

$$a_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

- Calcula el perímetro de todos los triángulos generados cuando el número de lados (n) tiende al infinito.

Conoce

Al calcular el límite de la sucesión cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

Luego, se concluye que el perímetro de todos los triángulos generados no converge a un número y por ende no se puede calcular, es decir, su valor diverge.

Para **calcular el límite de una sucesión**, se aplican las propiedades de los límites. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no siempre se pueden aplicar las propiedades y es necesario buscar técnicas particulares para eliminar indeterminaciones, aunque en algunos casos esto puede no ser posible.

El límite de una sucesión, en la que el término general es un polinomio en n, es $+\infty$ si el coeficiente de mayor grado de dicho polinomio es positivo y $-\infty$, si es negativo.

4.1 Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando una sucesión es un cociente de polinomios y resulta la **indeterminación** $\frac{\infty}{\infty}$, su límite se calcula dividiendo tanto el numerador como el denominador entre el término de mayor grado.

Ejemplo 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^5-2n}{n^5-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^5}{n^5}-\frac{2n}{n^5}}{\frac{n^5}{n^5}-\frac{n^2}{n^5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n^4}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

4.2 Indeterminación $\infty - \infty$

Si dos sucesiones son enteras, se factoriza la potencia de mayor exponente; si son racionales, se llevan a común denominador; y si poseen radicales, se multiplica y divide por el conjugado de la expresión, para verificar la indeterminación o eliminarla.

Ejemplo 2

- $\lim_{n\to\infty} 3n^6 - 8n^2 = \lim_{n\to\infty} n^6\left(3-\frac{8}{n^4}\right) = \infty$
- $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{n-4}-\frac{n^2}{n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5(n-2)-n^2(n-4)}{(n-2)(n-4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6-2n^5-n^3+4n^2}{n^2-6n+8}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^6}{n^6}-\frac{2n^5}{n^6}-\frac{n^3}{n^6}+\frac{4n^2}{n^6}}{\frac{n^2}{n^6}-\frac{6n}{n^6}+\frac{8}{n^6}} = \frac{1}{0} = \infty$$
- $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4.3 Indeterminación 1^{∞}

Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, se aplica la expresión

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n (a_n - 1)}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n^3-2n^2-n-2}{n^3+2n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Determina el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{n\to-\infty} n^3$

b. $\lim\limits_{n\to-\infty} \left(n^3 - 2n^2\right)$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$

d. $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{n}{n^2}$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3n+5}$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{n^2+1}$

2 Lee y resuelve. Las siguientes sucesiones definidas como funciones adquieren el valor dado cuando $n \to \infty$:

$f(n) \to 1 \quad g(n) \to +\infty \quad h(n) \to 0 \quad k(n) \to -\infty$

Indica cuáles operaciones son indeterminaciones. En caso de serlo, señala de qué tipo son. Si no lo son, halla sus límites.

a. $f(n) + h(n)$

b. $f(n) \cdot g(n)$

c. $g(n) + k(n)$

d. $k(n) - h(n)$

Resolución de problemas

3 En cierto país, se analizó la tasa de fecundidad y se dedujo que el número de hijos que tiene una mujer es inferior a la cantidad de hijos procreados en décadas pasadas. Según los estudios, el número de hijos $f(t)$ puede definirse mediante el modelo:

$$f(t) = \frac{3t^2+1}{2t^2+3}$$

Donde t es el número de años.

¿A qué valor tiende el número de hijos cuando el tiempo crece tanto como se quiera?

Evaluación del aprendizaje

Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4n}{n^3-1}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2}\right)$

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{2n}$

g. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$

Estilos de vida saludable

El porcentaje que describe la cantidad de mercurio en la sangre como efecto de consumir x gramos de atún, viene dado por la relación $p(x) = \dfrac{x^2+5t+6}{x^2+x+1}$, con P expresado en %.

¿Qué ocurre a medida que la cantidad de atún consumido aumenta? Averigua los efectos del mercurio en la salud de las personas.

MATEMÁTICAS © LA ROUSSE

5 Límite de una función en un punto

Saberes previos

La longitud l (cm) de una barra metálica varía con la temperatura T (°C) de acuerdo con la función:

$l(T) = 30{,}5 + 0{,}025T$.

- ¿Cuál es longitud de la barra cuando $T = 24{,}9$ °C y cuando $T = 25{,}1$ °C?

Analiza

Una esfera rueda sobre una rampa tal como se observa en la Figura 3.7.

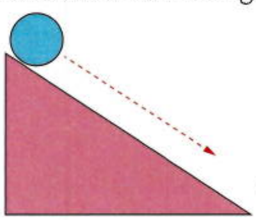


Figura 3.7

Se sabe que la velocidad promedio de la esfera está dada por la expresión:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{t^2 - 5^2}{t - 5} \text{ m/s}$$

- Determina la velocidad media de la esfera en los instantes:

  a. $t = 4{,}9$ b. $t = 5{,}1$

- ¿Qué se puede concluir con respecto a la velocidad instantánea en $t = 5$?

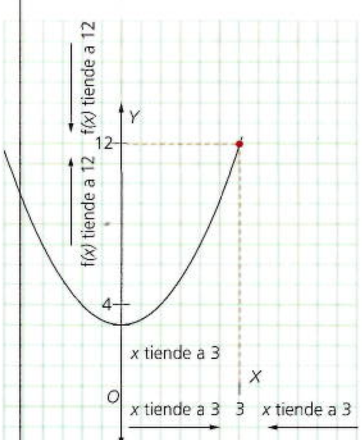


Figura 3.8

Conoce

Se define la **velocidad instantánea** o simplemente velocidad como el **límite de la velocidad media** cuando el intervalo de tiempo considerado tiende a 0.

La velocidad media de un cuerpo viene dada por la expresión $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, donde Δs es el vector desplazamiento y Δt es el intervalo de tiempo. Su velocidad instantánea es $\lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{t \to 0} \frac{s}{t}$; es decir, cuando se analiza la velocidad media en un intervalo infinitamente pequeño.

Para la situación planteada en el Analiza, al reemplazar cada valor de t en la ecuación se tiene que las velocidades medias v_{m_1} y v_{m_2} para $t = 4{,}9$ y $t = 5{,}1$ son respectivamente:

$$v_{m_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(4{,}9)^2 - 5^2}{(4{,}9) - 5} = 9{,}9 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v_{m_2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(5{,}1)^2 - 5^2}{(5{,}1) - 5} = 10{,}1 \text{ m/s}.$$

Para hallar la velocidad instantánea para $t = 5$, se debe calcular $\lim_{\Delta t \to 5} v_m = \lim_{t \to 5} \frac{t^2 - 5^5}{t - 5}$.

Una tabla para valores muy próximos a $t = 5$ tanto por su izquierda como por su derecha, será útil para calcular esa velocidad instantánea.

(s)	4,5	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1	5,5
(m/s)	9,5	9,9	9,99	9,999	10,001	10,01	10,1	10,5

Tabla 3.2

Para valores muy próximos a $t = 5$, la velocidad se acerca cada vez más a 10 m/s.

Se escribe entonces: $\lim_{t \to 5} \frac{t^2 - 5^5}{t - 5} = 10$ m/s

La expresión $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (que se lee el **límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es b**) quiere decir que si x toma valores próximos al número a, los correspondientes valores de $f(x)$ se aproximan al número b.

Para que el límite de una función en $x = a$ sea b, no hace falta saber lo que ocurre exactamente en dicho punto, pero sí lo que ocurre a su alrededor.

Ejemplo 1

La Figura 3.8 corresponde a la gráfica de la función $x^2 + 3$. En ella se puede ver que entre más cerca se encuentren de 3 los valores de x, los valores de $f(x)$ se encuentran más cercanos a 12. Esto mismo se identifica en la Tabla 3.3.

x	2,5	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	9,5	11,41	11,9401	11,994001	12,006001	12,0601	12,61	15,25

Tabla 3.3

Así, $\lim_{x \to 3} (x^2 + 3) = 12$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5.1 Límites laterales

Para que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, debe cumplirse que los límites laterales, es decir, el **límite lateral por la izquierda** y el **límite lateral por la derecha**, satisfacen, respectivamente que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \qquad\qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

En otras palabras, tanto para los valores de x que se acercan a a por la derecha, como para los que se acercan por la izquierda, los valores de $f(x)$ se debe acercar a b.

Ejemplo 2

En la gráfica de $y = f(x)$ en la Figura 3.9 se tiene que:

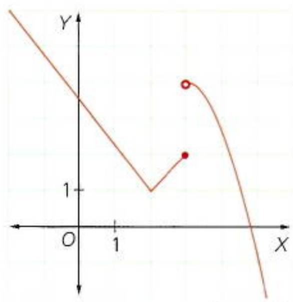


Figura 3.9

a. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$

b. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$

c. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe, ya que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

Ejemplo 3

En la Figura 3.10 aparece la gráfica de $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en la que para todo $x < 0$ la imagen es -1, mientras que para todo $x > 0$, la imagen es 1, así que la gráfica presenta un "salto" en $x = 0$ y entonces las imágenes no se acercan a un mismo valor. En este caso el límite no existe. La Tabla 3.4 muestra el comportamiento de la función a la derecha e izquierda de $x = 0$.

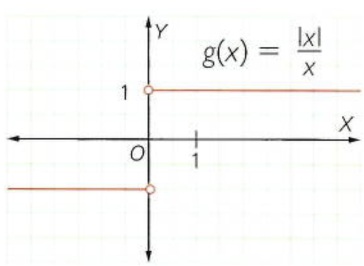


Figura 3.10

x	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0,001	0,01	0,1	0,5
g(x)	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Tabla 3.4

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Límite de una función en un punto

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la tabla de valores para cada función. Luego, utiliza el resultado para estimar el límite.

a. $\lim\limits_{x \to 4} x - 3$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.5

b. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9}$

x	8,9	8,99	8,999	9	9,001	9,01	9,1
$f(x)$							

Tabla 3.6

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$							

Tabla 3.7

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	−1	−0,1	−0,01	0	0,01	0,1	1
$f(x)$							

Tabla 3.8

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{6}}{x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$							

Tabla 3.9

2 Elabora una tabla de valores para cada función y utiliza el resultado para estimar el límite.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 - x}}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}}$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

e. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

f. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^6 - 1}$

g. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

h. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

Razonamiento

3 Observa cada gráfica. Encuentra, si existe, el límite que se pide. Si no existe, explica la razón.

a. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 3$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

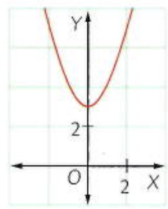


Figura 3.11

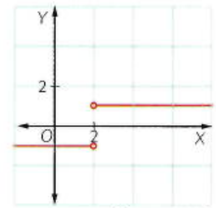


Figura 3.12

4 Determina el valor de cada límite a partir de la gráfica de $f(x)$ que se muestra en la Figura 3.13.

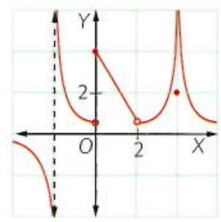


Figura 3.13

a. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

f. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

5 Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 \text{ si } x < 2 \\ 4x + 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

Determina si existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

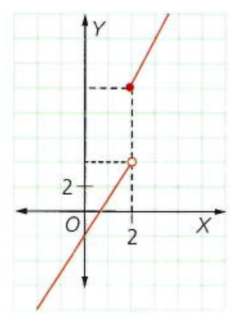


Figura 3.14

6 Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} -x + 5 \text{ si } \leq -2 \\ x^2 + 3 \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

Determina si existe el $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$.

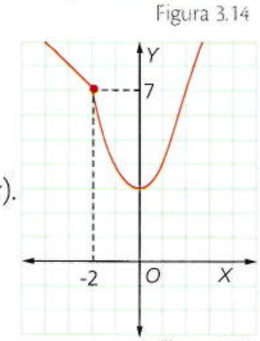


Figura 3.15

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

7 Sea la función cuya gráfica y expresión analítica se muestran a en la Figura 3.16.

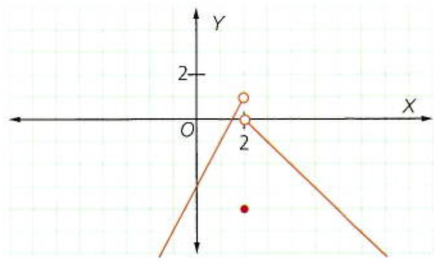


Figura 3.16

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ si } x < 2 \\ -4 \quad\ \text{ si } x = 2 \\ -x + 2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

¿Qué se puede afirmar del límite de la función cuando x se aproxima a 2?

8 Observa las gráficas de algunas funciones a trozos, halla los límites laterales que se piden y obtén una conclusión acerca del límite general.

a.

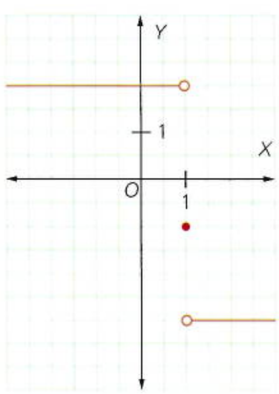


Figura 3.17

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b.

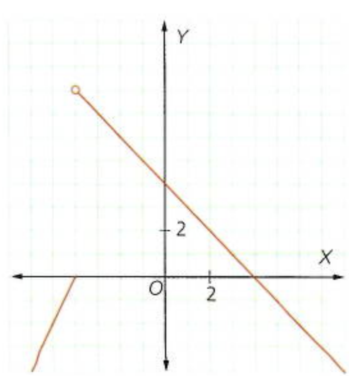


Figura 3.18

$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to -4} f(x)$

9 Observa la gráfica y completa cada enunciado.

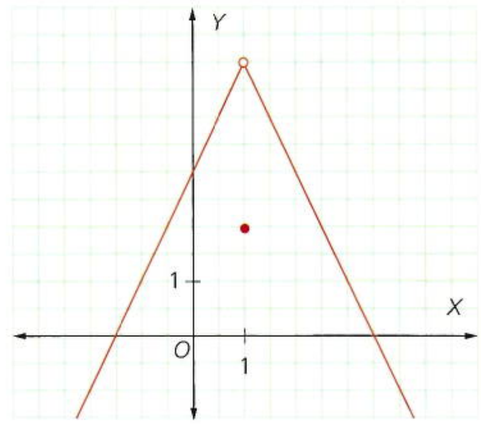


Figura 3.19

a. ¿Existe $f(1)$?

b. ¿A qué es igual $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$?

c. ¿A qué es igual $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$?

d. ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

Resolución de problemas

10 ¿Es siempre 0 la velocidad instantánea de una esfera cuando rueda hacia abajo en una rampa? Justifica tu respuesta.

11 Una persona deja caer un objeto desde una altura de $16t^2$ metros durante t segundos. Determina:

a. La velocidad promedio durante los primeros 3 segundos de la caída.

b. La velocidad instantánea en $t = 3$.

Evaluación del aprendizaje

Decide si el límite indicado para cada función existe. Justifica tu respuesta.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8 - 2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \geq 4 \end{cases} \quad \lim\limits_{x \to 4} f(x)$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Límites infinitos

Saberes previos

¿Qué ocurre si se divide a 1 consecutivamente entre 0,1; 0,001; 0,0001? ¿El valor que se obtiene aumenta o disminuye? Explica.

Analiza

Juan afirma que, al reemplazar x por valores cada vez más próximos a 4, la función $f(x) = \frac{3}{x-4}$ crece o decrece indefinidamente.

- ¿Es cierto lo que dice Juan?

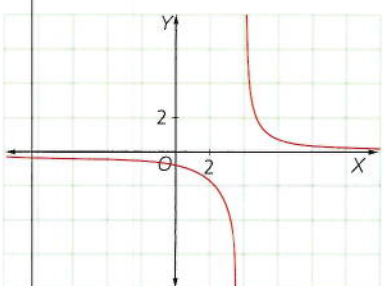


Figura 3.20

Conoce

Para saber si Juan tiene razón, se pueden tomar algunos valores cercanos a 4. Observa:

$f(3{,}9) = -30 \quad f(3{,}9999) = -30\,000 \quad f(4{,}0001) = 30\,000 \quad f(4{,}001) = 3\,000$

La afirmación de Juan es correcta, la función f decrece de manera indefinida mientras x se aproxima a 3 por la izquierda y crece de la misma forma mientras x se aproxima a 3 por la derecha. Juan construyó una tabla con los valores que obtuvo y luego trazó el bosquejo de la gráfica correspondiente. (Figura 3.20).

Juan observó que a medida que x tomaba valores muy próximos a 4 por la izquierda, los valores de $f(x)$ se hacían cada vez más y más pequeños y que, por otro lado, mientras x se acercaba mucho a x por la derecha, los valores de $f(x)$ crecían indefinidamente.

La expresión $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se lee como **el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al punto a es $+\infty$**, e indica que cuando los valores de la variable independiente x se acercan cada vez más al punto a, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes.

De la misma forma, se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si se verifica que, cuando los valores de la variable independiente x se acercan cada vez más al punto a, los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente pequeños.

Para expresar que los límites por la derecha alrededor de un punto a son $+\infty$ o $-\infty$ se usan las notaciones:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, respectivamente.

Para indicar que los límites por la izquierda alrededor de un punto a son $+\infty$ o $-\infty$ se emplean las notaciones:

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, respectivamente.

Para escribir mediante límites el comportamiento de la función que construyó Juan (en el caso de la situación planteada en la sección Analiza) se escribe:

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$.

Ejemplo 1

A continuación se estudian los límites infinitos de la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Como se observa en la Figura 3.21, cuando x se acerca a 1, tanto por la derecha como por la izquierda, la función crece indefinidamente y sin cota.

Esto se resume mediante los siguientes límites:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

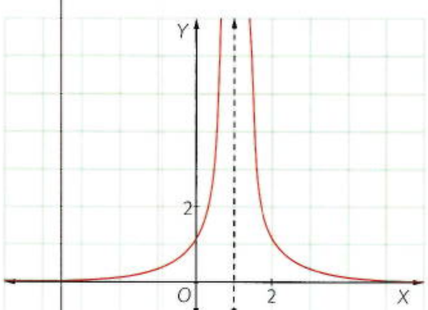


Figura 3.21

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la tabla de valores para cada función. Luego, determina si $f(x)$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando x tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.10

b. $f(x) = \dfrac{-1}{x-4}$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.11

c. $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.12

Modelación

2 Elabora una tabla de valores para cada función a partir de la cual se pueda calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 por la izquierda y por la derecha.

a. $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{1}{x^2-9}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1}{x^2-9}$

b. $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x}{x^2-9}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x}{x^2-9}$

Comunicación

3 Indica si existen los siguientes límites dada la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (Figura 3.22).

a. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $\qquad$ b. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

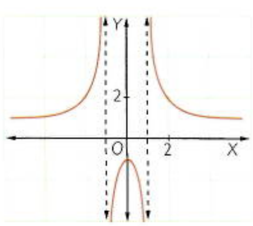


Figura 3.22

4 Observa la gráfica de la función $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$ e indica si existen los valores de los límites. En cada caso, el valor de x está dado en radianes.

a. $\lim\limits_{x \to -6^+} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

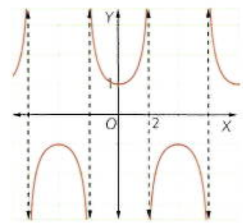


Figura 3.23

Resolución de problemas

5 Analiza la gráfica de la función $f(x) = \cot x$ y decide si existen los valores de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to -2\pi} f(x)$ $\qquad$ b. $\lim\limits_{x \to 2\pi} f(x)$ $\qquad$ c. $\lim\limits_{x \to -\pi} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$ $\qquad$ e. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

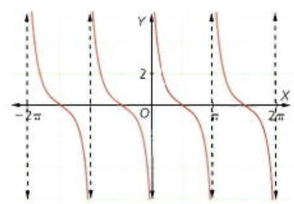


Figura 3.24

Evaluación del aprendizaje

Elabora una tabla de valores para calcular cada uno de los siguientes límites..

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{3x}$ $\qquad$ b. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5}{2x}$ $\qquad$ c. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+1}$

d. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ e. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x-2}$ $\qquad$ f. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2+x}{1-x}$

Educación ambiental

El crecimiento desmedido de las algas, produce daños en el medio ambiente. El modelo de este crecimiento corresponde a una función exponencial. Si no se hacen controles, el daño puede ser irreparable. ¿Por qué crees que el crecimiento exponencial de la población de las algas atenta contra el medio ambiente?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

7 Límites en el infinito

Saberes previos

Un grupo de artesanos fabrica sombreros vueltiaos en grandes cantidades. Atendiendo a los gastos de la maquinaria, al salario de los artesanos y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir p sombreros tiene un costo total, en pesos, de $C(p) = 10p + 10\,000$.

Escribe una función que sea útil para calcular el precio de un sombrero al fabricar p unidades. ¿Qué ocurre con el precio a medida que la producción sea hace cada vez mayor?

Analiza

La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \frac{10t}{t^2-1}$.

- Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en la corriente sanguínea?

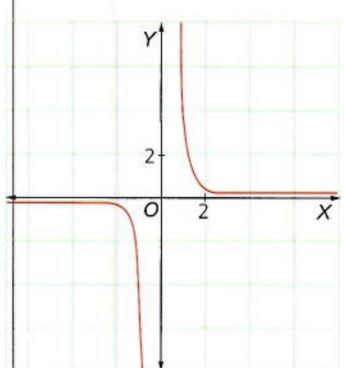


Figura 3.25

Conoce

Para responder la pregunta en la sección Analiza, se puede construir una tabla de valores para observar cómo varía la cantidad de droga a medida que pasan las horas.

t	1	5	10	100	200	300	500	1000
$f(x)$	5	1,92	0,99	0,09999	0,04999	0,0333	0,01999	0,09999

Tabla 3.13

Cuando t toma valores tan grandes como se quiera, $f(t)$ se acerca a 0. Esto se escribe con la notación de límites como: $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

La expresión $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ se lee como el **límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es b** e indica que cuando los valores de la variable independiente x se están haciendo cada vez mayores ($x \in \mathbb{R}^+$), los valores de $f(x)$ se acercan a b.

La expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ se lee como el **límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es b** e indica que cuando los valores de la variable independiente x se están haciendo cada vez menores ($x \in \mathbb{R}^-$), los valores de $f(x)$ acercan a b.

Ejemplo 1

En la tabla se muestran los valores que toma la función $f(x) = \frac{3}{x^5}$ en puntos alrededor de $x = 0$ (Figura 3.25).

x	-100	-10	-1	0	1	10	100
$f(x)$	$-3 \cdot 10^{-10}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	-3	ne	3	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$

Tabla 3.14

Cuando x toma valores tan grandes como se quiera, $f(x)$ se aproxima más a 0, es decir, $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^5} = 0$. y, cada vez que x toma valores tan pequeños como se quiera, $f(x)$ también se aproxima a 0, esto es $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^5} = 0$.

Ejemplo 2

Para calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{3-4x}{\sqrt{9x^2+1}}$, se debe identificar que éste es indeterminado de la forma ∞/∞ por ende, se aplica la técnica que consiste en dividir el numerador y el denominador entre el término de mayor grado de éstos que corresponde a x, puesto que, en el denominador, el mayor exponente es x^2 y se encuentra dentro de una raíz cuadrada. Como x tiende a $+\infty$, entonces $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Por lo anterior, se divide cada término de la expresión entre x.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3-4x}{\sqrt{9x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{4x}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 4}{\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{0-4}{\sqrt{9+0}} = \frac{-4}{\sqrt{9}} = -\frac{4}{3}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la tabla de valores para cada función. Luego, utiliza el resultado para estimar el límite de $f(x)$ cuando x crece indefinidamente y sin cota.

a. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
f(x)							

Tabla 3.15

b. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
f(x)							

Tabla 3.16

c. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
f(x)							

Tabla 3.17

d. $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^3}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
f(x)							

Tabla 3.18

e. $f(x) = \dfrac{x^2}{5x-3}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
f(x)							

Tabla 3.19

2 Calcula los límites.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+2}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{7-x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+1}$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+1}$

3 Relaciona cada función con su respectivo límite.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+2}{3x+6}$ ( ) $\dfrac{1}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{2x+4}$ ( ) 2

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{4x^3+x}}$ ( ) $\dfrac{3}{2}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x}{x^3-1}$ ( ) $\dfrac{1}{2}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+x}{4x^2+1}}$ ( ) 1

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+x+x^4}{3x^4+2x^2}$ ( ) 0

Resolución de problemas

4 La población de una especie de animales está modelada mediante la función:

$f(x) = \dfrac{20+3x^2}{x^2+6x+9}$, donde x se mide en años.

¿Se puede afirmar que la especie tiende a desaparecer después de muchos años?

5 Un equipo de fútbol desea que todos sus aficionados adquieran el bono que les permitirá ingresar a todos los partidos de la temporada. La siguiente función muestra el número de aficionados que comprará el bono desde el momento en que se lanza la oferta (x en meses):

$$f(x) = \dfrac{60x+810}{x^2+9}$$

¿Cuántos aficionados comprarán el bono si se mantiene la promoción por un tiempo ilimitado?

Evaluación del aprendizaje

Determina el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2x^3}+7x}}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{1+8x^2}{x^2+4}}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+x+3}{(x+1)(x-1)}}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8 Propiedades de los límites de funciones

Saberes previos

Si f y g son dos funciones polinómicas tales que $f(1) = 3$ y $g(1) = 5$, ¿Qué se puede afirmar con respecto a $(f + g)(1)$?

Analiza

Un fabricante de productos de aseo ha determinado que el ingreso semanal por la venta de x toneladas de un nuevo jabón antibacterial está dado por la expresión $f(x) = 500x - 6x^2$ dólares.

- Halla el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 8 e indica qué significa.

Conoce

Para calcular el ingreso por las ventas de las ocho toneladas de jabón se puede elaborar una tabla de valores que muestren el comportamiento de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 8 por la izquierda y por la derecha:

x	7	7,5	7,9	7,9999	8,0001	8,1	8,2	9
$f(x)$	3 206	3 412,5	3575,54	3 615,959	3 616,04	3 656,34	3 696,56	4 014

Tabla 3.20

Como el valor de $f(x)$ se aproxima a 3 616 mientras x se acerca a 8, tanto por la derecha como por la izquierda, se escribe: $\lim_{t\to 8^+} f(x) = \lim_{t\to 8^-} f(x) = \lim_{t\to 8} f(x) = 3616$.

Se puede deducir que el fabricante de jabones recibe 3 616 USD por la venta de 8 toneladas de su producto.

Los límites de funciones cumplen las siguientes propiedades:

1. El límite de una función, si existe, es único.

2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = b_2$, para todo a, con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, entonces se verifica:

a. $\lim_{x\to a} \left(f(x) + g(x)\right) = b_1 + b_2$ **b.** $\lim_{x\to a} \left(f(x) - g(x)\right) = b_1 - b_2$

c. $\lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = b_1 \cdot b_2$ **d.** $\lim_{x\to a} \left(k \cdot f(x)\right) = k \cdot b_1, k \in \mathbb{R}$

e. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}, b_2 \neq 0$ **f.** $\lim_{x\to a} \left(f(x)^{g(x)}\right) = b_1^{b_2}$, salvo $b_1, b_2 = 0$

3. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y es finito, entonces se verifican las siguientes propiedades, siempre que tengan sentido los resultados obtenidos:

a. $\lim_{x\to a} \left(f(x)\right)^p = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^p$ **b.** $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

c. $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$ **d.** $\lim_{x\to a} \ln\left(f(x)\right) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$

En general, cuando se calcula el valor de $\lim_{x\to a} f(x)$, se pueden obtener resultados **determinados** o **indeterminados**.

Ejemplo 1

Usa las propiedades de los límites para calcular el límite $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 + 11}}{x}$.

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x^2+11}}{x} = \frac{\lim_{x\to 5} \sqrt{x^2+11}}{\lim_{x\to 5} x} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 5}\left(x^2+11\right)}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{\lim_{x\to 5} x^2 + \lim_{x\to 5} 11}$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{\left[\lim_{x\to 5} x\right]^2 + 11} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 + 11} = \frac{6}{5}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula cada límite según la función $f(x)$ dada.

a. $f(x) = -x^2 + 4x$

$\lim_{x\to 4} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$

b. $f(x) = x\cos x$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} f(x)$

c. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-3}{x}$

$\lim_{x\to 4} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$

d. $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ si } x < 1 \\ 2x+1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$

2 Determina el valor de cada límite a partir de la gráfica de $f(x)$ en la Figura 3.26.

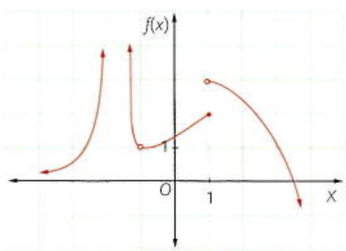


Figura 3.26

a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ b. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ c. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

d. $\lim_{x\to \infty} f(x)$ e. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ f. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

g. $\lim_{x\to -2} f(x)$ h. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ i. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

3 Usa las propiedades para calcular cada límite.

a. $\lim_{x\to -4} 25$ b. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\pi$

c. $\lim_{x\to 2}(7x+10)$ d. $\lim_{x\to -2} x^3$

e. $\lim_{x\to 1}(5x^2+2)(3x-1)$ f. $\lim_{x\to 7}\dfrac{x^2-21}{x+2}$

g. $\lim_{x\to 6}\sqrt{2x-5}$ h. $\lim_{x\to 16}\left(1+\sqrt{x}\right)$

i. $\lim_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x-2}$ j. $\lim_{x\to 10}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-8)}$

Razonamiento

4 Determina si el valor de cada límite es el que se indica. Justifica tu respuesta.

a. $\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{9}$ b. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+1} = 2$

c. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2+1} = 1$ d. $\lim_{x\to -2}\dfrac{2x+2}{x-1} = 2$

e. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1} = 1$ f. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1} = 0$

5 Encuentra los límites de las siguientes funciones trigonométricas.

a. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$ b. $\lim_{x\to \pi} \tan x$ c. $\lim_{x\to 2}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

Resolución de problemas

6 En un cultivo de rosas se ha observado que las condiciones climáticas están destruyendo muchas plantas. La función que muestra el número de plantas afectadas es $f(t) = 57t + 30$, donde t está dado en días. Para controlar el problema se decide aplicar un nuevo fertilizante que, una vez usado, genera esta nueva función de afectación de plantas: $\dfrac{150t}{t+10}$.

a. ¿Se logran obtener buenos resultados luego de aplicar el fertilizante?

b. ¿Se observa alguna mejora en las plantas al primer día de ser aplicado el producto?

c. ¿Este producto erradicará completamente el problema? Explica.

Evaluación del aprendizaje

✓ Usa las propiedades para calcular cada uno de los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+10}$

b. $\lim_{x\to -2}(6x+1)(2x-3)$

c. $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3x+1, \text{ si } x \leq 2 \\ x^2+3, \text{ si } x > 2 \end{cases}$

MATEMÁTICAS © LA ROUSSE

9 Indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones

Saberes previos

Una especie de animales que contaba con 3 000 000 de individuos fue atacada por una enfermedad. Con el paso del tiempo, su población en millones, $f(t)$, disminuyó según la función: $f(t) = 3/(t^2 + 1)$ en la que t es el número de años transcurridos. ¿Qué ocurrirá con esa especie a medida que x aumenta?

Analiza

En una empresa metalúrgica se ha determinado que la longitud (l) en mm de cierto material aumenta cuando se calienta, de acuerdo con la expresión $l = 125 + 2x$, donde x es la temperatura en grados Celsius. Según los estudios realizados, la tasa a la cual se incrementa la longitud está dada por:

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{125 + 2(x + \Delta x) - (125 + 2x)}{\Delta x}$$

- Determina la variación de longitud que presenta este material. ¿Qué pasa cuándo la temperatura aumenta demasiado?

Conoce

En el caso que indica el problema se tiene que:

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{125 + 2(x + \Delta x) - (125 + 2x)}{\Delta x} = \frac{125 + 2x + 2\Delta x - 125 - 2x}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

La variación presentada por este material es igual a 2 mm por cada grado Celsius que aumente la temperatura. Cuando esta aumenta, la función l tiende a infinito.

9.1 Polinomios al infinito

Para el cálculo del límite en el infinito de un polinomio, basta con considerar el término de mayor grado.

Dado el polinomio $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + ... + a_0$, se cumple que:

- Si $a_p > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.
- Si $a_p < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$.

Ejemplo 1

Los límites $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 + x^2 - x + 5) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty}(-5x^3 + 7x - 8) = +\infty$ dan dichos resultados porque para el primero $a_p = 1 > 0$ y para el segundo, $a_p = -5 < 0$.

9.2 Cocientes y raíces de polinomios en el infinito. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Dados los polinomios $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + ... + a_0$ y $Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + ... + b_0$, se cumple que:

- Si $p < q \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.
- Si $p = q \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p}{b_q}$.
- Si $p > q \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$, según los signos de a_p y b_q.

Cuando se calculan límites de cocientes entre polinomios es posible deshacer indeterminaciónes de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, al dividir tanto el numerador como el denominador por la potencia máxima de x que aparece en la fracción.

Ejemplo 2

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{x - 9} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \frac{1 - 0}{0 - 0} = \infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 4x + 8} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{5}{2}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

9.3 Diferencia de expresiones infinitas. Indeterminación $\infty - \infty$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde $\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} Q(x) = \infty$ es posible eliminar las indeterminaciones que se obtienen al calcular el $\lim_{x \to a} (P(x) - Q(x))$. Según los polinomios, hay ocasiones en las que conviene operar la expresión y otras en las que es necesario multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

Ejemplo 3

- $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{4x^2+3} - 2x\right) = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \dfrac{\left(\sqrt{4x^2+3} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2+3} + 2x}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+3}\right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2+3} + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2+3} + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2+3} + 2x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+3}{x^2}} + 2} = \frac{\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x}}{\sqrt{\lim_{x \to \infty}\left(4 + \frac{3}{x^2}\right)} + \lim_{x \to \infty} 2} = \frac{0}{2+2} = 0$$

- $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+6x} - x = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+6x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+6x} + x\right)}{\sqrt{x^2+6x} + x}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+6x}\right)^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2+6x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x - x^2}{\sqrt{x^2+6x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+6x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{\sqrt{\frac{x^2+6x}{x^2}} + 1} = \frac{\lim_{x \to \infty} 6}{\sqrt{\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{6}{x}\right)} + \lim_{x \to \infty} 1} = \frac{6}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

9.4 Cociente de polinomios en un punto. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde $P(a) = Q(a) = 0$, para calcular el límite $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, los dos polinomios se descomponen en factores para luego simplificar y emplear las propiedades aprendidas de los límites para funciones.

Ejemplo 4

- $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$

- $\lim_{x \to 5} \dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{25}}{x - 5} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 5} \dfrac{\frac{25 - x^2}{25x^2}}{x - 5} = \lim_{x \to 3} \dfrac{\frac{-(x-5)(x+5)}{25x^2}}{x - 5}$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{-(x-5)(x+5)}{(x-5)(25x^2)} = \lim_{x \to 5} \frac{-(x+5)}{(25x^2)} = -\frac{10}{625} = -\frac{2}{125}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

9 Indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones

9.5 Cocientes de raíces cuadradas de polinomios en un punto. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde uno o ambos son expresiones radicales de índice $n = 2$, y hay una indeterminación para el límite del cociente de éstos, para calcular el límite $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, conviene multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión donde aparece la raíz.

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x})^2-(3)^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

9.6 Expresiones exponenciales

En general, si $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = b_2$, para todo a, con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)} = b_1^{\,b_2} \text{ y si } \lim_{x\to a} f(x)=1 \text{ y } \lim_{x\to a} g(x)=+\infty \text{ o}$$

$\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, se verifica que $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$.

Ejemplo 6

Determina el siguiente límite $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Como $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-1}{7-x}=1$ y $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=+\infty$, entonces existe una indeterminación del tipo 1^∞. Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^\infty \Rightarrow e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-x-1}{7-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-x-1}{7-x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)}$$

$$=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-x-1-(7-x)}{7-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-8}{7-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{2x+4}{7-x}}=e^{\frac{8}{5}}$$

A parte de estos casos se debe tener presente que los siguientes generan indeterminaciones:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow$ Indeterminación 0^0
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow$ Indeterminación ∞^0
- $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow$ Indeterminación 1^∞

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(-2x^3+9x-4\right)$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(9x^4-3x^3-5x^2-x\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(3x^4-6x+1\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(4x^5-14x^3+x^2+7x-10\right)$

2 Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{2+x^5}$

b. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)(3x^2+3)}{(6x+4)^3}$

c. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

d. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^2+1}{3x^5-5}$

3 Usa el conjugado de cada expresión para hallar los límites de las funciones.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2}\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(5x-\sqrt{x^2+x}\right)$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-3}-x\right)$

f. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

4 Descompón en factores para calcular los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

b. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

c. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

5 Multiplica y divide por el conjugado de la expresión que tiene la raíz. Luego, halla el límite.

a. $\lim_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{x+4}}$

b. $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

c. $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

d. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

Resolución de problemas

6 Unos científicos están probando un tratamiento contra cierta enfermedad que aumenta la vida media de los glóbulos rojos.

Los hematólogos que han empleado el medicamento saben que la vida media de los glóbulos rojos varía dependiendo de la duración en días (t) del tratamiento, según la expresión $V(t)=\dfrac{150t}{t+5}$.

a. Si se emplea el tratamiento por un periodo muy largo, ¿qué pasaría con la vida media de los glóbulos rojos?

b. Si la vida media de estas células es de 120 días, ¿en qué momento del tratamiento se alcanzará esa cifra?

Evaluación del aprendizaje

Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right)$

c. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x+5}$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2}\right)^{x^2-3}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10 Infinitésimos

Saberes previos

Toma una calculadora ponla en modo RAD y halla los valores de sen$x$ y tan$x$ para $x = 0{,}1$; $0{,}001$ y $0{,}001$? ¿A qué valor se acercan las funciones a medida que x se aproxima cada vez más a 0?

Encuentra una tercera función con el mismo comportamiento.

Analiza

Milena debe analizar si las funciones $f(x) = \operatorname{sen}x$, $g(x) = x$ y $h(x) = \tan x$ tienen el mismo comportamiento cuando x tiende a 0.

- ¿Qué pudo haber concluido Milena?

Conoce

Para darse una idea de lo que ocurre con las funciones, Milena traza sus gráficas (Figura 3.27).

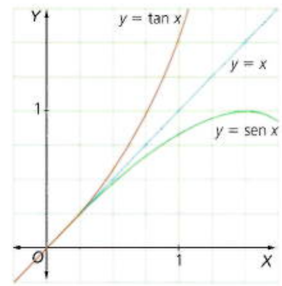


Figura 3.27

Ella observa que estas tienen un comportamiento similar en las cercanías de x respecto a 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

Por tanto, es posible afirmar que :

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x = \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} \tan x$$

Se dice que una función $y = f(x)$ es un **infinitésimo** en $x = a$, si se verifica que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Ejemplo 1

Son ejemplos de infinitésimos las siguientes funciones:

- La función $f(x) = x - 1$ es un infinitésimo en $x = 1$, ya que:
$$\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$$
- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es un infinitésimo cuando x tiende a ∞, puesto que:
$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$
- La función $f(x) = \cos x$ es un infinitésimo cuando $x = \dfrac{\pi}{2}$, ya que:
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

1.1 Infinitésimos equivalentes

El símbolo $\sim$ se utiliza para indicar que dos infinitésimos son equivalentes.

Ejemplo 2

En la Tabla 3.21 se muestran algunos infinitésimos equivalentes.

Cuando $x \to 0$	$x \sim \operatorname{sen}x$ $x \sim \operatorname{arcsen}x$	$x \sim \tan x$ $x \sim \arctan x$	$x \sim \ln(1+x)$ $x \sim 1 - \cos x$	$x \sim e^x - 1$
Cuando $x \to 1$	$x - 1 \sim \ln x$			

Tabla 3.21

Para calcular límites con indeterminaciones del tipo $\dfrac{1}{1}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, se pueden sustituir ciertos infinitésimos equivalentes.

Ejemplo 3

El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^3\right)^2} = \dfrac{0}{0}$. Como sen$x < x$ cuando $x\to 0$, entonces:

sen$3x \sim 3x$ y sen$5x \sim 5x$, por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^3\right)^2} = \lim\frac{3x\times 5x}{\left(x-x^3\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{15x^2}{x^2\left(1-x^2\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{15}{\left(1-x^2\right)^2} = 15$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Observa la gráfica de las funciones de las figuras. Luego, determina cuáles son infinitésimos y en qué punto lo son.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

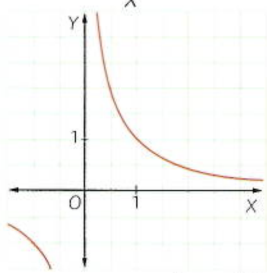


Figura 3.28

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

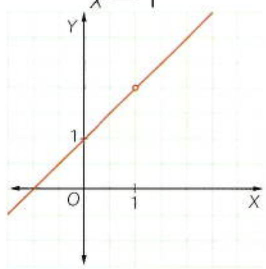


Figura 3.29

c. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 2}$

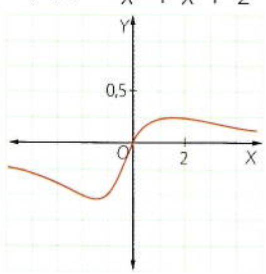


Figura 3.30

d. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

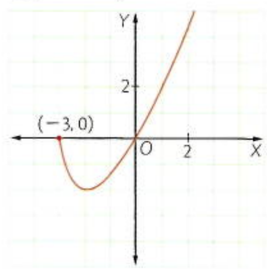


Figura 3.31

e. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{4}$

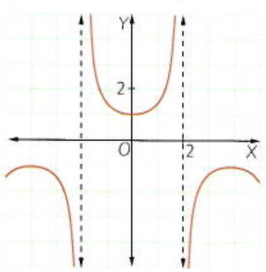


Figura 3.32

f. $f(x) = = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

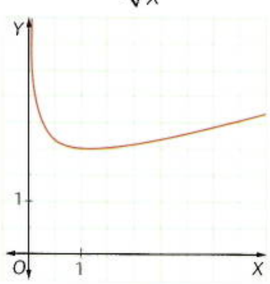


Figura 3.33

Ejercitación

2 Calcula cada límite y decide si cada función es un infinitésimo en el punto al que tiende la variable x.

a. $\lim\limits_{x\to -1} x + 1$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x + 1}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} x^2$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \tan x$

f. $\lim\limits_{x\to 0} 1 + x^2$

3 Calcula cada uno de los siguientes límites y decide cuáles infinitésimos son equivalentes.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 4x}{4x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{2x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}$

e. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x - 1)}{x - 1}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x^2}{5x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x^2}{\frac{25}{2}x^4}$

Resolución de problemas

4 Emplea equivalencias entre infinitésimos para resolver los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x - 1}\right)^x$

c. $\lim\limits_{x\to +0} (x)^{\operatorname{sen} x}$

d. $\lim\limits_{x\to +0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Evaluación del aprendizaje

Calcula mediante infinitésimos los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x - 5x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1 - x}$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3 - 5x^2 + 7x - 8}{2x^3 - 5x + 9}$

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Si se denota por $I(t)$ el número de personas infectadas por cierto virus en el tiempo t y por P la población total, la dinámica de la infección viene dada por una función F, tal que $F = k\,I(P - I)$, donde $k > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad. ¿Qué ocurre con F si P se aproxima cada vez más a I? ¿Qué medidas se deben tomar para evitar el contagio de enfermedades de transmisión sexual?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11 Definiciones formales de límite

Saberes previos

¿Existe $f(1)$ si $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$? ¿Puede decirse que $\lim f(x)$ cuando x tiende a 1 no existe?

Analiza

La dilatación lineal de una varilla de plata se produce por un aumento en la temperatura y viene dada por la expresión: $l = l_0 \cdot (1 + 3 \times 10^{-5} \cdot T)$, donde l es la longitud final del cuerpo (en m), l_0 es la longitud inicial (en m), 3×10^{-5} es un coeficiente de dilatación de la plata y T es la temperatura (en °C).

- ¿Cuál es la longitud final de una barra de plata de 3 m de longitud para una temperatura cercana a los 80° C?

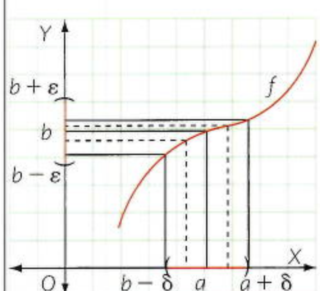


Figura 3.34

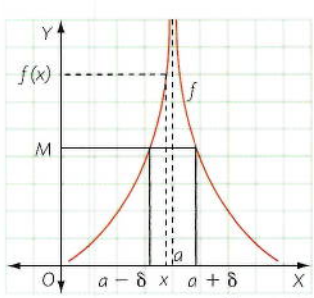


Figura 3.35

Conoce

Para responder la pregunta de puede construir una tabla de valores cercanos a $T = 80$ por la izquierda y por la derecha y observar cómo varía el valor de $l = 3 \cdot (1 + 3 \times 10^{-5} \cdot T)$

x	79	79,5	79,9	79,99	80,001	80,01	80,1	81
$f(x)$	3,00711	3,00715	3,007191	3,007199	3,0072	3,0072009	3,007209	3,00729

Así, en proximidades de $T = 80°$ C, el valor de l se aproxima a 3,0072 m.

Se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si para cualquier entorno de centro b y radio ε tan pequeño como se quiera, se puede encontrar otro entorno de centro a y radio δ tal que todos los valores de este último entorno, excepto tal vez el propio a, verifiquen que su imagen cae dentro del primer entorno (Figura 3.34).

11.1 Definición formal de límite de una función en un punto

En lenguaje formal, se escribe:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Ejemplo 1

Para probar que $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x} = 8$, se usa la definición formal de límite: si $\varepsilon > 0$, se debe encontrar $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - (-4)| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{16 - x^2}{4 + x} - 8\right| < \varepsilon$.

$\left|\dfrac{(4+x)(4-x)}{4+x} - 8\right| < \varepsilon$ y así, $|4 - x - 8| < \varepsilon$.

Al simplificar se tiene $|-x-4| < \varepsilon$, que equivale a $|x+4| < \varepsilon$ o $x - (-4)| < \varepsilon$.

Luego, $\delta = \varepsilon$.

11.2 Definición formal de límite infinito

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si y solo si para todo N se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > N$. (Figura 3.35).

Ejemplo 2

Para demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, debe establecerse que dado un $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\dfrac{1}{x^2} > N$ siempre que $0 < |x - 0| < \delta$.

Observa que $\dfrac{1}{x^2} > N \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{1}{N} \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt{N}}$. Luego, dado $N > 0$, se escoge $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ de tal forma que se satisfaga que $\dfrac{1}{x^2} > N$ cuando $0 < |x - 0| < \delta$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11.3 Definición formal de límite en el infinito

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un M tal que si $x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un M tal que si $x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ (Figura 3.36).

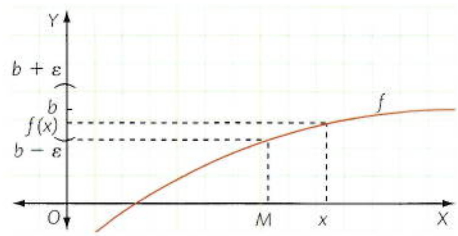


Figura 3.36

Ejemplo 3

Para probar que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, hay que demostrar que para $\varepsilon > 0$ existe M, tal que para todo $x > M$, se tiene que: $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

Como $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$, si $x > 0$, entonces $\dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$.

Con esto, dado $\varepsilon > 0$, se cumple que $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, si y solo si $\dfrac{1}{x} < \varepsilon$ o sea si $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, por lo que se puede tomar $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Por ejemplo si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, entonces $M = 2$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina el límite L de cada función. Luego, utiliza la definición formal para demostrar que lo es.

a. $\lim\limits_{x\to 4}(x+2)$

b. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{5}x + 7\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 2}(-1)$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}$

f. $\lim\limits_{x\to -5}|x-5|$

Razonamiento

2 Calcula cada límite y demuestra que efectivamente lo es.

a. $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+2)$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(4 - \dfrac{x}{2}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3)$

d. $\lim\limits_{x\to 5}(x^2 + 4)$

e. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x+2}$

f. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x+2}$

Resolución de problemas

3 Un joyero diseña una esfera con 5 cm³ de volumen.

a. ¿Cuál es el radio de la esfera?

b. Si el volumen de la esfera varía entre 4,5 y 5,5 cm³, ¿cuánto puede variar el radio?

Evaluación del aprendizaje

Prueba cada uno de los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 3} 2x + 5 = 11$

b. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1} = \infty$

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Supón que la concentración C de una sustancia psicoactiva al transcurrir t horas después de que se ha ingerido es $c = \dfrac{20t}{t^2+4}\left[\dfrac{mg}{L}\right]$. Demuestra que $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{20t}{t^2+4} = 0$. ¿Qué significa este valor en el contexto del problema? ¿Qué efectos y riesgos trae el consumo de sustancias psicoactivas?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Sucesiones de números reales

Ejercitación

1 Halla los diez primeros términos de cada sucesión. Determina el tipo de crecimiento y si esta es acotada.

a. $a_n = 2n^2 - n$

b. $a_n = \dfrac{2n}{2n^2 - n}$

c. $a_n = \sqrt{2n^2 - n}$

d. $a_n = \sqrt{2n^2} - n$

2 Determina el término general de cada sucesión.

a. $a_n = \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{8}, \dfrac{3}{12}, \dfrac{4}{16}, \dfrac{5}{20} \dots$

b. $a_n = \dfrac{2}{4}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{6}{10}, \dfrac{8}{13}, \dfrac{10}{16}, \dfrac{12}{19} \dots$

c. $a_n = \sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, \sqrt{11} \dots$

d. $a_n = 3 - a, 6 - 2a, 9 - 3a, 12 - 4a, \dots$

Límite de una sucesión

Comunicación

3 Halla los límites de las siguientes sucesiones.

a. $a_n = 2n^2 - n$

b. $a_n = \dfrac{2n}{2n^2 - n}$

c. $a_n = \sqrt{2n^2 - n}$

d. $a_n = \sqrt{2n^2} - n$

4 Construye términos generales de sucesiones para cada condición dada.

a. Que tenga como límite 3.

b. Que crezca indefinidamente y sin cota.

5 Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2}{n^3}$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n-1}{n^2}$

Cálculo de límites de sucesiones

Ejercitación

6 Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^3 + 2n^2 - 4}{n^3 - n^2 + 1}$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 - n}{n^2 + 1}$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n^3 - 4}{n^3 + 1} \right)^n$

Límite de una función en un punto

Razonamiento

7 Calcula los límites indicados a partir de la gráfica de $g(x)$ que se muestra en la Figura 3.37.

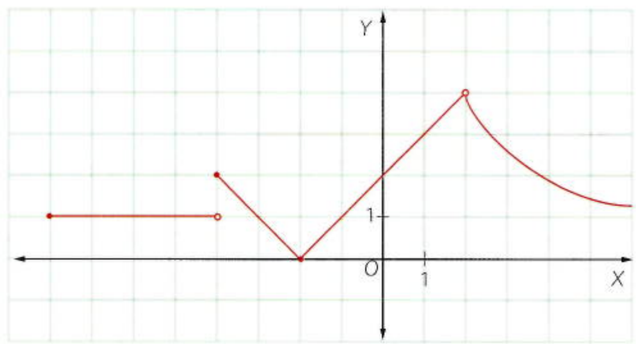


Figura 3.37

a. $\lim\limits_{x \to -4^-} g(x)$ d. $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x)$ g. $\lim\limits_{x \to -4} g(x)$

b. $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x)$ e. $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x)$ h. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ f. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ i. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

8 Calcula los límites indicados a partir de la gráfica de $f(x)$ en la Figura 3.38.

a. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

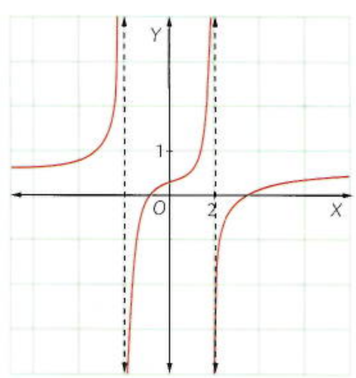


Figura 3.38

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Aplicar una fórmula

Problema

Una sucesión recurrente es aquella en la que cada uno de los términos se obtiene a partir de la suma de varios términos anteriores. La sucesión de Fibonacci es una de ellas y se define así:

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ y } a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Representa los siete primeros términos de esta sucesión.

1. Comprende el problema

- ¿Qué información aporta el enunciado?

  R: La expresión que permite calcular cualquier término de la sucesión.

- ¿Qué debes hacer?

  R: Encontrar los siete primeros términos de la sucesión de Fibonacci y representarlos.

2. Crea un plan

- Analiza cómo se define por recurrencia la sucesión de Fibonacci y encuentra los términos que se piden.

3. Ejecuta el plan

- Los dos primeros términos de la sucesión son 1 y 1.
- El tercer término es $1 + 1 = 2$ y cada uno de los siguientes se encuentran sumando los dos anteriores:

  $a_4 = 1 + 2 = 3; a_5 = 2 + 3 = 5; a_6 = 3 + 5 = 8$

R: Los siete primeros términos de la sucesión de Fibonacci son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. La representación de estos términos se observa en la Figura 3.39.

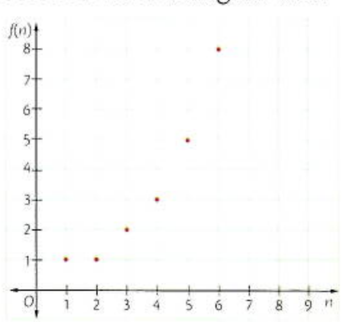


Figura 3.39

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que $a_{15} = 610$.

Aplica la estrategia

1 Observa la sucesión recurrente definida por $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 1)$.

¿Cuáles son los cinco primeros términos de esta sucesión?

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2 La inflación se mantuvo en 4,5% anual durante los años 2009 a 2015. Si el precio de un artículo en 2012 era de $ 30 000, ¿cuál fue su valor en 2013 y 2014? Escribe un modelo de función que te permita saber el precio del artículo en 2015 y 2016, sabiendo que la inflación se mantuvo en 4,5% anual en esos años. ¿Cuál es el precio del artículo en los primeros tres años?

Formula problemas

3 Formula y resuelve un problema que involucre la información de la gráfica de la Figura 3.40.

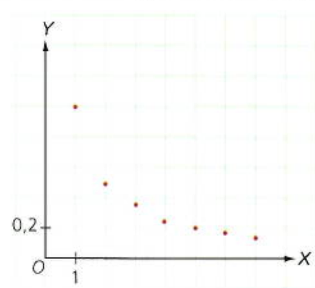


Figura 3.40

Enriquece tu vocabulario

- Construye una oración con las palabras:
  - sucesión
  - términos
  - límite

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Evaluación del aprendizaje

Sucesiones de números

Comunicación

1 Lee con atención y observa la Figura 3.41.

Helge von Koch procedió de la siguiente manera: dividió un segmento en tres partes iguales. Borró el segmento del centro y en ese espacio agregó dos segmentos iguales al borrado, de modo que formaran un triángulo equilátero con el trozo borrado. Repitió el mismo procedimiento con cada nuevo segmento y continuó repitiéndolo "n" veces. Se podría decir que esta es la representación de una sucesión.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

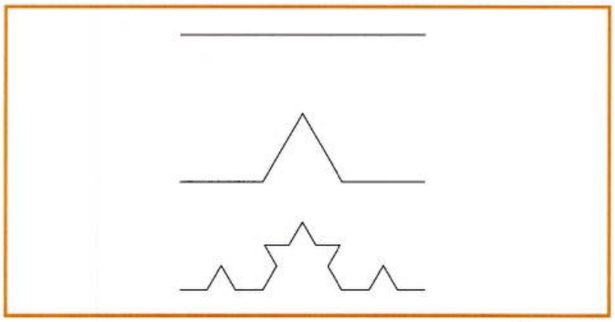


Figura 3.41

Se observa que el número de lados aumenta de acuerdo con la siguiente sucesión: 1, 4, 16, ...

a. ¿Cuál es el término siguiente?

b. ¿Cuál es el décimo término de la sucesión?

Modelación

2 Se diseña la siguiente sucesión con palos de fósforos.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

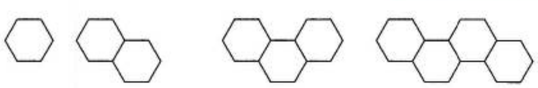


Figura 3.42

¿Cuántos palitos se necesitan para el término 13?

Límite de sucesiones

Ejercitación

3 Decide si la sucesión $\dfrac{-3n^2-7n+1}{5n^2+4n+9}$ converge o diverge. Si converge, indica el límite; si no converge, explica las razones.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Cálculo y propiedades de los límites de sucesiones

Ejercitación

4 Halla $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^n$.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

5 Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+5}{3n^2-9}\right)^{n^2+1}$.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Límite de una función en un punto

Ejercitación

6 Selecciona el valor de $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{6-2x}$

CUESTIONARIO

a. $+\infty$

b. $-\infty$

c. $\dfrac{1}{6}$

d. No existe

Razonamiento

7 Calcula $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ =,si $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x>0 \\ 3-x, \text{ si } 0\leq x<4 \\ 2, \text{ si } x>4 \end{cases}$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Comunicación

8 Usa la gráfica de la función para calcular cada límite.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

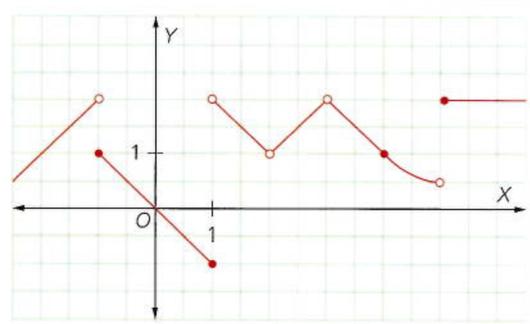


Figura 3.43

a. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

e. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Límites infinitos y límites en el infinito

Resolución de problemas

9 La altura media de una determinada especie de pinos viene dada por la función $f(x) = \dfrac{12t^2 - 3t + 1}{t^2 + 9t + 10}$, donde t expresa los años transcurridos desde su plantación. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. ¿Qué altura media tienen los pinos al cabo de cinco años?

b. ¿A cuánto tiende la altura media de estos árboles con el paso del tiempo?

Razonamiento

10 Calcula cada uno de los siguientes límites y, a partir de los resultados, explica el comportamiento de las funciones a medida que x crece o decrece tanto como se quiera. PREGUNTA ABIERTA

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3x^2 - 6x + 1\right)$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 - 2x + 1\right)$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(-3^3 + x\right)$

Razonamiento

11 Observa la siguiente secuencia y explica qué ocurre con el área de los polígonos regulares inscritos a medida que el número de lados aumenta de manera infinita. Escribe el límite que resuma tu conclusión. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

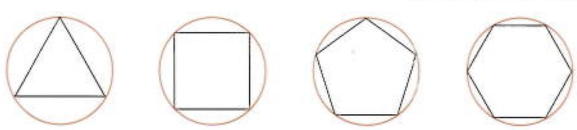


Figura 3.44

Propiedades de los límites de funciones

Razonamiento

12 Califica como verdadera o falsa cada afirmación. VERDADERO / FALSO

a. $\lim\limits_{x \to 1} k = 1$

b. Para cualquier polinomio $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$ solo existe si el grado del polinomio $p(x)$ es igual al grado del polinomio $q(x)$

Comunicación

13 Usa las gráficas de las funciones f y g de la Figura 3.45 para hallar los siguientes límites. ACTIVIDAD DE REFUERZO

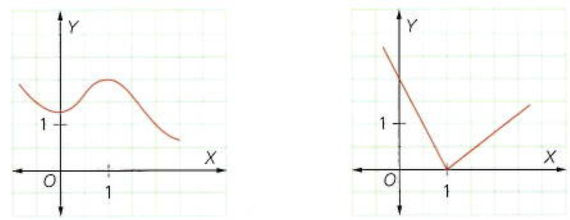


Figura 3.45

a. $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) + g(x)\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) \cdot g(x)\right)$

Indeterminaciones

Ejercitación

14 Calcula cada límite. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b. $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{\sqrt{5+n} - \sqrt{5}}{\sqrt{2n}}$

Resolución de problemas

15 Un cultivo de bacterias crece siguiendo la ley $f(t) = \dfrac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4t}}$, donde el tiempo $t \geqslant 0$ se mide en horas y el peso del cultivo en gramos.

Determina el peso del cultivo transcurridos 60 minutos. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Infinitésimos

Razonamiento

16 Escribe si cada afirmación es verdadera o falsa. VERDADERO / FALSO

a. La suma finita de infinitésimos es un infinitésimo. ( )

b. El producto de dos infinitésimos no necesariamente es un infinitésimo. ( )

c. El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo. ( )

d. El producto de una constante por un infinitésimo es la constante. ( )

Definición formal de límite

Razonamiento

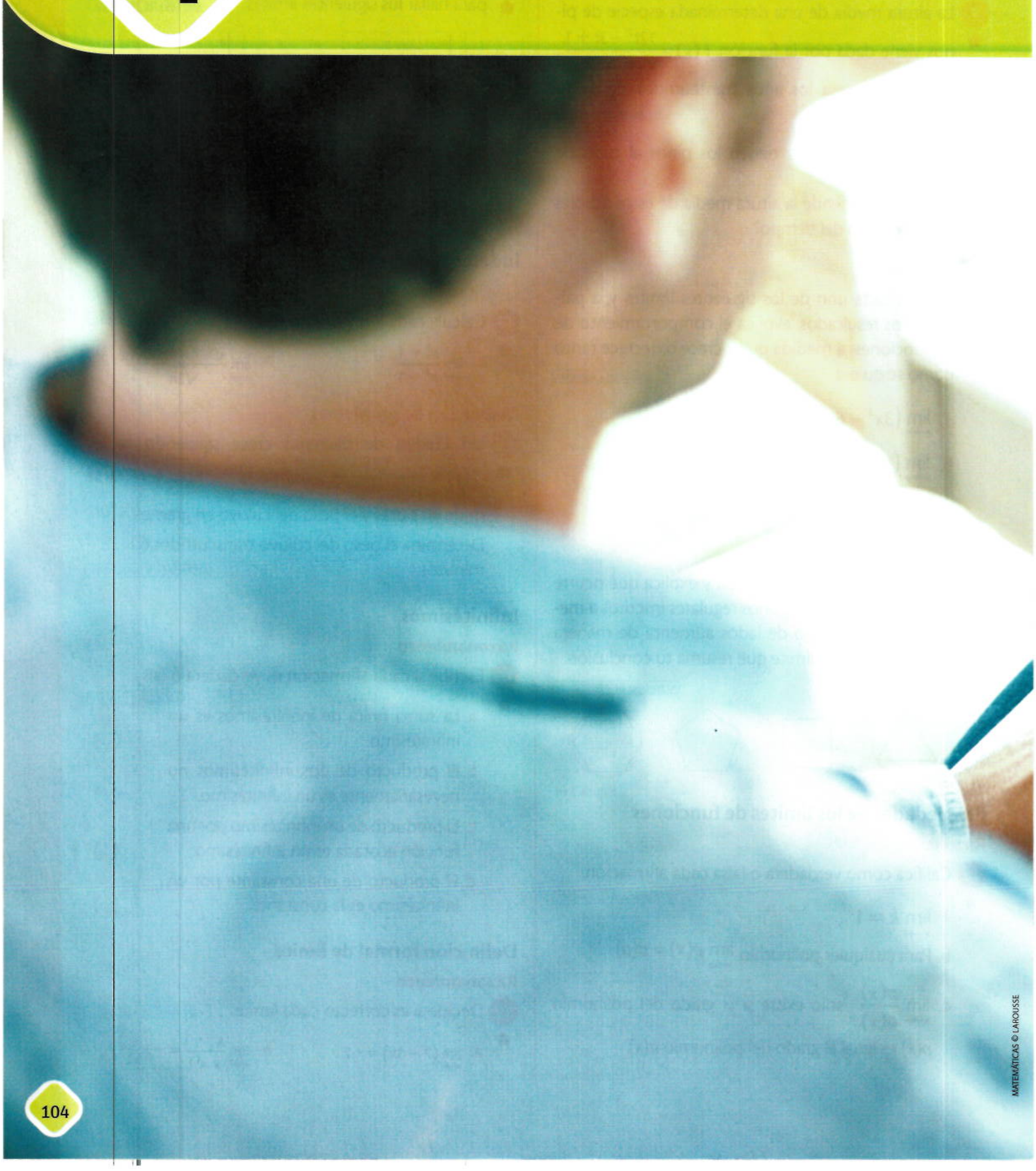
17 Decide si es correcto cada límite. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\lim\limits_{x \to 1} \left(7 - 3x\right) = -2$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Continuidad y derivadas



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ya sabemos

- Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones.

Vamos a aprender

- A determinar si una función es acotada en un intervalo.
- A calcular la derivada de una función.

Nos sirve para

- Resolver problemas de optimización en otras ciencias.
- Aplicar el concepto de derivada en el trazado de gráficas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Continuidad

Saberes previos

Traza la gráfica de una función en la que no debas levantar la mano del papel y otra en la que sí debas hacerlo.

Analiza

Mario quiere representar de manera gráfica la función definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

- ¿Qué tipo de gráfica obtiene?

Conoce

1.1 Continuidad en un punto

La imagen de cualquier valor racional que tome Mario es 1, mientras que la que le corresponde a cualquier irracional es 0. Así que la gráfica que obtiene son dos líneas horizontales punteadas, como se ve en la Figura 4.1.

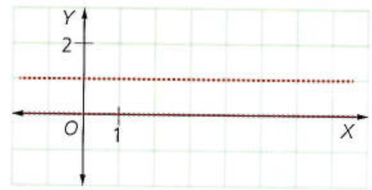


Figura 4.1

Una **función f es continua en un punto $x = a$** de su dominio si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Esta definición es equivalente a que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Exista $\lim_{x \to a} f(x)$.
2. Exista $f(a)$.
3. Ambos números coincidan, es decir, que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ejemplo 1

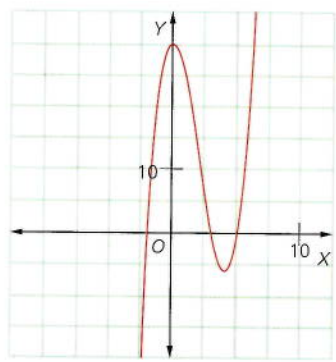


Figura 4.2

El dominio de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$ es el conjunto de los números reales.

Para cada uno de esos puntos, la función es continua. Por ejemplo, $f(x)$ es continua en $x = 2$, ya que:

1. $\lim_{x \to 2} (x^3 - 6x^2 - x + 30) = 12$
2. $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 2 + 30 = 12$, luego $f(2)$ existe.
3. $\lim_{x \to 2} (x^3 - 6x^2 - x + 30) = f(2) = 12$

Ejemplo 2

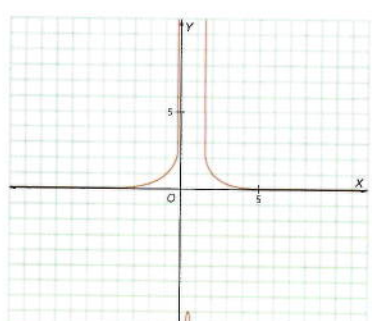


Figura 4.3

La función $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x}$ no es continua ni en $x = 0$ ni en $x = 1$, puesto que ni $\lim_{x \to 0} \dfrac{2}{x^2 - x}$ ni $\lim_{x \to 1} \dfrac{2}{x^2 - x}$ existen, como se puede observar en la Figura 4.3.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.2 Continuidad lateral

Una función es continua por la derecha en $a \in D(f)$ si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Una función es continua por la izquierda en $a \in D(f)$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

1.3 Continuidad en un intervalo

Una **función** f **es continua en un intervalo** (a, b) cuando lo es en cada uno de sus puntos y es **continua en un intervalo** $[a, b]$ cuando lo es en cada uno de los puntos de (a, b) y, además, por la derecha en a y por la izquierda en b.

Ejemplo 3

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x - k, \text{ si } x < 3 \\ x^2 + k, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$ observa cómo encontrar los valores que debe tomar k para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Aparte de $x = 3$, la función es continua al estar definida por polinomios.

Para $x = 3$, la función cambia su definición, por lo que para estudiar la continuidad de $f(x)$ es necesario calcular el límite en este punto.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(3x - k) = 9 - k \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x^2 + k) = 9 + k$$

Para que exista $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, los límites laterales deben coincidir, por lo que $9 - k = 9 + k \Rightarrow k = 0$.

Ejemplo 4

Observa cómo hallar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + b}{ax^2 + 3x + 2}, \text{ si } x < 0 \\ \cos x + b, \text{ si } 0 \leq x < \pi \\ x^2 - \dfrac{3}{2}a - \pi^2, \text{ si } x \geq \pi \end{cases}$$

Los posibles puntos de discontinuidad son 0, π y los que anulen al polinomio $ax^2 + 3x + 2$. Para que la función sea continua en $x = 0$ y en $x = \pi$, los límites laterales deben coincidir:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x + b}{ax^2 + 3x + 2} \right) = \frac{b}{2} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\cos x + b) = 1 + b$$

$$\frac{b}{2} = b + 1 \Rightarrow b = -2$$

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} (\cos x + b) = b - 1$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} \left(x^2 - \frac{3}{2}a - \pi^2 \right) = -\frac{3}{2}a$$

$$b - 1 = -\frac{3}{2}a \Rightarrow a = 2$$

No hay puntos que anulen a $2x^2 + 3x + 2$, así que, para $a = 2$ y $b = -2$, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Continuidad

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Clasifica las funciones en continuas o discontinuas a partir de su representación gráfica en las Figuras 4.4 a 4.11. Explica tus respuestas.

a.

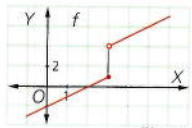



Figura 4.4

b.

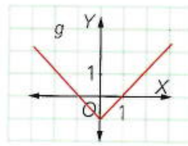



Figura 4.5

c.

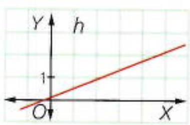



Figura 4.6

d.

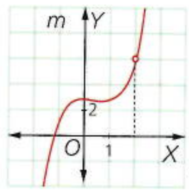



Figura 4.7

e.

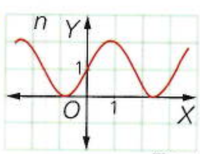



Figura 4.8

f.

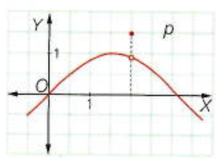



Figura 4.9

g.

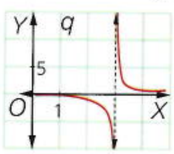



Figura 4.10

h.

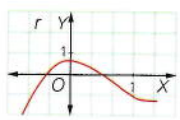



Figura 4.11

2 Indica si las siguientes funciones son continuas o no en el punto $x = 2$.

a. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, \text{ si } x > 2 \\ \dfrac{2}{x} + 10, \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$

b. $g(x) = \sqrt{-x^2 + 6}$

Razonamiento

3 Señala el mayor conjunto de números reales para los que cada función $f(x)$ sea continua.

a. $f(x) = x^3 - 2x^2$

b. $f(x) = \sqrt{x+1}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4}$

Ejercitación

4 Estudia la continuidad de cada función.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x$

b. $f(x) = xe^x + x^2$

c. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2 - 3}$

d. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 25}$

Comunicación

5 Indica si las siguientes funciones son continuas o no en el punto que se indica.

a. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$, en $x = 2$

b. $f(x) = \dfrac{x}{2 - \sqrt{3 - 2x}}$, en $x = \dfrac{3}{2}$

c. $f(x) = \ln(2x^2 + 4x - 6)$, en $x = -3$

d. $f(x) = \ln(2x^2 + 4x - 6)$, en $x = 0$

e. $f(x) = \tan x$, en $x = \pi$

f. $f(x) = \tan x$, en $x = \dfrac{\pi}{2}$

6 Calcula el valor o los valores que se deben dar a k para que las siguientes funciones sean continuas en todo el conjunto de los números reales.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 + 1, \text{ si } x \leq -2 \\ 2x + k, \text{ si } x > -2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2k, \text{ si } x \leq 1 \\ x^2 + 3x - k, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx, \text{ si } x < 3 \\ \ln(x - 2), \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

7 Grafica y analiza la continuidad de la función definida como $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \leq 0 \\ 2, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

8 Observa la Figura 4.12, define de manera analítica la función que se representa y analiza su continuidad.

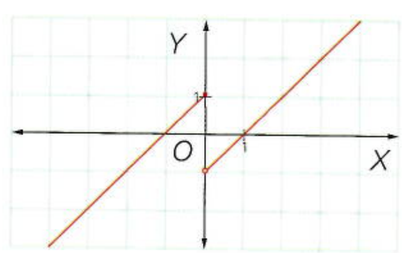


Figura 4.12

Razonamiento

9 ¿Cuáles de las seis funciones trigonométricas son continuas en el conjunto de los números reales?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

10 Sea $v(t) = 2t^2 + 1$ la velocidad de un móvil.

a. Traza la gráfica de la función $v(t)$.

b. Explica si $v(t)$ es continua en su dominio.

c. ¿Qué clase de movimiento efectúa el móvil?

d. Halla la velocidad para los siguientes tiempos:

- 3 s
- 8 s
- 10 s
- 0 s

11 Observa la gráfica de la Figura 4.13 y decide en cuáles puntos existen discontinuidades. Explica en cada caso las razones de tal discontinuidad.

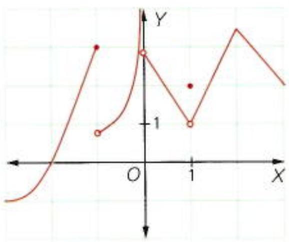


Figura 4.13

12 Observa la gráfica de la Figura 4.14 y decide si, en cada uno de los puntos que se indican, la función es continua, discontinua o no está definida.

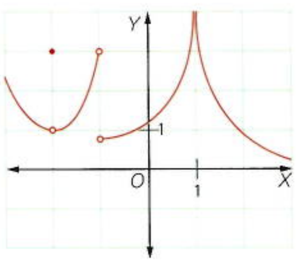


Figura 4.14

a. $x = -1$ b. $x = -2$ c. $x = 1$ d. $x = 2$

13 Observa la gráfica de la Figura 4.15 .

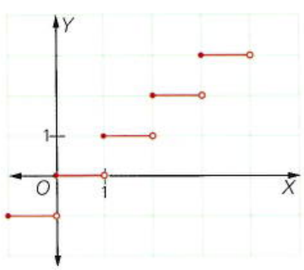


Figura 4.15

a. ¿Cómo se define esta función?

b. ¿Cuántos puntos de discontinuidad tiene?

c. ¿Hay puntos en los cuales la función no se encuentre definida?

Resolución de problemas

14 Para contrarrestar una colonia de bacterias, se le aplica una toxina durante t minutos. El comportamiento de la población de bacterias se ve afectado de acuerdo con la función:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7, \text{ si } t < 5 \\ 72 - 8t, \text{ si } t \geq 5 \end{cases}.$$

a. ¿Cuál era la población a los dos minutos de ser introducida la toxina?

b. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que la colonia completa desaparezca?

c. Grafica la función $f(t)$ y analiza su continuidad.

Evaluación del aprendizaje

Las tarifas de un médico se basan en la duración de cada consulta:
Hasta 6 minutos, \$ 50 000.
Entre 6 y 15 minutos, \$ 80 000.
15 minutos o más, \$ 80 000 más \$ 5 000 por cada minuto adicional.

a. Escribe la expresión algebraica de la función y traza la gráfica correspondiente al modelo de cobro del médico.

b. ¿Cuánto paga un paciente por una consulta de 12 minutos?

c. ¿Cuánto pagaría alguien por una consulta de 20 minutos?

d. Analiza la continuidad de la función.

Estilos de vida saludable

El electrocardiograma (ECG) es la representación gráfica mediante una función continua de la actividad eléctrica del corazón, que se obtiene, desde la superficie corporal, en el pecho, con un electrocardiógrafo en forma de cinta continua. ¿Cómo puedes mantener un corazón saludable?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Tipos de discontinuidad

Saberes previos

Halla el valor de la función $\frac{1}{x}$ para $x = 0{,}1$; $0{,}01$ y $0{,}001$ y explica qué ocurre con sus imágenes.

Analiza

Explica el comportamiento de la gráfica de la función de la Figura 4.16 a medida que x toma valores muy cercanos a 5, tanto a la derecha como a la izquierda.

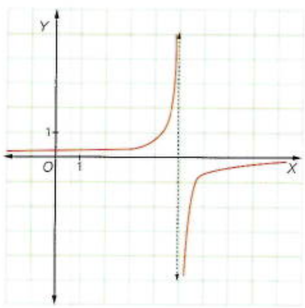


Figura 4.16

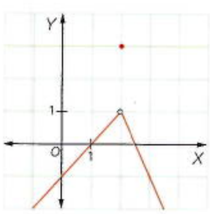


Figura 4.17

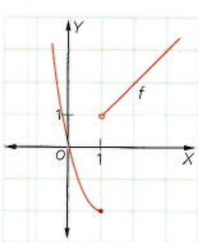


Figura 4.18

Conoce

A medida que x se aproxima a 5 por la izquierda y por la derecha, los valores de la función se hacen infinitamente grandes o infinitamente pequeños, respectivamente. De esta forma, la función es discontinua en $x = 5$.

Dependiendo de cuál de las tres condiciones de continuidad de una función falle en un punto, la función presenta uno de los siguientes tres tipos de discontinuidad.

2.1 Discontinuidad evitable

Una función presenta una **discontinuidad evitable** en $x = a$ si existe y es finito el límite de la función en a, pero no coincide con la imagen de la función en ese punto.

Ejemplo 1

La función $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ si } x < 2 \\ 3, \text{ si } x = 2 \\ 5 - 2x, \text{ si } x > 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 2$ (Figura 4.17) la cual se puede evitar si $f(x)$ se redefine, de tal forma que $f(2) = 1$.

2.2 Discontinuidad de salto finito

Una función presenta una **discontinuidad de salto finito** en $x = a$ si los límites laterales en a existen y son finitos, pero no coinciden.

Ejemplo 2

Para estudiar la continuidad en $x = 1$ de $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, \text{ si } x \leq 1 \\ x, \text{ si } x > 1 \end{cases}$ es necesario calcular los límites laterales (Figura 4.18).

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 - 4x) = -2 \text{ y } \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

Entonces, $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe y f no es continua en $x = 1$.

Como los límites laterales en $x = 1$ son finitos pero no coinciden, f presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

2.3 Discontinuidad de salto infinito

Una función presenta una **discontinuidad de salto infinito** en $x = a$ si uno de los límites laterales en a, o los dos, son infinitos.

Las discontinuidades de salto finito o infinito también se denominan **discontinuidades inevitables** o **esenciales**.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

Analiza el tipo de discontinuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2}x + 1, \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{1}{2}$

f no es continua en $x = -1$.

En este caso, uno de los límites laterales es infinito, así que f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = -1$ (Figura 4.19).

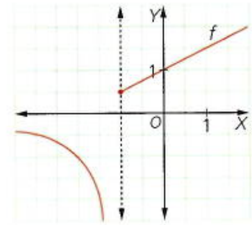


Figura 4.19

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina cuáles de las siguientes funciones son discontinuas y clasifica sus discontinuidades.

a. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, \text{ si } x < 0 \\ -x - 3, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, \text{si } x \neq 0 \\ 4, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

2 Traza la gráfica de cada función definida a trozos, indica su dominio y estudia su continuidad, especificando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a. $f(x) = \begin{cases} -2x - 7, \text{ si } x \leq -2 \\ 1 - x^2, \text{ si } -2 < x < 1 \\ -1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}, \text{ si } x < -1 \\ x^2, \text{ si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 6, \text{ si } x > 2 \end{cases}$

Razonamiento

3 Indica el valor o los valores de a, si es que existen, para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + a, \text{ si } x \leq -2 \\ \dfrac{x}{x+4}, \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

a. Sea continua en $x = -2$.

b. Presente una discontinuidad evitable en $x = -2$.

c. Muestre una discontinuidad de salto finito en $x = -2$.

d. Tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = -2$.

Evaluación del aprendizaje

i Relaciona cada función con su gráfica y determina el tipo de discontinuidad que presenta.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x < 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \\ x + 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

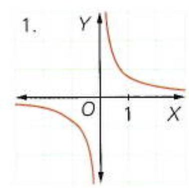
1.


Figura 4.20

b. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x < 0 \\ 3, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

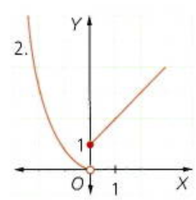
2.


Figura 4.21

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

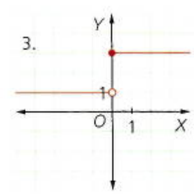
3.


Figura 4.22

ii Sea $f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \text{ es racional} \\ 2, \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$.

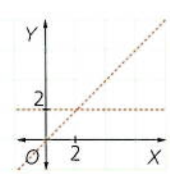


Figura 4.23

a. ¿Qué valores toma la función para $x = 4, 6, 8, \pi$ y $\sqrt{7}$?

b. ¿Tiene esta función puntos de continuidad? Si es así, indica en cuáles y revisa que se verifiquen las tres condiciones de continuidad.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Continuidad de funciones elementales

Saberes previos

Se sabe que $f(x) = x^3$ es continua, ¿se puede afirmar que $g(x) = x^3 - 1$ y $h(x) = x^3 + 1$ también lo son? Explica.

Analiza

En la Figura 4.24 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln(x + 2)$.

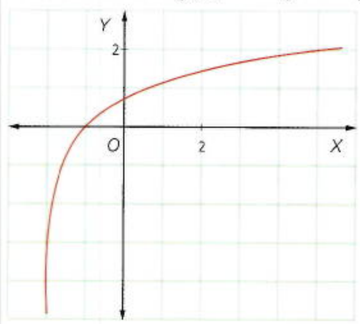


Figura 4.24

- De acuerdo con la gráfica, ¿en qué intervalo es continua esta función?

Conoce

La función $f(x) = \ln(x + 2)$ es continua en su dominio por ser una función logarítmica. Para calcular el dominio de f, hay que tener en cuenta que el logaritmo solo puede calcularse para expresiones positivas, luego $x + 2 > 0$, es decir, $x > -2$. Por tanto, f es continua en $(-2, +\infty)$.

3.1 Propiedades de las funciones continuas

Dadas las funciones f y g continuas en $x = a$, se verifica que:

1. La función $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.
2. La función $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ es continua en $x = a$.
3. La función $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.
4. La función $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$, siempre que $g(a) \neq 0$.

3.2 Continuidad de funciones elementales

- La función polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.
- La función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios en x, es continua en todo punto de $\mathbb{R}$, excepto en aquellos que anulan el denominador.
- La función irracional $y = \sqrt[n]{P(x)}$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}$ si n es impar, y solo en aquellos que verifican $P(x) \geq 0$ si n es par.
- La función exponencial $f(x) = a^x$ (con $a > 0$ y $a \neq 1$) es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.
- La función logarítmica $f(x) = \log_a x$ (con $a > 0$ y $a \neq 1$) es continua en los números reales estrictamente positivos.
- Las funciones trigonométricas $y = \text{sen}x$ y $y = \cos x$ son continuas en todo punto de $\mathbb{R}$.
- La función trigonométrica $y = \tan x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, excepto en los $x = (2k + 1) \cdot \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1

La función $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, \text{ si } x \leq 0 \\ e^{2x} + 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ es continua en $(-\infty, 0)$ por ser polinómica, mientras que en $(0, +\infty)$ la función es continua por ser exponencial. En $x = 0$ se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (3x + 1) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x} + 1 = 2$

Como no coinciden los límites laterales, f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

3.3 Continuidad de la función compuesta

Dadas las funciones f y g de forma que f es continua en $x = a$ y que g es continua en $f(a)$, se verifica que la función $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ es continua en $x = a$.

Ejemplo 2

Sean las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = e^x$, ambas continuas en $x = 0$. Se verica que $f[g(x)] = 3(e^x)^2 = 3e^{2x}$ también es continua en dicho valor ya que: $\lim\limits_{x \to 0} 3e^{2x} = 3e^0 = 3$; $f(0) = 3e^0 = 3$ y $\lim\limits_{x \to 0} 3e^{2x} = f(0) = 3$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Estudia la continuidad de las funciones:

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x+2-x^2}}$ b. $m(x) = \log(x^2 + 1)$

c. $t(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ d. $g(x) = \sqrt{2 + |2x - 3|}$

2 Representa y estudia el tipo de continuidad que tiene la función.

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ si } x < -2 \\ x^2, \text{ si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

3 Halla el valor que se debe dar a $f(7)$ para que la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7}$ sea continua en $[3, +\infty)$.

4 Lee y responde. Si $\lim\limits_{x \to k} f(x)$ existe y f no es continua en k, ¿cuál es el valor de k de entre los que se señalan abajo? Explica tu elección.

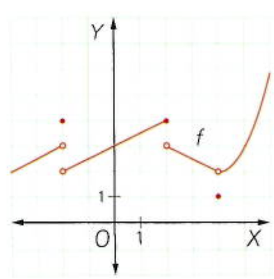


Figura 4.25

a. -2 b. 4 c. 2 d. 0

Resolución de problemas

5 Un equipo de investigación estimó que el número de bacterias, en miles, de un cultivo, en función del tiempo x, viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}x^2 + 1, \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{4x}{x+1}, \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

a. Comprueba que la función es continua en todo su dominio.

b. Haz una representación de la función.

Evaluación del aprendizaje

i Analiza la continuidad de las siguientes funciones en cada uno de los puntos dados.

a. $f(x) = \sqrt{x-3}$ en $x = 3$, $x = 5$ y $x = 0$

b. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 1}$ en $x = 1$, $x = -1$ y $x = 0$

c. $f(x) = 3^x$ en $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$

d. $f(x) = \log_2(2x - 7)$ en $x = 3$, $x = 0$ y $x = -1$

e. $f(x) = 4\cos(3x - 1)$ en $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ y $x = 2\pi$

ii Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 4x$ y $g(x) = 2x - 5$, determina la continuidad de la función compuesta $f[g(x)]$ en el punto $x = \dfrac{1}{3}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Teorema de los valores intermedios

Saberes previos

Si en un pocillo había agua a 100° C y se llevó al congelador y ahora está a −10° C, ¿su temperatura fue 0° C en algún momento? Explica.

Analiza

Traza las gráficas de las funciones e^{-x} y $\sqrt{x}$, y comprueba que se cortan en algún punto del intervalo [0, 1].

Conoce

Las funciones $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son continuas en todo su dominio y en concreto en el intervalo [0, 1].

Además, como $f(0) > g(0)$ y $f(1) < g(1)$, debe existir un punto $s \in (0, 1)$ en el que las dos funciones coinciden o se cortan. Esto se muestra en la Figura 4.26.

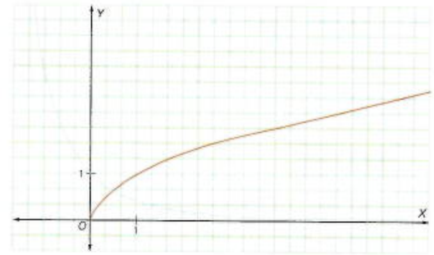


Figura 4.26

Sea f una función real y continua en $[a, b]$

- si $f(a) \leq f(b)$ y M es tal que $f(a) < M < f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$ (Figura 4.27).
- si $f(a) \geq f(b)$ y M es tal que $f(b) < M < f(a)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$ (Figura 4.28).

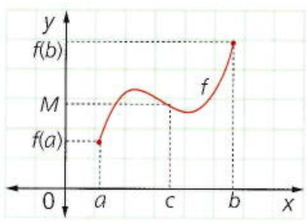


Figura 4.27

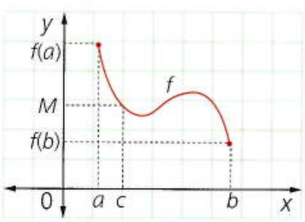


Figura 4.28

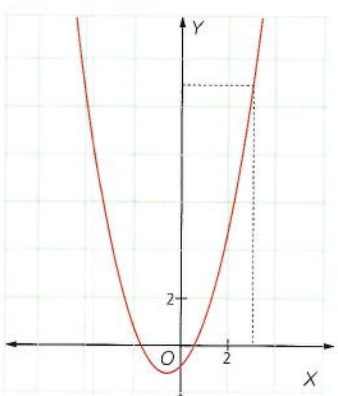


Figura 4.29

Ejemplo 1

La función $f(x) = x^2 + x - 1$ es continua en todos los números reales por ser polinómica; en particular lo es en el intervalo [0, 5] (Figura 4.29).

Como $f(0) = -1$ y $f(5) = 29$, al considerar un valor intermedio entre −1 y 29, tal como 11 y en virtud del teorema de los valores intermedios, debe existir al menos un número real $c \in (0, 5)$ tal que $f(c) = 11$. En este caso el valor de c puede hallarse al solucionar la ecuación $c^2 + c - 1 = 11$ o su equivalente $c^2 + c - 12 = 0$.

Al resolver por factorización se tiene que: $(c + 4)(c - 3) = 0$ y de aquí se obtienen los valores $c = -4$ o $c = 3$, pero dado que $c \in (0, 5)$ se considera $c = 3$.

Ejemplo 2

Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, ¿puede asegurarse que no existe ningún punto en el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ en el que la función tome el valor 1?

La función es continua en $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, entonces

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = 0{,}9\,;\, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = 0{,}8 \text{ y, por tanto,}$$

$$1 \notin \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

No se verifica una de las hipótesis del teorema de los valores intermedios, pero eso no permite asegurar que no exista ningún punto de $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ en el que la función valga 1. De hecho $f(0) = 1$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Analiza la validez de esta interpretación del teorema de los valores intermedios.

"Una función continua en un intervalo toma cualquier valor entre dos valores que toma la función en ese intervalo. Así, no puede ocurrir que una función continua tome valores positivos y negativos y no tome el valor 0".

Comunicación

2 Dada la función $f(x) = \ln x$:

a. Comprueba que es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ para cualquier número natural n.

b. Halla un intervalo de la forma $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ en el que haya algún punto donde la función tome el valor -2.

Razonamiento

3 Resuelve.

a. Comprueba que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

b. Calcula dicha solución con aproximación a las centésimas.

4 Demuestra que existe una raíz o solución para la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$.

5 Demuestra que existe un valor k tal que $f(k) = 1\,000$, sabiendo que $f(x) = x^2 + 100\cos x$.

6 ¿Para qué valores está definida la función $f(x) = \sqrt{x+1}$? ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar la función? ¿Para cuál valor de x, la función toma como valor 5? ¿Qué garantiza la existencia de ese valor?

Resolución de problemas

7 Un alpinista sale de un campamento a las 9:00 a. m. y llega a la cima de una montaña a las 8:00 p. m. A la mañana siguiente baja de la cima a las 9:00 a. m., y sigue el mismo camino hasta llegar al campamento a las 8:00 p. m. Utiliza el teorema de los valores intermedios para demostrar que hay un punto del camino por el cual el alpinista pasa los dos días exactamente a la misma hora.

Evaluación del aprendizaje

i Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y de 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124. ¿Existe algún punto entre los dos kilómetros donde el ciclista haya llevado una velocidad de 7 km/h?

ii Lee el enunciado del siguiente problema y explica qué teoremas se aplican y en qué momento.

Enunciado:
Sobre la superficie de la Tierra, en cualquier momento, hay dos puntos diametralmente opuestos que tienen exactamente la misma temperatura.

Solución:
Se toman dos puntos diametralmente opuestos en la superficie de la Tierra (Figura 4.30).

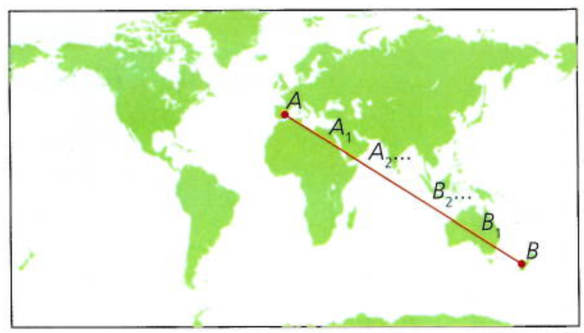


Figura 4.30

Para medir la diferencia de temperaturas entre un punto y su contrapuesto se determina el valor de la operación: Temperatura (punto An) – Temperatura (punto opuesto Bn).

Si esto se hace para cualquier par de puntos contrapuestos, se obtiene una función que será positiva si en el punto A hace más calor que en B, y viceversa. Si la temperatura fuera igual en un punto y su contrapuesto, la función valdría cero.

Habrá un par de puntos en los que el signo de la diferencia cambie (de positiva a negativa o viceversa). Como la función que se construyó es continua, también lo será una resta de temperaturas y, por tanto, debe haber al menos un cero. De modo que hay al menos un punto en la trayectoria con temperatura igual a la de su contrapuesto.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Cotas de una función

Saberes previos

¿Qué significa que una sucesión esté acotada? Escribe 2 ejemplos de sucesiones no acotadas.

Analiza

¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que puede tomar la función $f(x) = \text{sen}x$ en su dominio?

Conoce

5.1 Funciones acotadas

El valor máximo que toma la función sen$x$ es 1, pues es mayor que cualquier otro valor que pueda tomar la función; mientras que el valor mínimo es -1, ya que es menor que cualquier otro valor en el rango de la función. Observa la Figura 4.31. Así, 1 y -1 son el **máximo absoluto** y el **mínimo absoluto** de sen$x$, respectivamente.

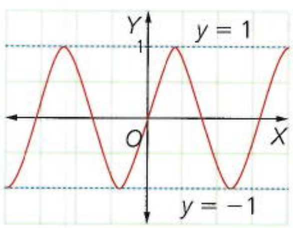


Figura 4.31

Dada una función f definida en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$:

- Se dice que f **está acotada superiormente en** $\mathbb{R}$ si se puede encontrar un número real M mayor o igual que todos los valores que toma $f(x)$ en $\mathbb{R}$. Al número M se le denomina **cota superior de** f.
- Se dice que f **está acotada inferiormente en** $\mathbb{R}$ si se puede encontrar un número real m menor o igual que todos los valores que toma $f(x)$ en $\mathbb{R}$. El número m es una **cota inferior de** f.
- Se dice que f está **acotada en** $\mathbb{R}$ si lo está superiormente e inferiormente a la vez.

Ejemplo 1

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, se tiene:

- Los valores que toma la función $f(x) = -x^2 + 3$ son siempre menores o iguales que 3, 4, 5... Se dice entonces que la función f está acotada superiormente (Figura 4.32).
- Los valores que toma la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ son siempre mayores que 0, -1, -2, -3... (Figura 4.33). Se dice entonces que la función g está acotada inferiormente.

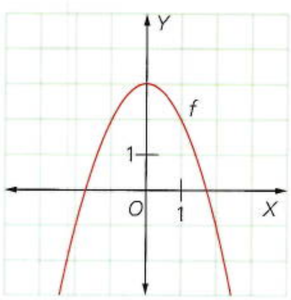


Figura 4.32

A la menor de las cotas superiores de una función definida en $\mathbb{R}$ se le denomina **supremo** de la función en ese conjunto. Si además, dicho supremo se alcanza para algún punto de $\mathbb{R}$, se dice que es el **máximo absoluto** de la función en ese conjunto.

A la mayor de las cotas inferiores de una función definida en $\mathbb{R}$ se le denomina **ínfimo** de la función en ese conjunto. Si, además dicho ínfimo se alcanza para algún punto de $\mathbb{R}$, se le denomina **mínimo absoluto** de la función en ese conjunto.

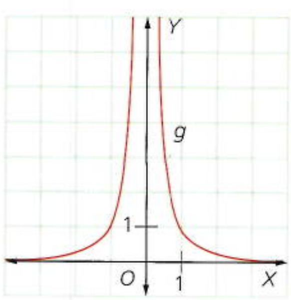


Figura 4.33

5.2 Teorema de Weierstrass

Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces está acotada en $[a, b]$.

Como consecuencia de este resultado, si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces tiene máximo y mínimo absolutos en ese conjunto.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x + 2, \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{5}{2}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

a. Estudia su acotación en los intervalos:

$[-1, 1]$ $[-2, 2]$ $[-3, 3]$

b. Estudia si la función toma el valor $M = 3$ y, en caso afirmativo, indica un intervalo de longitud 1 donde exista un punto que verifique esta propiedad.

2 Para cada una de las siguientes funciones, y considerando el intervalo señalado, estudia si es acotada e indica, si es que existen, el valor del supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

a. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ en $[1, 3]$

b. $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ en $[-1, 0]$

c. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 4}$ en $[-2, 1]$

d. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ en $[-2, 0]$

e. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ en $(0, 1]$

3 Observa la gráfica de la Figura 4.34 y, a partir de esta, determina lo que se indica a continuación.

a. La expresión algebraica

b. Su dominio y su recorrido

c. La acotación

d. Su supremo e ínfimo, si existen

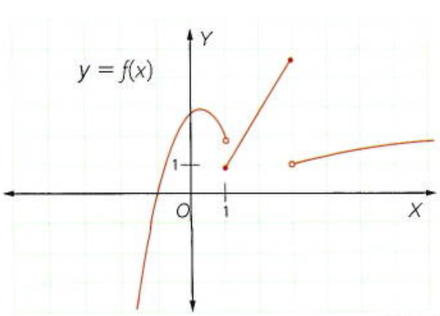


Figura 4.34

Resolución de problemas

4 Si una planta recibe una luz de intensidad x, la razón de fotosíntesis y, medida en unidades adecuadas, se encontró experimentalmente que estaba dada por $y = 150x - 25x^2$ para $0 \leq x \leq 5$.

a. ¿Existen los valores máximos y mínimos para esa función? Explica.

b. Si existen valores máximos y mínimos, hállalos y explica qué indican.

Evaluación del aprendizaje

i En una prueba sobre la velocidad de reacción de unos pilotos en una crisis simulada, se encontró que el tiempo total requerido para reaccionar variaba con la edad x del piloto de acuerdo con $T = 0{,}04\left(1700 - 80x + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, sobre un rango de edad de $30 \leq x \leq 55$. Dentro de este rango, ¿a qué edad corresponde el tiempo mínimo de reacción?

ii Un piscicultor cultiva peces en un lago. Cuantos más peces introduzca, habrá más competencia por los alimentos, y los peces ganarán peso en forma más lenta. De hecho, cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que gana cada pez durante una temporada está dada por $w = 600 - 3n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

a. Escribe una función P que muestre la producción total de peces por unidad de área.

b. ¿Es continua en $[0, 20]$ la función que escribiste? Si lo es, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo que toma la función? ¿Qué indican estos valores?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

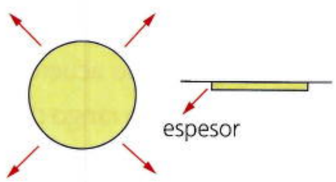
6 Derivada de una función en un punto. Velocidad media

Saberes previos

Si el tanque de agua de una casa se perfora, ¿qué debe tenerse en cuenta para calcular el tiempo en el que se desocupará?

Analiza

Al derramarse 100 m^3 de petróleo en el mar se ha formado una mancha con forma de cilindro recto circular.



- ¿Qué relación existe entre el radio de la mancha y el espesor de la misma?

Conoce

A medida que la mancha se expande en el mar, su radio aumenta; en tanto que el espesor se hace cada vez menor. Por ejemplo, la velocidad con que aumenta el radio de la mancha, cuando el radio es de 50 m, es cercana a los 20 m/h.

Uno de los conceptos básicos en cálculo es el de **derivada**, el cual está basado en la definición de límite y en la definición de un cociente conocido como **cociente incremental**.

Dada una función f se sabe que $f(a)$ corresponde al valor de f evaluada en el punto a y $f(a+h)$ corresponde al valor de f evaluada en el punto $a+h$; luego, al incrementar a en h, el incremento producido en f es $f(a+h)-f(a)$.

Se define el **cociente incremental** de la función f en el punto a como:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Cuando se considera un incremento h tan pequeño que tiende a cero, el cociente incremental es llamado **derivada de la función *f* en el punto *a***.

Ejemplo 1

El cociente incremental de la función $f(x)=2x^2-2$ en el punto $x=1$ es

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{[2(1+h)^2-2]-[2(1)^2-2]}{h}=\frac{[2(1+2h+h^2)-2]-(2-2)}{h}$$

$$=\frac{(2+4h+2h^2-2)-0}{h}=\frac{4h+2h^2}{h}=4+2h$$

Se dice que la función f es **derivable** en $x=a$ si existe el $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, es decir, si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es un número real.

Este número se denomina **derivada** de f en a, y se designa por $f'(a)$.

Se dice que f es derivable si f es derivable en $x=a$ para todo $a\in D(f)$.

De la definición se deduce que si f es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Ejemplo 2

La derivada en el punto $x=1$ de la función f definida en el ejemplo 1 está dada por $\lim\limits_{h\to 0} 4+2h=4$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Si se llama x a la expresión $a + h$, entonces $h = x - a$ tiende a 0 solo cuando x tiende a a. Por tanto, otra forma de escribir $f'(a)$ sería:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ejemplo 3

Dada la función $f(x) = 5x - 3$, observa como se halla la derivada en $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{5x - 3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{5x - 10}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{5(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 5 = 5$$

6.1 Velocidad media y velocidad instantánea

La ecuación que establece la relación entre la distancia recorrida por un objeto en caída libre es $s(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0$, donde $s(t)$ representa la posición del objeto transcurrido un tiempo t; g es la constante gravitacional (9,8 m/s^2); v_0, la velocidad inicial, y s_0, la altura inicial.

Si $s(t)$ es la posición de un objeto en movimiento después de t segundos, ¿qué representan el cociente incremental y la derivada en un punto t_0 para una función $s(t)$?

$s(t_0)$ es la posición del objeto en un tiempo t_0.

$s(t_0 + h)$ es la posición del objeto en un tiempo $t_0 + h$ segundos, de donde $s(t_0 + h) - s(t_0)$ es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$.

Luego, el cociente incremental $\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ es la distancia recorrida en h segundos, esto es conocido en física como la **velocidad media** en el intervalo de tiempo h.

La derivada corresponde a $\lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$; como el intervalo de tiempo se aproxima a 0, la derivada corresponde a la velocidad en el instante t_0, por esta razón es conocida como **velocidad instantánea** (v_i) en el tiempo t_0.

6.2 Aceleración media e instantánea

Se llama aceleración media $\bar{a}$ de un móvil en el intervalo de tiempo $t_0 + h$ al siguiente cociente: $\bar{a} = \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h}$

De otra parte, la aceleración instantánea (a_i) en t_0, se define así:

$$a_i = \lim_{h \to 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = v'(t_0).$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Derivada de una función en un punto. Velocidad media

Ejemplo 4

Un objeto se mueve en una trayectoria rectilínea horizontal, con sentido positivo hacia la derecha, siendo, en cada instante t, su posición $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2$ (Figura 4.35). Para calcular la velocidad y la aceleración instantáneas se evalúa el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^3-3(t+h)^2+2-(t^3-3t^2+2)}{h}$$

Luego de desarrollar los productos notables y simplificar se obtiene que la velocidad instantánea (v_i) del objeto es:

$$v_i = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3t^2+3th+h^2-6t-3h)}{\cancel{h}} = 3t^2-6t$$

La aceleración instantánea (a_i) del objeto es:

$$a_i = \lim_{h\to 0}\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(t+h)^2-6(t+h)-(3t^2-6t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6ht-6h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6\cancel{h}(t-1)}{\cancel{h}} = 6t-6.$$

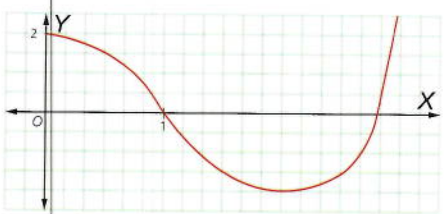


Figura 4.35

6.3 Razones de cambio

El concepto de **razón de cambio** se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas, tendrán una razón de cambio igual a 0.

Ejemplo 5

Una empresa elabora cajas metálicas sin tapa con láminas cuadradas de 12 cm de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblándolos hacia arriba, como muestra la Figura 4.36. Para hallar la razón de cambio del volumen con respecto a x se tiene en cuenta que x es el lado del cuadrado que se va a cortar y V el volumen de la caja resultante. Entonces:

$$V(x) = x(12-2x)(12-2x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

La razón de cambio del volumen con respecto al valor de x que se corta en las esquinas se halla al calcular:

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}$$

Luego de efectuar todos los cálculos se llega a que tal razón de cambio es $12x^2 - 96x + 144$.

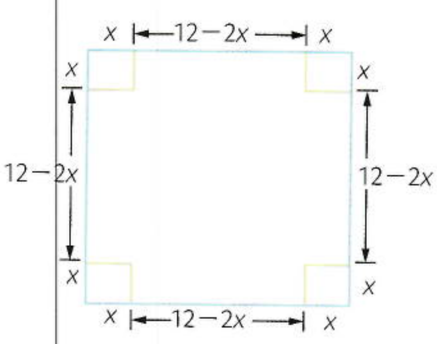


Figura 4.36

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Decide aplicando la definición de derivada, si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados y calcula, si existe, la derivada.

a. $f(x) = x^3$ en $x = 1$

b. $f(x) = \text{sen}x$ en $x = 0$

c. $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 2$

d. $f(x) = |x|$ en $x = 0$

Razonamiento

2 Estudia si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 0 \\ 3x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

b. $f(x)\, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x \le 1 \\ x^3 - x + 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 1 \\ 2x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

3 Explica por qué no existen las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a. $f(x) = |x - 5|$ en $x = 5$

b. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ en $x = 2$

c. $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ en $x = 4$

4 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{si } x \ne 1 \\ -1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

b. $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11, & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ en $x = 2$

Resolución de problemas

5 Se inyecta aire a un globo esférico a razón de 28 dm^3/min. ¿A qué razón varía el radio cuando este mide 1 metro?

6 En una empresa se fabrican cajas metálicas sin tapa con láminas cuadradas de 12 cm de lado, recortando cuadros iguales en las esquinas y doblándolos hacia arriba, como se indicó en la página anterior.

a. Comprueba que la razón de cambio del volumen con respecto a la longitud de x que se recorta en las esquinas es $12x^2 - 96x + 144$.

b. Traza la gráfica de $V(x)$ y encuentra aquel valor de x para el que el volumen de la caja sea el máximo posible.

Evaluación del aprendizaje

i Un móvil se desplaza de acuerdo con la expresión $s(t) = 4t^2 + 5t - 4$. Calcula la velocidad y aceleración instantánea del móvil para $t = 5$.

ii Una enfermedad azota una ciudad, y los médicos estiman que el número de personas enfermas está dado por la función $f(x) = -x^3 + 60x^2$, donde x es el tiempo medido en días desde el principio de la epidemia.

a. ¿Cuántas personas se habrán enfermado después de 8, 10 y 15 días, respectivamente?

b. ¿Cuál es la razón de propagación de la enfermedad con respecto al tiempo?

iii Andrés pone una taza de café en el microondas, esta alcanza una temperatura de 80° C. Luego, la saca y la deja expuesta a 20° C, que es la temperatura ambiente en ese momento, y obtiene la expresión $T(t) = 80 - 3t + 0{,}16t^2$ que relaciona dicha temperatura con el tiempo t.

Calcula la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

7 Medidas e instrumentos de medida de valores medios

Saberes previos

Un automóvil acelera de tal forma que pasa de una velocidad de 60 km/h a una de 100 km/h. A partir de esa información, ¿puede determinarse el valor de su aceleración?

Analiza

¿Qué pesa más 1 kg de plomo o 1 kg de paja?

Conoce

Si se tiene 1 kg de cada uno de los dos materiales plomo y paja, la masa de ambos es la misma, pero la paja ocupará mucho más espacio pues su densidad es mayor.

Una **magnitud** es cualquier característica de un cuerpo que es posible medir: longitud, masa, temperatura, energía, etc.

Medidas directas: cuando es posible utilizar algún instrumento que directamente da su valor. Es el caso de la masa, la longitud, el tiempo y la temperatura estas pueden medirse con la ayuda de una balanza, un metro, un reloj o un termómetro, respectivamente.

Medidas indirectas: son aquellas que no se pueden determinar con ningún aparato y por eso debe recurrirse a la medida de otras magnitudes a partir de las que pueden obtenerse. Es el caso de la velocidad de un móvil que compara la medida del espacio recorrido por este en un cierto lapso y la densidad de un cuerpo que se calcula a partir de su masa y su volumen.

7.1 Velocidad media y rapidez media

Se considera un cuerpo que se mueve a lo largo del eje X desde un punto P a otro Q. Su posición en el punto P es x_0, en el tiempo t, y su posición en el punto Q es x_f en el tiempo x_f. La **velocidad media** (v_m) se define como la razón del desplazamiento y el intervalo de tiempo: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0}$

El cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo total empleado se conoce como **rapidez media** y se define como: $v_m = \frac{d}{t}$.

Ejemplo 1

Un atleta recorre 100 m en 12 s, luego da la vuelta y recorre 50 m en 30 s en dirección al punto donde inició su movimiento.

La velocidad media del atleta es $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} = \frac{50\text{ m} - 0\text{ m}}{42\text{ s}} = 1{,}19\text{ m/s}$

Su rapidez media es: $v_m = \frac{d}{t} = \frac{100\text{ m} + 50\text{ m}}{42\text{ s}} = 3{,}57\text{ m/s}$

7.2 Aceleración media

Se considera un cuerpo que se mueve a lo largo del eje X a una velocidad v_0 en el tiempo t_0 y una velocidad v_f en el tiempo t_f.

La **aceleración media** (a_m) se define como la razón de la diferencia de sus velocidades en el intervalo de tiempo $t_f - t_0$, así: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

Un fabricante afirma que el auto que produce acelera desde el reposo hasta una velocidad de 42 m/s en 8 s.

Según esa información la aceleración que logra el auto es

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{42 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{8 \text{ s}} = 5{,}25 \text{ m/s}^2.$$

7.3 Densidad media

La **densidad media** es la razón entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa.

Ejemplo 2

La densidad media de una pepita de oro con una masa de 57,9 g y volumen de 3 cm^3 es: $\text{Densidad} = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{57{,}9 \text{ g}}{3 \text{ cm}^3} = 19{,}3 \text{ g/cm}^3$

Actividades de aprendizaje

Modelación

1. Un móvil se desplaza en una trayectoria rectilínea de manera que si la asociamos con un eje X de coordenadas su posición en el instante en que un reloj marca 20 s es 50 m, cuando el reloj indica 30 s la posición es 70 m, cuando el reloj indica 40 s la posición es 60 m y cuando marca 50 s es 10 m. Calcula la velocidad media entre los instantes:

   a. 20 y 30 s
   b. 20 y 40 s
   c. 20 y 50 s
   d. 30 y 40 s

Resolución de problemas

2. Una pelota rueda por una cuesta inclinada durante 5 segundos, a una aceleración de 8 m/s^2. Si la pelota tiene una velocidad inicial de 2 m/s cuando comienza su recorrido, ¿cuál será su velocidad al final del recorrido?

3. Un automovilista viaja 15 km hacia el sur, desde allí otros 15 km hacia el este y finalmente, 10 km hacia el norte. Determina la distancia a la que queda finalmente del origen.

4. Un objeto pasó de una temperatura de 20° C a 40 ° C en 20 minutos. Explica cómo hallarías su temperatura media.

Evaluación del aprendizaje

i. Un objeto se mueve entre 0 y 10 segundos y su movimiento está descrito por la siguiente gráfica, en la cual ele eje x es el tiempo medido en segundos.

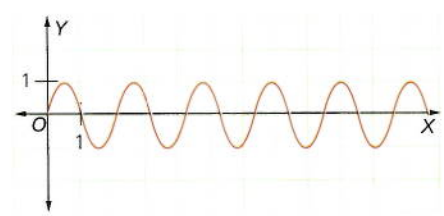


Figura 4.37

   a. ¿Cuál puede ser el objeto al que se refiere la gráfica?
   b. ¿Cuál es la aceleración media entre los tiempos 1 s y 2,5 s?

ii. Un camión de bomberos aumenta su velocidad de 0 a 21 m/s en 3,5 segundos. ¿Cuál es su aceleración?

iii. Calcula la densidad de una materia que tiene una masa de 13 450 gramos si ocupa un volumen de 32 cm^3.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8 Definición geométrica de la derivada

Saberes previos

¿Qué caracteriza a una recta tangente a una circunferencia en un punto? ¿Puede trazarse más de una recta tangente a una circunferencia por el mismo punto?

Analiza

Nairo participa en una prueba de montaña. En la Figura 4.38 se muestra parte de su recorrido. Observa que en el punto A de la trayectoria se ha trazado una recta tangente a la curva.

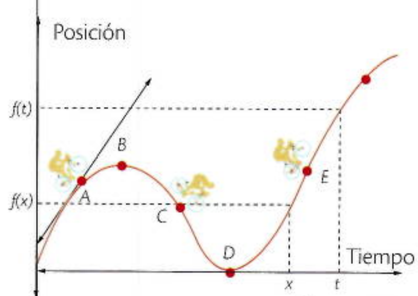


Figura 4.38

- ¿Qué se puede decir de la recta tangente a la curva en el punto B?

Conoce

Cuando se traza la recta tangente al punto B, esta resulta ser paralela al eje X y su inclinación es nula.

Como se trata de una gráfica de posición–tiempo, se puede afirmar que la velocidad de Nairo en el punto B es 0 y que se encuentra en un estado de reposo instantáneo.

8.1 Recta tangente

Geométricamente para cada valor de $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mide la pendiente de la recta que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a+h, f(a+h))$.

Cuando h se aproxima a 0, es decir, cuando Q se aproxima a P, puede ocurrir lo siguiente:

- **Caso I:** las rectas que unen a P con los puntos Q se aproximan a una recta t que, intuitivamente, es la tangente en P (Figura 4.39). Entonces, existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y su valor denotado por $f'(a)$ es, precisamente, la pendiente de t.
- **Caso II:** las rectas que unen a P con los puntos Q no se aproximan a ninguna recta (Figura 4.40). En este caso, no existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

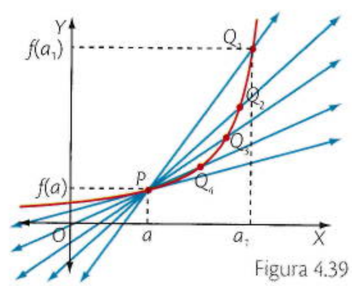


Figura 4.39

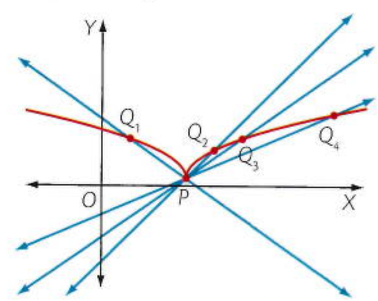


Figura 4.40

Si f es una función derivable en $x = a$, se define la **tangente** en $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene por pendiente el número $f'(a)$. Su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo 1

La recta tangente de $f(x) = x^2$ en $P(2, f(2))$ tiene como pendiente $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Se reemplaza $f(2) = 4$ y $f'(2) = 4$ en la fórmula de la ecuación de la recta tangente: $y - 4 = 4(x - 2)$ y se grafica (Figura 4.41).

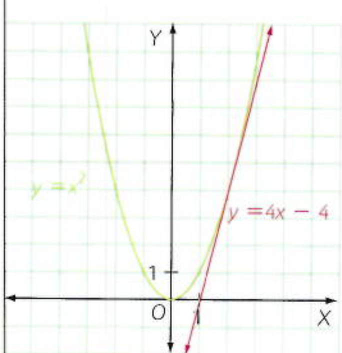


Figura 4.41

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8.2 Recta normal

La **recta normal** en P es la recta que pasa por $P(a, f(a))$ y es perpendicular a la tangente, es decir, tiene como pendiente el número $-\dfrac{1}{f'(a)}$, por lo que su ecuación es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

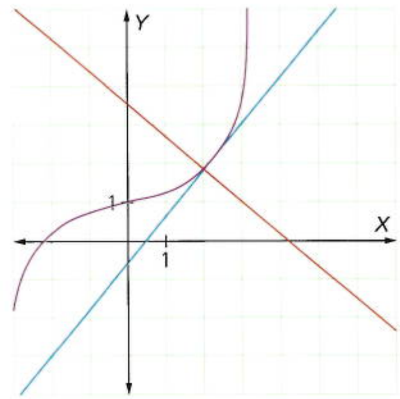


Figura 4.42

Hay funciones, como $t(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$, que tienen tangente vertical en un punto, aunque no son derivables en él. De esta forma, puede identificarse el concepto de función derivable en $x = a$ con el de existencia de una recta tangente no vertical en $P(a, f(a))$.

Ejemplo 2

Las ecuaciones de la recta tangente y normal a $f(x) = 0{,}1x^3 + 1$ en $P(2, f(2))$ se obtienen calculando $f(2)$. Como, $f(2) = 1{,}8$, entonces, la pendiente de la recta tangente en $P(2; 1{,}8)$ es $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}1x^3 + 1 - 1{,}8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}1x^3 - 0{,}8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{0{,}1(x^3 - 8)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}1(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 0{,}1(x^2 + 2x + 4) = 1{,}2$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - 1{,}8 = 1{,}2(x - 2)$, la cual es equivalente a $y = 1{,}2x - 0{,}6$.

La pendiente de la recta normal es $-\dfrac{1}{f'(2)} = -\dfrac{1}{1{,}2} = -\dfrac{5}{6}$ y la ecuación de la recta normal es $y - 1{,}8 = -\dfrac{5}{6}(x - 2)$, que es equivalente a $y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{52}{15}$.

Observa la Figura 4.42.

Ejemplo 3

Para hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ en $x = -1$, se calcula $f(-1) = -11$.

Se halla $f'(-1)$: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 - (-11)}{x + 1}$.

De donde: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x + 10}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(2x^2 - 7x + 10)(x + 1)}{x + 1}$.

Así, $f'(-1) = 2(-1)^2 - 7(-1) + 10 = 19$. La ecuación de la recta tangente es $y = 19x + 8$; la pendiente de la recta normal es $-\dfrac{1}{19}$, y su ecuación es $y = -\dfrac{1}{19}x - \dfrac{210}{19}$.

Observa la Figura 4.43.

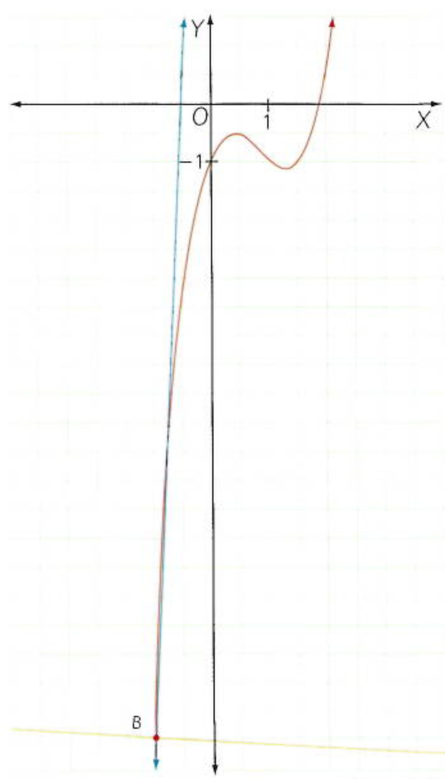


Figura 4.43

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8 Definición geométrica de la derivada

8.3 Teorema del valor medio o de Lagrange

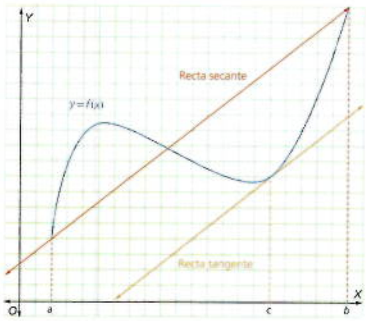


Figura 4.44

El teorema del valor medio establece que si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe un punto c pertenece (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La interpretación geométrica del teorema del valor medio indica que hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante. (Figura 4.44)

El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, en el que $f(a) = f(b)$.

Ejemplo 4

Para ver si es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $[0, 5]$ (Figura 4.45), se procede así:

El teorema de Rolle establece que para una función f que es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) que además cumple que $f(a) = f(b)$, existe como mínimo un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Debe verificarse que la función f cumple todas estas condiciones.

- f es continua en $[0, 5]$ ya que por ser polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.
- Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica, entonces es derivable en particular en $(0, 5)$.
- Debe verificarse ahora que $f(0) = f(5)$.

Efectivamente $f(0) = 0^2 - 5(0) + 6 = 6$ y $f(5) = 5^2 - 5(5) + 6 = 6$.

Luego, se puede afirmar que f satisface el teorema de Rolle.

Para hallar el punto c para el cual $f'(c) = 0$, se deben encontrar los valores x que anulan la primera derivada de la función.

Haciendo el cálculo, se tiene que $f'(x) = 2x - 5$, si se iguala a 0 se obtiene que $x = \frac{5}{2}$.
El valor de c que se busca es $c = \frac{5}{2}$.

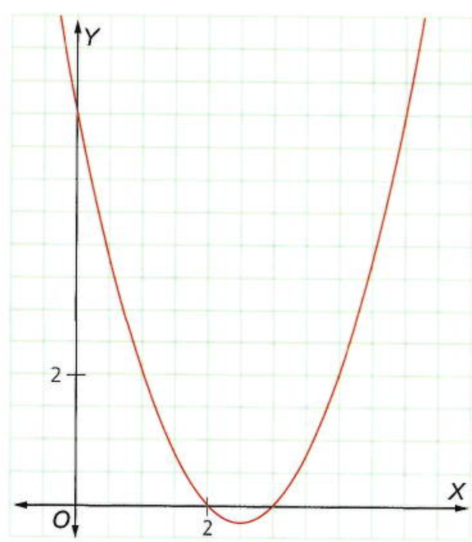


Figura 4.45

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la ecuación de la recta tangente a cada curva en el punto indicado. Comprueba tu respuesta trazando la gráfica de la función y la de la recta tangente.

a. $f(x) = x^2 + 1$ en $A(3, f(3))$

b. $g(x) = \sqrt{x+1}$ en $B(3, g(3))$

Razonamiento

2 Calcula $f(2)$ si la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3, 0)$, sabiendo que $f'(2) = -1$.

3 Halla los puntos de intersección de las funciones $g(x) = x$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Comprueba que en dichos puntos la tangente a $f(x)$ es perpendicular a la función $g(x) = x$.

4 Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2$, trazadas desde el punto $P(1, -2)$. Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.

Resolución de problemas

5 Lee y resuelve.

Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Halla los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P(2, 4)$.

6 Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$. En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a. Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b. Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula interseca al eje X.

7 ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x|$ en $[0, 4]$? Explica.

8 Verifica que se cumple el Teorema del valor medio para $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ en el intervalo $[2, 5]$.

9 La posición de un objeto que se mueve en línea recta está dada por la función $s(t) = 2t^2 + 1$, donde s está medida en metros y t en segundos.

a. Determina la pendiente de la recta en un punto arbitrario.

b. Calcula la velocidad instantánea del objeto para $t = 1$ s y $t = 5$ s.

10 Una partícula se mueve en el plano XY a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{x^2 + 9}$. En el punto $P(4, 5)$ abandona la curva y sigue por la recta tangente a dicha curva.

Calcula el punto R del eje Y por el que pasará la partícula. ¿Existe algún otro punto Q de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto Q corte el eje Y en el mismo punto R anterior?

Evaluación del aprendizaje

i Calcula el área del triángulo de la Figura 4.46 formado por el eje de abscisas y las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 + 1$ en el punto $P(1, 2)$.

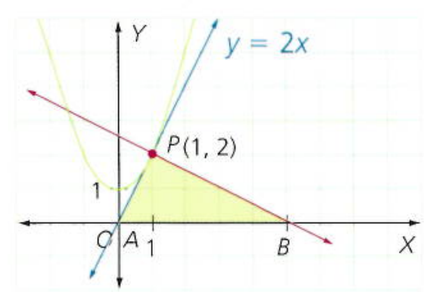


Figura 4.46

ii Verifica que se cumple el Teorema del valor medio para $f(x) = x^3 + x - 1$ en el intervalo $[0, 2]$ y encuentra todos los números c que lo satisfacen.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

9 Derivadas sucesivas y derivadas laterales

Saberes previos

¿Es siempre la derivada de una función otra función?

Analiza

Esboza la gráfica de $y = f'(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra en la Figura 4.47.

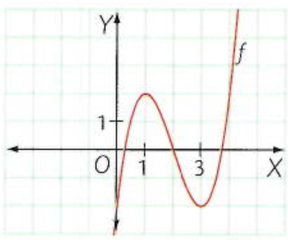


Figura 4.47

Conoce

9.1 Función derivada. Derivadas sucesivas

A partir de la gráfica de $y = f(x)$ se puede concluir que la tangente en los puntos de abscisa 1 y 3 es horizontal, es decir, $f'(1) = 0, f'(3) = 0$, por lo que la gráfica de $y = f'(x)$ cortará el eje X en los puntos de abscisa 1 y 3.

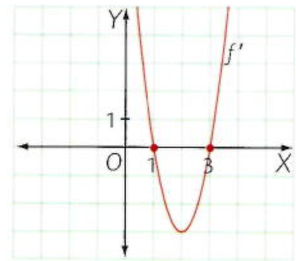


Figura 4.48

Si $x < 1$ o $x > 3$, la pendiente de la tangente en la gráfica de f es positiva, por lo que $f'(x) > 0$.

Si $1 < x < 3$, la pendiente de la tangente es negativa, es decir $f'(x) < 0$.

Así, la gráfica de $y = f'(x)$ será como la de la Figura 4.48.

La función que a cada número x del dominio de f le asigna el número $f'(x)$, si existe, se denomina **función derivada** de f o derivada de f, y suele representarse con f'. También se puede hablar de la función derivada de f', es decir, de la función $(f')'(x)$, que suele representarse por $f''(x)$ y se conoce como **segunda derivada** de f.

De forma análoga se definen las derivadas tercera, cuarta... y de cualquier orden. En general, la derivada enésima, representada por $f^{(n)}(x)$, se define como la derivada de la función $f^{(n-1)}(x)$, es decir, $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)'(x)$, fórmula válida para cualquier número natural n mayor que 1.

Entre otras aplicaciones, la segunda derivada es muy útil para estudiar la forma de la gráfica de la función y, en concreto, su curvatura.

9.2 Derivadas laterales

Hay funciones no derivables en $x = a$ porque no existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, aunque sí existen $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Luego:

- La **derivada lateral de $f(x)$ en $x = a$ por la izquierda**, si existe, es:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Análogamente, la **derivada lateral de $f(x)$ en $x = a$ por la derecha** es

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Una función f es derivable en $x = a$, si y solo si existen $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$, y estas son iguales.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

En la Figura 4.49, se muestra la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

De la gráfica puede deducirse que no hay tangente en $x = 1$.

Si $h \neq 0$ y se calcula $f'(1)$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \begin{cases} \dfrac{(1+h)^2-1}{h} = h+2, \text{ si } h<0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 \\ \dfrac{\dfrac{(1+h)^2+1}{2}-1}{h} = \dfrac{h}{2}+1, \text{ si } h>0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1 \end{cases}$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

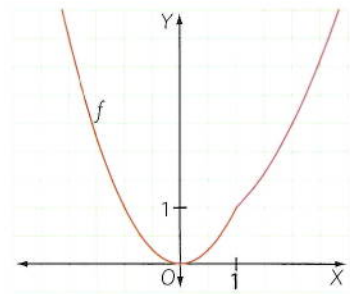


Figura 4.49

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 ¿Existe alguna derivada lateral de f en $x = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \leq 1 \\ x+2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejercitación

2 Calcula las derivadas laterales en $x = 0$ de la siguiente función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + 1, \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Es f derivable en $x = 0$?

3 Calcula las derivadas laterales en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < -2 \\ -4(x+1), & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 3x^2 - 4, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 12x + 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿Es derivable la función en dichos puntos?

4 Calcula a, b y c para que la función sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0) = f(4)$ y $f(x)$ está definida a trozos de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } x < 1 \\ cx, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Evaluación del aprendizaje

i Esboza las gráficas de $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ para una función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cuya gráfica es la de la Figura 4.50.

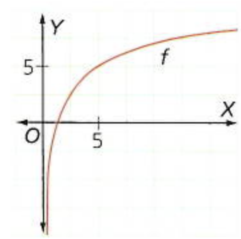


Figura 4.50

ii Calcula las derivadas laterales para $f(x) = |x|$ en $x = 0$, y decide su derivabilidad en dicho punto.

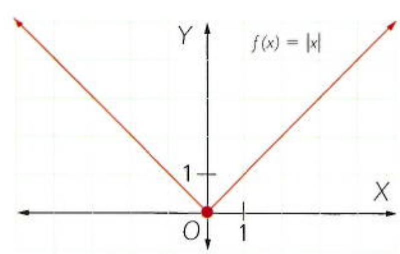


Figura 4.51

iii Halla las derivadas laterales en $x = 0$ de la función f definida así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x}, \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10 Cálculo de derivadas

Saberes previos

¿Cuál es la pendiente de una recta cuya ecuación general es $4x - 5y = 8$? ¿Qué indica esa valor?

Analiza

Andrés debe analizar si la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ es continua y derivable en el punto (0, 0).

Conoce

Para saber lo que ocurre con la función dada, se traza su gráfica.

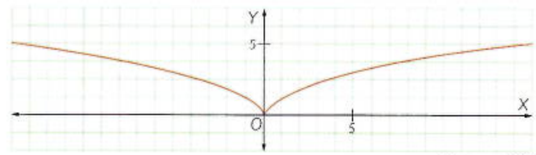


Figura 4.52

En ella, se observa que, a pesar de que la función es continua en (0, 0), por ese punto no es posible trazar una recta tangente a la curva.

10.1 Continuidad y derivabilidad

Existe una importante relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función en un punto, que es fundamental para la demostración de las reglas de derivación.

Si f es una función **derivable** en $x = a$, entonces f es **continua** en $x = a$.

Comprobar este teorema implica que debe demostrarse que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ o, lo que viene siendo lo mismo, si $x = a + h$, entonces se demuestra que $\lim\limits_{h \to 0} f[(a + h) - f(a)] = 0$.

Si $h < 0$, se escribe $f(a+h) - f(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot$ De donde:

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$$

10.2 Derivada de $f(x) = x^n$, siendo n un número real

Para hallar este resultado se aplica la definición de derivada para un punto x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Desarrollando $(x + h)^n$ por el binomio de Newton:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2(\ldots) - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} = \frac{h[nx^{n-1} + h(\ldots)]}{h} = nx^{n-1}$$

En general si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejemplo 1

Para hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$, haciendo uso del resultado anterior, se puede escribir la función de la forma $f(x) = (x)^{\frac{1}{2}}$.

Así, $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10.3 Derivada de la suma y de la diferencia de funciones

Si f y g tienen derivada en el punto de abscisa x, entonces la función $F(x) = f(x) + g(x)$ también tiene derivada en el punto de abscisa x y es:

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La demostración de este resultado se obtiene aplicando la definición de derivada $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. En el caso de la derivada de una diferencia de funciones se cumple que, si $F(x) = f(x) - g(x)$, entonces $F'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Ejemplo 2

Observa cómo se calcula la derivada de $F(x) = f(x) + g(x)$ con $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$.

$F(x) = f(x) + g(x) = x^3 + x^2$

$F'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x$

10.4 Derivada de $F(x) = kf(x)$, con k un número real

Sea k un número real y f una función derivable en $x = a$, entonces existe y es derivable la función producto de f por k.

$$\text{Si } F(x) = k \cdot f(x), \text{ entonces } F'(x) = k \cdot f'(x).$$

Con estos tres cálculos de derivadas elementales, se puede obtener de forma inmediata la derivada de cualquier función polinómica.

Si $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ entonces:

$$F'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1.$$

Ejemplo 3

La derivada de la función $f(x) = 4x^5$ es $f'(x) = 5 \cdot (4)x^{5-1} = 20x^4$.

Ejemplo 4

La derivada de $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{6}{7}}$ es $f'(x) = \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{6}{7}-1}$.

Al efectuar las operaciones y simplificar se obtiene:

$$f'(x) = \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{6}{7}-1} = \frac{9}{14}x^{-\frac{1}{7}} = \frac{9}{14x^{\frac{1}{7}}} = \frac{9}{14\sqrt[7]{x}}$$

Ejemplo 5

La derivada de una función constante de la forma $f(x) = k$ es 0.

Si $f(x) = kx$, entonces $f'(x) = k$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10 Cálculo de derivadas

10.5 Derivada del producto y del cociente de funciones

Si f y g son derivables en $x = a$, entonces existe y es derivable la función producto de f y g, cumpliéndose $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

Si $g(a) \neq 0$, también existe y es derivable, la función cociente entre f y g es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Ejemplo 6

- Si se tiene que $f(x) = (3x^4 + 2x^2 + 7)$ y $g(x) = (5x^2 + 3x - 1)$, entonces $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

  Luego:

  $$F'(x) = (12x^3 + 4x)(5x^2 + 3x - 1) + (3x^4 + 2x^2 + 7)(10x + 3)$$
  $$= 90x^5 + 45x^4 + 28x^3 + 18x^2 + 66x + 21$$

- Si $f(x) = x^3 + 4$ y $g(x) = 3x^3$, entonces $T(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Por tanto:

$$T'(x) = \frac{(3x^2)(3x^3) - (x^3 + 4)(9x^2)}{(3x^3)^2} = \frac{9x^5 - (9x^5 + 36x^2)}{9x^6} = \frac{-36x^2}{9x^6} = -\frac{4}{x^4}$$

10 .6 Derivada del cuadrado de una función

Dada la función $f(x)$ continua en a, se aplica nuevamente la definición de derivada para deducir el valor de $(f^2)'(a)$.

$$(f^2)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^2(a+h) - f^2(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{[f(a+h) + f(a)] \cdot [f(a+h) - f(a)]}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}[f(a+h) + f(a)] \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Como f es continua en a entonces $\lim_{h \to 0}[f(a+h) + f(a)] = 2f(a)$, por lo que $(f^2)'(a) = 2f(a)f'(a)$.

Ejemplo 7

Para hallar la derivada de la función $h(x) = (3x^2 + 5x + 4)^2 (2x^4 + 5)^2$, se aplica el criterio correspondiente; es decir, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ y la derivada del cuadrado de una función.

Si se considera $f(x) = (3x^2 + 5x + 4)^2$ y $g(x) = (2x^4 + 5)^2$, entonces:

$f'(x) = 2(3x^2 + 5x + 4)(6x + 5)$ por ser la derivada del cuadrado de una función.

$g'(x) = 2(2x^4 + 5)(8x^3)$ por ser la derivada del cuadrado de una función.

$(f \cdot g)' = 2(3x^2 + 5x + 4)(6x + 5)(2x^4 + 5)^2 + (3x^2 + 5x + 4)^2\, 2(2x^4 + 5)(8x^3)$

$(f \cdot g)' = 2(3x^2 + 5x + 4)(2x^4 + 5)(36x^5 + 50x^4 + 32x^3 + 30x + 25)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla la derivada de las funciones dadas.

a. $f(x) = 5x^3$

b. $f(x) = x^4 - 3x$

c. $f(x) = (x^2 + 1)^2$

d. $f(x) = (x^4 + 3x^2)(9 - x^2 + 6x - 2)$

e. $f(x) = (2x - 7)(5 - 3x)$

f. $f(x) = 3x^2(4x^3 - x)$

2 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = (x - 1)^2(3x^2 - x + 4)$

b. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 + x^2 + 1}$

3 Calcula lo que se indica en cada caso dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$.

a. $f'(x)$ y $g'(x)$ b. $(5f)'(x)$

c. $f'(x) + g'(x)$ d. $(2f - 3g)'(x)$

e. $(f^2)'(x)$ f. $(f \cdot g)'(x)$

g. $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)$ h. $\left(\dfrac{5}{g^2}\right)'(x)$

4 Define a trozos la función $f(x) = \text{mín}\left(\dfrac{x^2}{2}, \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ y calcula $(f \circ f')(2)$.

Modelación

5 Representa en la calculadora gráfica o el computador la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ y aproxima los puntos en los que su gráfica admite una tangente paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

Razonamiento

6 Demuestra esta sencilla fórmula que da la derivada segunda de un producto:

$$(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

7 Supón que f y g son funciones derivables en todos los números reales, tales que:

i. $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$ ii. $f'(x) = -g(x)$; $g'(x) = f(x)$

a. Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo x.

b. Supón que F y G son otro par de funciones derivables que verifican i, ii y considera la función

$$k(x) = [f(x) - F(x)]^2 + [g(x) - G(x)]^2.$$

Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado para decidir qué relación existe entre f y F, y entre g y G.

c. Muestra dos funciones f y g que verifiquen i y ii.

Resolución de problemas

8 Sea $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde f y g son funciones derivables.

a. Encuentra fórmulas para $h^{II}(x)$, $h^{III}(x)$ y $h^{IV}(x)$ en términos de f, g y sus derivadas.

b. ¿Te sugieren estos cálculos alguna expresión para hallar $h^{(n)}(x)$?

Evaluación del aprendizaje

Considera una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i. $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ para cualesquiera x_1 y x_2.

ii. $f(0) \neq 0$

iii. $f'(0) = 1$

a. Demuestra que $f(0) = 1$.
Indicación: Toma $x_1 = x_2 = 0$ en el literal i.

b. Demuestra que $f(x) \neq 0$ para todo x.
Indicación: Toma $x_2 = -x_1$ en el literal i.

c. Prueba que $f'(x) = f(x)$ para todo número real x.

d. Sea g otra función que satisface las condiciones i, ii, iii, y considera $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Demuestra que k es derivable en todos los números reales, y obtén $k'(x)$. ¿Qué relación hay entre f y g?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11 Derivada de funciones compuestas e inversas

Saberes previos

Si $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = x - 1$, ¿A qué es igual $f(g(x))$ y $g(f(x))$? ¿Son iguales?

Analiza

El nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es $M(m) = (1 + 0{,}6m)$ partes por millón (ppm) cuando el número de personas es m (en miles). Si la población en miles en el momento t es de $P(t) = 400 + 30t + 0{,}5t^2$:

- Expresa el nivel de monóxido de carbono como una función del tiempo y calcula el nivel de monóxido de carbono en $t = 5$.

Conoce

Para expresar el monóxido de carbono en función del tiempo, se requiere establecer la **función compuesta** $M \circ P$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M[P(t)] &= M(400 + 30t + 0{,}5t^2) \\ &= 1 + 0{,}6(400 + 30t + 0{,}5t^2) \\ &= 241 + 18t + 0{,}3t^2 \end{aligned}$$

Para $t = 5$: $M[P(5)] = 241 + 18(5) + 0{,}3(5)^2 = 338{,}5$ ppm.

11.1 Regla de la cadena

El resultado fundamental para obtener la derivada de la composición de funciones se conoce como **regla de la cadena**.

Si g es derivable en el punto $x = a$ y f es derivable en $g(a)$, la función $f \circ g$ es derivable en $x = a$, y su derivada es:

$$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a)$$

Cuando se aplica la regla de la cadena, es necesario reconocer que la función dada se puede reescribir como la composición de dos funciones elementales simples.

Ejemplo 1

Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^5$, se tiene que la composición $g \circ f$ es $(g \circ f)(x) = g(x^2 + 3) = (x^2 + 3)^5$.

En este caso, si se considera $u = x^2 + 3$, entonces:

$g(u) = u^5$ y $g'(u) = 5u^4 \cdot u'$

Reemplazando el valor de u en la expresión anterior se tiene:

$g'(u) = 5(x^2 + 3)^4 \cdot 2x = 10x \cdot (x^2 + 3)^4$

11.2 Aplicación sucesiva de la regla de la cadena

Si una función se obtiene por composición de tres o más funciones, para obtener su derivada se aplica la asociatividad de la composición y la regla de la cadena. Por ejemplo, si $j(x) = (f \circ g \circ h)(x)$, su derivada se calculará como:

$$j'(x) = (f \circ g \circ h)'(x) = f'[(g \circ h)(x)] \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x)$$

Ejemplo 2

Para calcular la derivada de $j(x) = (\sqrt{3x-2} + 5)^3$, se puede escribir:

$j(x) = (f \circ g \circ h)(x)$, con $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt{x} + 5$ y $h(x) = 3x - 2$

$$j'(x) = 3(\sqrt{3x-2} + 5)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}\right) \cdot 3 = \frac{9(\sqrt{3x-2}+5)^2}{2\sqrt{3x-2}}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11.3 Derivada de funciones inversas

Se sabe que si las funciones f y f^{-1} son una la inversa de la otra, entonces $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Además, sus gráficas son simétricas con respecto a la bisectriz del primer cuadrante, por lo que, si f tiene tangente no horizontal en el punto $P(a, f(a))$, entonces f^{-1} tendrá tangente no vertical en el punto $Q(f(a), a)$; es decir, si $f'(a) \neq 0$, entonces existirá $(f^{-1})'[f(a)]$.

Para calcular la **derivada de f^{-1}**, inversa de f, es conveniente aplicar la regla de la cadena a la función $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Así, derivando ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$(f \circ f^{-1})'(x) = x'.$$

Por lo tanto, $f'[f^{-1}(x)] \cdot (f^{-1})'(x) = 1$.

De donde:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Ejemplo 3

La inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es $y = x^3$ (Figura 4.53). Luego, $(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$.

Al derivar esta última expresión, aplicando la regla de la cadena en la función del lado izquierdo de la ecuación, se obtiene esta igualdad:

$3(\sqrt[3]{x})^2 \cdot (\sqrt[3]{x})' = 1$, por lo que $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

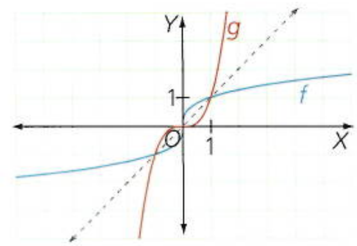


Figura 4.53

Ejemplo 4

Si f es una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{3}$, para determinar la ecuación de la tangente a $f(x)$ en $(1, 2)$, se sabe que $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(2)]}$.

Así, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{f'(1)}$, y como $f(1) = 2$, entonces $1 = f^{-1}(2)$.

Luego $f'(1) = 3$, por lo que la ecuación de la recta tangente es $y - 2 = 3(x - 1)$ o $y = 3x - 1$.

Ejemplo 5

Sean $f(x) = x^5 + x$ y g su inversa, calcular $g'(2)$.

En este caso no es posible obtener una expresión para g. Sin embargo, no es necesario tener tal expresión para calcular $g'(2)$.

En efecto, como $(g \circ f)(x) = x$, es decir, $g(x^5 + x) = x$, entonces al aplicar la regla de la cadena se tiene:

$$g'(x^5 + x)(5x^4 + 1) = 1$$

Si $x^5 + x = 2$, entonces $x = 1$, de donde se concluye que:

$$g'(2) \cdot 6 = 1, \text{ esto es } g'(2) = \frac{1}{6}.$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11 Derivada de funciones compuestas e inversas

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Evalúa el valor de $h[g(-1)]$ si g y h son dos funciones definidas como $g(n) = -n^3 - 4n^2$ y $h(t) = 7t^2 + 6t + 3g(t)$.

2 Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de las funciones.

a. $f(x) = (x-1)^2$

b. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3)^2$

c. $f(x) = \left(\dfrac{3x-4}{x}\right)^2$

d. $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{5x-4}$

3 Si $f(x) = x^2$, ¿$f'(x^2) = g'(x)$, si $g(x) = f(x^2)$?

4 Deriva las siguientes funciones compuestas. Escribe todo el procedimiento.

a. $f(x) = (3x^3 - 4x^2 + 2)^4$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}$

d. $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$

e. $f(x) = \left(\dfrac{3x^2+2}{4x-7}\right)^2$

f. $f(x) = \left(\dfrac{x^3-2x+1}{x^4-5}\right)^{10}$

g. $f(x) = 26x^3(25 - 9x^2)^{\frac{1}{3}}$

h. $f(x) = \dfrac{1}{(4x^2+3)^4}$

Razonamiento

5 Lee y responde.

a. Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$, ¿para cuáles valores de x se cumple que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

b. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, ¿para qué valores de x se satisface que $(f \circ g) = (g \circ f)$?

6 Halla $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 2^x$. Luego, determina la derivada de las dos funciones que obtengas.

7 Responde.

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$, ¿a qué es igual $(f \circ f)(x)$?

8 Si $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \sqrt{x-3}$, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es el dominio de $f \circ g$?

b. ¿Cuál es la derivada de $f \circ g$?

c. ¿Cuál es el dominio de $g \circ f$?

d. ¿Cuál es la derivada de $g \circ f$?

9 Lee y resuelve.

a. Se sabe que f y g están definidas en el conjunto de los números reales y c es un valor constante, tal que $f(x) = cx - 3$ y $g(x) = cx + 5$.

Si $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todos los valores de x, ¿cuál es el valor de c?

b. Si $f(x) = \text{máx}(x, x^2)$ y $g = f \circ f$, calcula $g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

10 Comprueba, utilizando la derivada de la función inversa, que la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

11 Calcula la ecuación de la tangente a $f(x) = \sqrt[5]{x}$ en el punto de abscisa 32, previa deducción de la derivada de dicha función.

12 Calcula el valor de a en cada caso.

a. $f'(2) = 3$	$f^{-1}(0) = 2$	$(f^{-1})'(0) = a$
b. $f'(-1) = 4$	$f^{-1}(4) = -1$	$(f^{-1})'(4) = a$
c. $f'(5) = a$	$f^{-1}(3) = 5$	$(f^{-1})'(3) = 6$

13 Calcula la derivada en $x = 11$ de la inversa de la función $f(x) = x^3$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

14 Encuentra la derivada de las funciones compuestas $[(f \circ g) \circ h]$ y de $[f \circ (g \circ h)]$ dadas $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = x - 2$, y compáralas.

15 Lee y resuelve.

a. La igualdad $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ siempre es cierta. ¿También lo es $f(x) \circ g(x) = g(x) \circ f(x)$?

b. Para $f(x) = 3x + k$ y $g(x) = \dfrac{x - 4}{3}$, encuentra el valor de k para el que $f[g(x)] = g[f(x)]$ y halla la derivada correspondiente.

Ejercitación

16 Halla la ecuación de la tangente a $f(x) = \dfrac{(x^4 + 2)^3}{(3x - 4)^2}$ en $x = 0$.

17 Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto que se indica.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en $x = 4$

b. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 16}$ en $x = -5$

c. $f(x) = \left(x - \dfrac{2}{x}\right)^4$ en $x = 2$

d. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + 16}}$ en $x = -3$

18 Traza la gráfica de la inversa de la función cuya gráfica se muestra en la Figura 4.54.

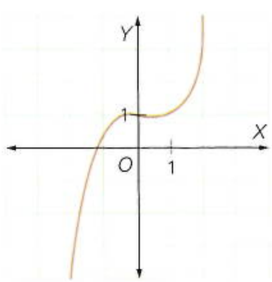


Figura 4.54

19 Halla la derivada de las inversas de cada función.

a. $f(x) = 5x - 4$

b. $f(x) = x^2 + 2$ para $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{2}(3x + 4)$

d. $f(x) = x^3 + 5$

e. $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

f. $f(x) = x^2 - 3$ para $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$

Resolución de problemas

20 La razón R en la cual una reacción química progresa es igual a $\sqrt{T}$, donde T es la temperatura. Si T varía con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $T = \dfrac{(3t + 1)}{(t + 2)}$, encuentra la razón de cambio de T con respecto a t.

21 La proporción P de semillas que germinan depende de la temperatura T del suelo. Supongamos que bajo ciertas condiciones $P = F^7$ y que T varía con respecto a la profundidad de x debajo de la superficie, como $T = \dfrac{x^2 + 3}{x + 3}$. Encuentra la razón de cambio de P con respecto a la profundidad.

22 El número de viviendas por año (N millones) depende de la tasa hipotecaria de interés anual r de acuerdo con la fórmula: $N(r) = \dfrac{500}{100 + r^2}$.

Si $r(t) = 12 - \dfrac{8t}{t + 24}$ en donde t es el tiempo en meses, calcula la tasa de cambio de N en $t = 6$.

Evaluación del aprendizaje

i La expresión $K(C) = C + 273$ convierte la temperatura Celsius a Kelvin; mientras que $C(F) = \dfrac{5}{9}(F - 32)$ convierte la temperatura en grados Fahrenheit a Celsius.

Escribe la función compuesta que convierta la temperatura Fahrenheit a Kelvin y derívala.

ii Encuentra una fórmula para calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ para n impar utilizando su función inversa. Aplica el resultado obtenido para calcular la derivada en $x = 5$ de la función f.

iii Comprueba que, en general, las derivadas de funciones inversas no son inversas entre sí. Utiliza para ello las funciones $f(x) = x^2, x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

12 Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

Saberes previos

Describe las características de una función exponencial. ¿Puede trazarse una recta tangente por cada uno de sus puntos?

Analiza

Mario compró un automóvil nuevo que le costó \$ 25 000 000. El auto se deprecia el 15% anual.

- Escribe una función que muestre cómo baja el valor del automóvil.

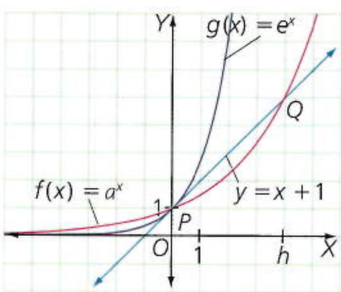


Figura 4.55

Conoce

El factor de depreciación para el valor del automóvil es $1 - 0{,}15 = 0{,}85$ y la ecuación que muestra el valor de la pérdida de su valor es $y = ab^x = 25\,000\,000(0{,}85)^x$, en donde y es el valor del automóvil y x es el tiempo que ha pasado desde su compra.

12.1 Derivada de la función exponencial: otra definición del número *e*

Si se considera la función $f(x) = a^x$, $a > 0$, su derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h-1}{h} = a^x f'(0)$$

Por tanto, la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ es proporcional a dicha función, siendo la constante de proporcionalidad el número $f'(0)$.

¿Habrá alguna función exponencial $f(x)$ para la que $f'(x) = f(x)$, es decir, para la que la constante de proporcionalidad $f'(0)$ valga 1? O lo que es lo mismo, ¿para la que la pendiente de la tangente en $(0, 1)$ valga 1? Geométricamente, esto supondría que la tangente en $P(0, 1)$ debe ser la recta $y = x + 1$.

Los puntos $P(0, 1)$ y $Q(h, a^h)$ de la Figura 4.55 son las intersecciones de las funciones $y = x + 1$ y $y = a^x$.

Al pertenecer Q a ambas funciones, se cumple que $a^h = 1 + h$; luego, $a = (1+h)^{\frac{1}{h}}$.

La recta $y = x + 1$ será tangente a la curva $y = a^x$ si Q tiende a P, es decir, si h se aproxima a 0. Cuando esto ocurre el valor de a será $a = (1+h)^{\frac{1}{h}}$.

Si $h = \dfrac{1}{n}$, decir que $h \longrightarrow 0$ equivale a escribir $n \longrightarrow +\infty$, por lo que

$a = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Este es el número e, base de los logaritmos naturales.

El número e es la base de la función exponencial $f(x) = a^x$ para la que $f'(x) = f(x)$. Es decir, si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

A partir de la derivada de e^x es inmediato calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$. Para ello, se escribe a^x como $e^{\ln(a^x)} = e^{x\cdot\ln a}$.

$f(x) = a^x = e^{(\ln a)\cdot x}$, por lo que, aplicando la regla de la cadena, se tendrá que:

$$f'(x) = e^{x\cdot(\ln a)}\ln a, \text{ luego } (a^x)' = a^x \ln a.$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 1

Para hallar la derivada de la función $f(x) = e^x \cdot 2^x$ se aplica la derivada de un producto y la de una función exponencial $f'(x) = (e^x)' \cdot 2^x + e^x \cdot (2^x)'$.

Así $f'(x) = e^x \cdot 2^x + e^x(2^x \cdot \ln 2) = e^x \cdot 2^x \cdot (1 + \ln 2)$.

Ejemplo 2

Para hallar la derivada de la función $g(x) = a^{f(x)}$, $a > 0$ se utiliza la regla de la cadena y se obtiene como resultado $g'(x) = a^{f(x)} \ln a f'(x)$.

Al aplicar el anterior resultado a la función $g(x) = 2^{5x}$ se obtiene lo siguiente:

$$g'(x) = 2^{5x} \cdot \ln 2 \cdot 5 = 2^{5x} \cdot 5 \cdot \ln 2$$

12.2 Derivada de la función logarítmica

La función logarítmica natural, $f(x) = \ln x$, con $x > 0$, es la inversa de la función exponencial $g(x) = e^x$, es decir, $g[f(x)] = x$, o lo que es lo mismo $e^{\ln x} = x$.

Al derivar ambos lados de la igualdad y aplicar la regla de la cadena, se obtiene $(e^{\ln x})' = 1 \Rightarrow e^{\ln x}(\ln x)' = 1 \Rightarrow x(\ln x)' = 1$.

Por tanto, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

En general, si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

A partir de esta derivada, se puede obtener la correspondiente a la función logarítmica de base $a > 0$. La forma más cómoda es escribir $\log_a x$ como un logaritmo natural mediante un cambio de base. En concreto, si $\log_a x = t$, entonces $a^t = x$, por lo que:

$t \ln a = \ln x$, es decir, $t = \log_a x = \dfrac{1}{\ln a} \ln x$. Por tanto:

$$\text{Si } f(x) = \log_a x \text{ entonces } f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Ejemplo 3

La derivada de $g(x) = \log_a f(x)$ para $a > 0$ es $g'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Al aplicar este resultado y la regla de la cadena a la función $g(x) = \log_2(x^3 - x + 1)$, se obtiene $g'(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 1}$.

Ejemplo 4

Para hallar la derivada de $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{5}\right)$, se procede así:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x}{5}} \cdot \left(\frac{2x}{5}\right)' = \frac{5}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{x}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

12 Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla la derivada de cada función.

a. $f(x) = \ln(x^3 - 2x + 1)$ **b.** $f(x) = e^x \cdot \ln x$

c. $f(x) = \log_2(3x^2 - 1)$ **d.** $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + e^x}\right)$

e. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ **f.** $f(x) = 5x \cdot \log_2 x$

2 Decide si las derivadas de $f(x) = e^{-2x}$ y $g(x) = -e^{2x}$ son iguales.

3 Calcula, simplificando al máximo, la derivada de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$.

4 Calcula la derivada de las siguientes funciones y traza su gráfica con la ayuda de una calculadora graficadora o software especializado.

a. $f(x) = e^{-x}$ **b.** $f(x) = x^2e^x$

c. $f(x) = e^{2x+3}$ **d.** $f(x) = 10^{5x}$

e. $f(x) = e^{x^5-2x+1}$ **f.** $f(x) = 5e^{4x^2}$

Comunicación

5 Responde.

¿Hay algún punto de la gráfica de $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?

Razonamiento

6 Calcula la derivada de $f(x) = \ln[(x^2 + 1)]^3$.

7 Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \ln x$ en el punto $x = 1$.

8 Determina los valores de x para los que se anulan las derivadas de las siguientes funciones.

a. $f(x) = e^2x - 4e^x$ **b.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

c. $f(x) = x\ln x - x$ **d.** $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}}$

9 Calcula la derivada de cada función y decide si se anula en algún punto.

a. $f(x) = \ln x^3$ **b.** $f(x) = (\ln x)^3$

c. $f(x) = \ln(3x^2 - 4x)$ **d.** $f(x) = \ln(3x - 4)^2$

e. $f(x) = \sqrt[5]{\ln 5x}$ **f.** $f(x) = x^3\ln x + \log_5 x$

10 Halla la derivada de cada función y la de su inversa.

a. $f(x) = \dfrac{5x}{e^x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3x^3}{e^x}$

c. $f(x) = x^3\ln x$ **d.** $f(x) = \log_7(3x)$

e. $f(x) = \log_3(x^2 + 1)$ **f.** $f(x) = \dfrac{\log_{10} x}{x}$

g. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ **h.** $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x - 1}$

11 Determina en cuál punto de la gráfica de la función $2^x - 3$ la recta tangente tiene una pendiente de 23.

Comunicación

12 Responde. ¿Cómo son las gráficas de la función e^x y la de su derivada?

13 Lee y responde. Una recta con pendiente m pasa por el origen y es tangente a la curva $y = \ln x$. ¿Cuál es el valor de m?

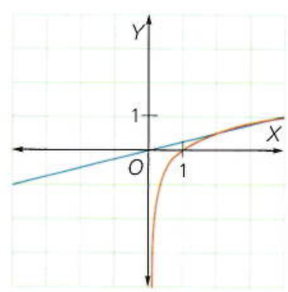


Figura 4.56

Ejercitación

14 Encuentra la derivada de cada función en el punto que se indica.

a. $f(x) = 2e^x - x$ en $x = 1$

b. $f(x) = x^3 - 5$ en $x = 2$

c. $f(x) = \ln(x) - 3^x$ en $x = 3$

d. $f(x) = 6 \cdot 5^x + \log_{10} x$ en $x = 2$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Resolución de problemas

15 Una sustancia radioactiva con una masa inicial de cinco gramos tiene una vida media de 20 días. La función que muestra la cantidad restante A de la sustancia, en gramos, como una función del tiempo t, en días, es: $A(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$.

a. Copia y completa la Tabla 4.1

Tiempo (días)	Cantidad restante
0	5
5	
10	
15	
20	

Tabla 4.1

b. Escribe una expresión que muestre la cantidad restante A, en gramos, como una función del tiempo t, en minutos.

16 ¿Cuál es la diferencia en la razón de cambio de las funciones de la forma $y = b^x$ en los casos en los que $0 < b < 1$ y en los que $b > 1$? Apoya tu respuesta con ejemplos.

17 El número de visitas a un sitio web se duplica cada semana. Cuando la *webmaster* comienza el monitoreo hay 50 visitantes.

a. Escribe una expresión que relacione el número de visitantes en cierto tiempo t.

b. ¿Cuántos visitantes hay en el sitio web después de cuatro semanas?

c. Encuentra la razón de crecimiento de las visitas después de cuatro semanas.

18 Un biólogo estudia el incremento de la población de un insecto. La población de este tipo de insectos se triplica cada semana. Supón que inicialmente hay 100 insectos, y que su población sigue creciendo a ese ritmo.

a. Halla el número de insectos después de cuatro semanas.

b. ¿Qué tan rápido crece el número de insectos al final de la cuarta semana?

19 ¿Qué tan rápido crece la población mundial?

a. Busca datos para responder el interrogante.

b. Desarrolla un modelo para mostrar la población en cierto tiempo t.

c. Usa tu modelo para predecir la población mundial en el año 2025.

d. ¿Es este modelo sostenible a largo plazo? ¿Qué variables podrían afectar esa tendencia?

20 La vida media del C14, un isotopo del carbono, es 5 700 años. Eso significa que una muestra de C14 se perderá en 5 700 años. Si una muestra original contiene 40 gramos de C14, la expresión para $A(t) = 40\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$ indica la cantidad de C14 que queda de t años en esa muestra. ¿Cuántos gramos quedan de la muestra después de 10 años?

21 Las ventas en dólares $V(t)$ de un producto en un tiempo t están dadas por la expresión:

$$V(t) = \frac{2\,000}{(1 + 19e^{-0{,}5t})^2}$$

a. ¿Cuál fue la venta inicial, es decir, cuando $t = 0$?

b. ¿Qué ocurre con las ventas del producto a medida que pasa el tiempo?

c. Encuentra la razón de cambio de las ventas en función del tiempo.

Evaluación del aprendizaje

Calcula la derivada de cada función y decide si se anula en algún punto. Explica tu respuesta.

a. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\ln x^2}$

b. $f(x) = xe^x$

c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

d. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

13 Derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas

Saberes previos

¿En cuáles puntos de la gráfica de la función sen$x$ se puede trazar una recta tangente que sea paralela al eje X?

Analiza

La carga eléctrica Q que atraviesa la sección de un conductor está dada por la expresión $Q(t) = -\frac{A}{w}\cos(wt)$, siendo A y w constantes.

- Si la intensidad I de la corriente indica la rapidez con que varía la carga Q que atraviesa la sección del conductor, deduce los instantes en que I es máxima y mínima.

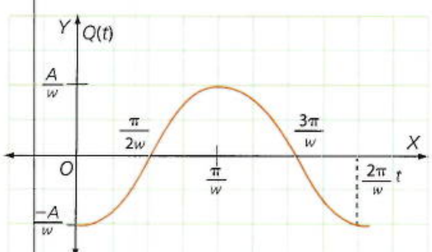


Figura 4.57

Conoce

La gráfica de la función Q se muestra en la Figura 4.57.

Al estudiar las pendientes de las rectas tangentes a la curva, se deduce que la pendiente máxima ocurre para $t = \frac{\pi}{2w}$ y la mínima para $t = \frac{3\pi}{w}$.

Este resultado se puede obtener calculando la derivada de la función $Q(t)$, ya que $Q'(t) = I$, y determinando los puntos máximos y mínimos de la gráfica correspondiente. En este caso $Q'(t) = A\text{sen}(wt)$ y por tanto los máximos y mínimos del seno se corresponden con los valores en los que se anula la función coseno.

13.1 Derivada del seno

Si se aplica la definición de derivada a la función $f(x) = \text{sen}x$, se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

El primer factor es $\cos x$, puesto que la función coseno es continua, y el segundo es 1 porque $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$. Por tanto, $(\text{sen}x)' = \cos x$.

Ejemplo 1

Para derivar la función $f(x) = \text{sen}(6x + 1)$ hay que notar que se trata de una función compuesta, así que se deriva aplicando la regla de la cadena, de modo que $f'(x) = \cos(6x + 1) \cdot 6 = 6\cos(6x + 1)$.

13.2 Derivada del coseno

Conociendo la derivada de la función seno se calcula la derivada de la función coseno recordando que $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y aplicando la regla de la cadena:

$$(\cos x)' = \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\text{sen}x$$

Ejemplo 2

La función $f(x) = \cos^2(3x^2 + 1)$ es compuesta, pero además hay que tener en cuenta que la función coseno está elevada a la potencia 2, así que su derivada se halla aplicando la regla de la cadena así:

$$f'(x) = 2\cos(3x^2 + 1) \cdot [-\text{sen}(3x^2 + 1) \cdot (6x)]$$
$$= -12x\cos(3x^2 + 1) \cdot \text{sen}(3x^2 + 1)$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

13.3 Derivada de la tangente

A partir de las derivadas del seno y del coseno, y teniendo en cuenta que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, se obtiene:

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Ejemplo 3

Para derivar la función $f(x) = (x + 1) \cdot \tan(2x - 5)$ se aplica, además de la derivada de un producto, la regla de la cadena, así:

$$f'(x) = (x + 1)' \cdot \tan(2x - 5) + (x + 1) \cdot [\tan(2x - 5)]'$$

$$f'(x) = 1 \cdot \tan(2x - 5) + (x + 1) \cdot \sec^2(2x - 5) \cdot 2$$

$$f'(x) = \tan(2x - 5) + 2(x + 1) \cdot \sec^2(2x - 5)$$

La derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$.

La derivada de $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

La derivada de $f(x) = \tan x$ es $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

13.4 Derivada del arcoseno

Para obtener la derivada del arcoseno, se parte de la relación $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$, que indica que el seno del arco cuyo seno es x es, naturalmente, x. Al derivar y aplicar la regla de la cadena a esta igualdad se obtiene:

$[\cos(\operatorname{arcsen} x)](\operatorname{arcsen} x)' = 1$. Así, $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}$, como en el intervalo donde se ha definido el arcoseno, $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, el coseno nunca es negativo, (Figura 4.58) puede escribirse $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)]^2} = \sqrt{1 - x^2}$.

Por tanto, $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

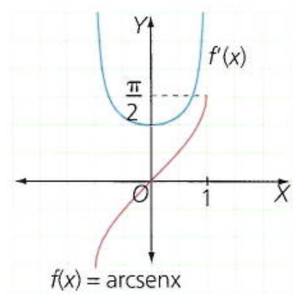


Figura 4.58

Ejemplo 4

La derivada de $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{3x}{2x^2 + x}$ se calcula así:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{3x}{2x^2 + x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3x}{2x^2 + x}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{3x}{2x^2 + x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3(2x^2 + x) - 3x(4x + 1)}{(2x^2 + x)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{9x^2}{(2x^2 + x)^2}}} \cdot \left(\frac{-6x^2}{(2x^2 + x)^2}\right)$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

13 Derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas

13.5 Derivada del arcocoseno

La derivada de la función arcocoseno se obtiene de la derivada del arcoseno y de la relación $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}x$, ya que al derivar $(\arccos x)' = -(\text{arcsen}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

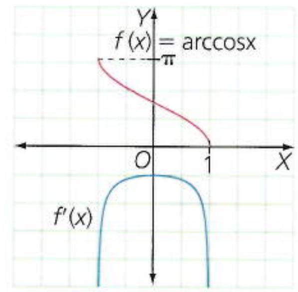


Figura 4.59

Ejemplo 5

Para derivar la función $f(x) = 3\arccos(x^2 + 0{,}5)$, se aplica la regla de la cadena:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(x^2+0{,}5\right)^2}} \cdot \left(x^2+0{,}5\right)'$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(x^2+0{,}5\right)^2}} \cdot 2x = \frac{-6x}{\sqrt{1-\left(x^2+0{,}5\right)^2}}$$

13.6 Derivada del arcotangente

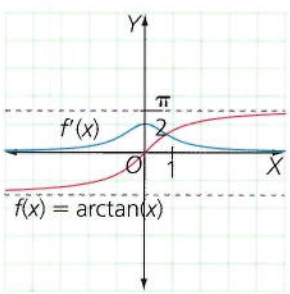


Figura 4.60

Su derivada se calcula con el mismo procedimiento que en el caso del arcoseno. Al derivar $\tan(\arctan x) = x$, se obtiene $[1 + \tan^2(\arctan x)](\arctan x)' = 1$, de donde se concluye que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$.

Ejemplo 6

La derivada de $h(x) = x^2 \cdot \arctan(5x)$ se obtiene aplicando la fórmula de la derivada del producto:

$$h'(x) = (x^2)' \cdot \arctan(5x) + x^2 \cdot [\arctan(5x)]'$$

$$h'(x) = 2x \cdot \arctan(5x) + \left(\frac{1}{1+25x^2}\right) \cdot 5x^2$$

$$h'(x) = 2x \cdot \arctan(5x) + \left(\frac{5x^2}{1+25x^2}\right)$$

La derivada de $f(x) = \text{arcsen}x$ es $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ para x en el intervalo $(-1, 1)$.

La derivada de $f(x) = \arccos x$ es $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ para x en el intervalo $(-1, 1)$.

La derivada de $f(x) = \arctan x$ es $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen.

2 Calcula la derivada de $y = \operatorname{arccotan} x$.

$\left(\text{Recuerda que } \cot x = \dfrac{1}{\tan x}\right)$

Modelación

3 Las funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente, están asociadas a la **circunferencia goniométrica**. De manera análoga, la hipérbola también tiene asociadas sus razones trigonométricas.

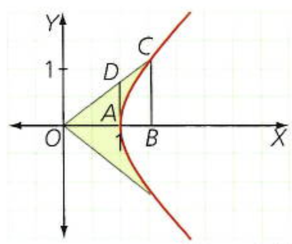


Figura 4.61

Seno hiperbólico (BC): $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno hiperbólico (OB): $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangente hiperbólica (AD): $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

Si x es el área coloreada en la Figura 4.57:

a. Representa estas funciones con una calculadora gráfica o software especializado.

b. Comprueba que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

c. Calcula las derivadas de las funciones trigonométricas hiperbólicas.

4 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ en $x = 1$.

5 Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas inversas:

a. $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$

b. $f(x) = \arctan(1 + x^2)$

c. $f(x) = \sqrt{\arccos x}$

6 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

7 Considera la función f definida en $[-1, 2]$ por $f(x) = [x] \cdot \operatorname{sen}(\pi x) \cdot w$.

a. Escribe la fórmula para f' en $[-1, 0]$, $[0, 1]$ y $[-1, 2]$.

b. Estudia la derivabilidad de f en 0 y en 1, e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

Resolución de problemas

8 La posición de una partícula para cualquier tiempo $t > 0$ viene dada por la expresión $S(t) = 2\pi t + \cos(2\pi t)$.

a. Halla la derivada de S para determinar la velocidad del móvil en cualquier instante.

b. Encuentra la velocidad para $t = \dfrac{1}{2}$.

c. ¿Para cuáles valores de t la partícula está en reposo?

d. ¿En cuáles valores de t la velocidad de la partícula es máxima?

e. ¿En qué momento la velocidad es mínima?

Evaluación del aprendizaje

i Encuentra el valor de x en el que la pendiente de la tangente a la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \cos x$ es igual a 2.

ii Calcula la derivada de estas funciones trigonométricas. Describe tus procedimientos.

a. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

b. $f(x) = \cos(x + 1)$

c. $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x^2)$

d. $f(x) = \tan(x^4)$

e. $f(x) = \arctan(2x^2 + 3)$

f. $f(x) = \cot x$

g. $f(x) = \sec x$

h. $f(x) = \arccos(5x - 1)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

14 Derivación logarítmica e implícita

Saberes previos

¿Cuál es el grado de la función derivada de una función polinómica de grado 4?

Analiza

Marcela debía hallar la derivada de la función $f(x) = x^x$, y lo hizo así:

$$f'(x) = x \cdot x^{x-1}$$

- ¿Está bien calculada la derivada de la función $f(x)$?

Conoce

14.1 Derivación logarítmica

Algunas derivadas se pueden calcular fácilmente aplicando los logaritmos y sus propiedades. Este es el caso de las funciones del tipo $h(x) = f(x)^{g(x)}$, siendo $f(x) > 0$ de lo cual se obtiene que $h(x) > 0$.

La derivada de $f(x) = x^x$ se halla como se muestra a continuación.

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x$$ Se toman los logaritmos de cada lado de la igualdad.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$ Se derivan ambos miembros de la igualdad.

$$f'(x) = (\ln x + 1) \cdot f(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$$ Se despeja $f'(x)$.

Por lo tanto, Marcela no halló de forma correcta la derivada de la función $f(x) = x^x$.

A este método de cálculo de derivadas de funciones se le conoce como **derivación logarítmica**.

14.2 Derivación implícita

Hay ocasiones en las que, aunque no es posible despejar y en términos de x, sí se puede calcular su derivada expresándola en función de las coordenadas de los pares (x, y). En este caso, para obtener y' se utiliza lo que se conoce como **derivación implícita**, es decir, obtener la derivada sin tener que dejar explícita y como función de x.

Ejemplo 1

La ecuación de la recta tangente a la curva $xy^5 - y^2 + x^3 = 9$, en el punto $P(2, 1)$, tiene por ecuación $y - 1 = y'(2)(x - 2)$.

Para obtener $y'(2)$ se utiliza la derivación implícita.

En la expresión de la curva $xy^5 - y^2 + x^3 = 9$, se derivan ambos miembros de la igualdad aplicando la regla de la cadena:

$$(xy^5 - y^2 + x^3)' = 0 \Rightarrow [x(y^5)' + y^5 \cdot 1)] - (2yy') + 3x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 5xy^4y' + y^5 - 2yy' + 3x^2 = 0$$

Esta igualdad es válida para cualquier punto de la curva, en particular para $P(2, 1)$, por lo que $2 \cdot 5 \cdot 1^4 \cdot y'(2) + 1^5 - 2 \cdot 1 \cdot y'(2) + 3 \cdot 2^2 \Rightarrow y'(2) = -\frac{13}{8}$.

La recta pedida tendrá como ecuación:

$$y - 1 = -\frac{13}{8}(x - 2)$$
$$y = -\frac{13}{8}x + \frac{17}{4}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula mediante derivación logarítmica las derivadas de las siguientes funciones.

a. $f(x) = (x^2 + 1)^{3x}$, con $x > 0$

b. $f(x) = x^{\text{sen}x}$, con $x > 0$

2 Deduce la derivada de $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ mediante derivación logarítmica. f y g son funciones positivas y derivables.

3 Halla la ecuación de la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 13$ en $P(2, 3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita y despejando y.

4 Usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto de abscisa x.

a. $x^2y^3 = 27$, si $x = 1$

b. $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y$, si $x = 0$

5 Usa la derivación implícita para calcular $f''(x)$ si $3x^2 - 2[f(x)]^2 = 12$.

6 Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^{1-x}$

b. $f(x) = x^{e^x}$

c. $f(x) = (x + \text{sen}x)^{\sqrt{x}}$

d. $f(x) = (1 + \text{sen}x)^{\text{sen}x - \cos x}$

7 Supón en cada caso que y es una función de x y halla y' mediante derivación implícita.

a. $x^3 + y^3 = 4$

b. $(x - y)^2 = x + y - 1$

c. $y = \text{sen}(3x + 4y)$

d. $y = x^2y^3 + x^3y^2$

e. $e^{xy} = e^{4x} - e^{5y}$

f. $\cos^2 x + \cos^2 y = \cos(2x + 2y)$

g. $\dfrac{y}{x^3} + \dfrac{x}{y^3} = x^2y^4$

h. $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$

Modelación

8 La *hoja de Descartes* es la curva que corresponde a la gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$, y tiene la forma singular que se ilustra en la Figura 4.62.

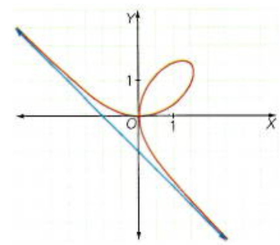


Figura 4.62

Mediante la derivación implícita comprueba que la tangente a la curva en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ es paralela a la asíntota de la hoja de Descartes.

Resolución de problemas

9 Encuentra todos los puntos (x, y) de la gráfica de $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$ (Figura 4.63), en donde las rectas tangentes a la gráfica en (x, y) tienen como pendiente -1.

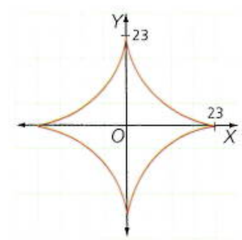


Figura 4.63

10 La gráfica de $x^2 - xy + y^2 = 3$ se llama elipse inclinada. Encuentra los valores más grandes y más pequeños que pueden tomar cada una de las variables y y x (Figura 4.64).

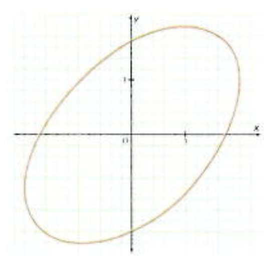


Figura 4.64

Evaluación del aprendizaje

i Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ en el punto $(-1, 1)$.

ii Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $x^2 + (y - x)^3 = 0$ en $x = 1$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

15 Regla de L'Hôpital y aplicaciones

Saberes previos

Escribe un límite que al ser calculado arroje una expresión de la forma $\frac{0}{0}$.

Analiza

Calcula el siguiente límite:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Conoce

15.1 Regla de L'Hôpital

Este límite es indeterminado, porque $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4 = 0$ y $\lim\limits_{x \to 2} x - 2 = 0$. Para calcularlo se debe derivar cada uno de los polinomios y calcular el límite de la función resultante. Esto es: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x}{1} = 2 \cdot 2 = 4$.

Sean dos funciones f y g tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Si existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y se tiene que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Con la hipótesis adicional de que f' y g' sean continuas en a y $g'(a) \neq 0$, hipótesis que se suele verificar en casi todos los casos, la justificación de este teorema es muy simple. Como $f'(x)$ y $g'(x)$ son continuas en a, existen $f'(a)$ y $g'(a)$, por lo que f y g son continuas en a y, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, resulta ser $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Así se tiene que:

Se resta 0 en numerador y denominador.

Al ser $f'(x)$ y $g'(x)$ continuas en a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} f'(x)}{\lim\limits_{x \to a} g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

15.2 Regla de L'Hôpital en otros tipos de límites

La regla de L'Hôpital resuelve indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $a = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplo 1

El $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)}{\ln\left(\dfrac{2x - 1}{2x + 1}\right)}$ se resuelve aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)}{\ln\left(\dfrac{2x - 1}{2x + 1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x + 1}{x - 1} \cdot \dfrac{x + 1 - (x - 1)}{(x + 1)^2}}{\dfrac{2x + 1}{2x - 1} \cdot \dfrac{(2x + 1)2 - (2x - 1)2}{(2x + 1)^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x^2 - 1}}{\dfrac{4}{4x^2 - 1}} = 2$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Las formas indeterminadas de la forma $0 \cdot \infty$ se pueden evaluar reescribiendo el producto como un cociente y luego aplicando la regla de L'Hôpital para formas indeterminadas como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^-} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$$

Resuelve cada límite.

a. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)\ln x$

b. $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

c. $\lim_{x\to 0} x^3 e^{-3x} \, (x > 0)$

Resolución de problemas

2 La regla de L'Hôpital permite resolver las siguientes cuatro indeterminaciones:

Sea el límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, si:

- a es un número real y el límite es del tipo $\frac{0}{0}$.
- a es un número real y el límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
- $a = \infty$ y el límite es del tipo $\frac{0}{0}$.
- $a = \infty$ y el límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Si existe el límite del cociente de las derivadas, se tiene $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Indica si es posible aplicar la regla de L'Hôpital y, en caso tal, halla el límite correspondiente.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-7}{2x^2-3x+1}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-4}{2x^2+1}$

d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)}$

f. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$

g. $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x}$

h. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-4}{2x^2+1}$

3 Las formas indeterminadas del tipo $\infty - \infty$ a veces pueden evaluarse combinando los términos y manipulando el resultado para producir una indeterminación como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Completa el cálculo de los siguientes límites. Justifica tus procedimientos.

a. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}\right)$

b. $\lim_{x\to 0} [\ln(1-\cos x) - \ln(x^2)] = \lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\right]$

Evaluación del aprendizaje

Calcula cada uno de los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x} - x}{1-\cos(2x)}$

b. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(\ln x)^3}$

c. $\lim_{x\to 0} [\ln(1-\cos x) - \ln(x^2)]$

d. $\lim_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$

e. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{9-\sqrt{81-5x}}{x}$

Estilos de vida saludable

La capacidad de propagación de una bacteria es $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo en horas. Halla la rapidez con la que se propaga la bacteria. ¿Qué fuentes de bacterias conoces y qué medidas tomas para evitar la aparición o propagación de bacterias en tu colegio?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

16 Criterio de la primera y de la segunda derivada

Saberes previos

¿Cómo es el signo de las pendientes que pueden trazarse sobre la gráfica de una función en un intervalo donde es creciente?

Analiza

Sandra se pregunta si para trazar la gráfica de una función, se requiere tabular gran cantidad de puntos.

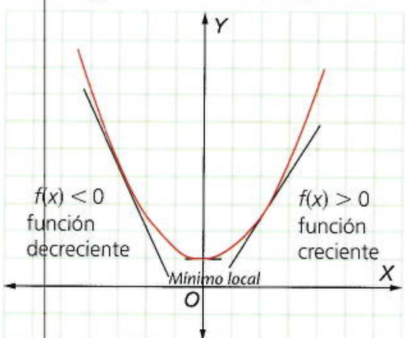


Figura 4.65

- ¿Qué herramientas del cálculo permiten trazar una aproximación de la gráfica sin necesidad de construir una tabla de valores?

Analiza y conoce

Dentro del cálculo diferencial existen dos teoremas o criterios que facilitan la caracterización de una función. Estos son los criterios de la primera y la segunda derivada. Con ellos, Sandra no requeriría tabular una gran cantidad de puntos para trazar la gráfica de una función.

16.1 Criterio de la primera derivada

El **criterio de la primera derivada** permite determinar los máximos o mínimos locales luego de observar los siguientes hechos:

1. Cuando la derivada es positiva, la función crece.
2. Cuando la derivada es negativa, la función decrece.
3. Cuando la derivada es cero, la función tiene un máximo o un mínimo local.

Esto se observa la Figura 4.65.

Sea f una función y c un número en su dominio.

Si existen a y b con $a < c < b$ tales que:

1. f es continua en el intervalo (a, b).
2. f es derivable en el intervalo (a, b), excepto quizá en c.
3. $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ en (a, b) y es negativa para todo $x > c$ en (a, b).

Entonces f tiene un **máximo local** en c.

Un criterio similar puede tenerse para obtener un **mínimo local**, solo es necesario intercambiar "positivo" por "negativo".

Para determinar si existe un máximo o un mínimo basta graficar alrededor de los puntos donde se presente un cambio de signo.

16.2 Criterio de la segunda derivada

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c.

- Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un **mínimo relativo**.
- Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un **máximo relativo**.
- Si $f''(c) = 0$, este criterio no decide y ha de recurrirse al criterio de la primera derivada.

Sea f una función cuya segunda derivada existe en (a, b).

- Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
- Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en ese intervalo.
- Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Dada la función $f(x) = \frac{(x-2)^4}{4}$, se pueden usar los criterios de la primera y la segunda derivada para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, los intervalos en los que es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, los puntos de inflexión y trazar el bosquejo de su gráfica.

La primera derivada de $f(x)$ es $f'(x) = (x-2)^3$. El dominio de $f'(x)$ es $\mathbb{R}$. El único punto donde $f'(x) = 0$ es en $x = 2$, se denomina punto crítico y corresponde a un máximo o mínimo relativo de f, además, como $f'(x)$ es polinómica, entonces existe para todo x.

Para $x = 1$, se tiene $f'(1) = (1-2)^3 = -1 < 0$ y para $x = 3$, se tiene $f'(3) = (3-2)^3 = 1 > 0$.

Así, para $x < 2$, f es decreciente y para $x > 2$, f es creciente. Se deduce entonces que en $x = 2$ hay un mínimo relativo, que f es decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, \infty)$.

Para hallar la concavidad y los puntos de inflexión, se halla $f''(x)$.

Como $f''(x) = 3(x-2)^2$, los puntos de inflexión se obtienen donde $f''(x) = 0$ o donde $f''(x)$ no existe.

$x = 2$ es el único posible punto de inflexión, pues $f''(x)$ es polinómica y existe para todo valor de x.

Para $x = 1$, se tiene que $f''(1) = 3 > 0$ y para $x = 3$, $f''(3) = 3 > 0$. Luego, la concavidad de $f(x)$ no cambia y no hay puntos de inflexión. Un bosquejo de $f(x)$ se muestra en la Figura 4.66.

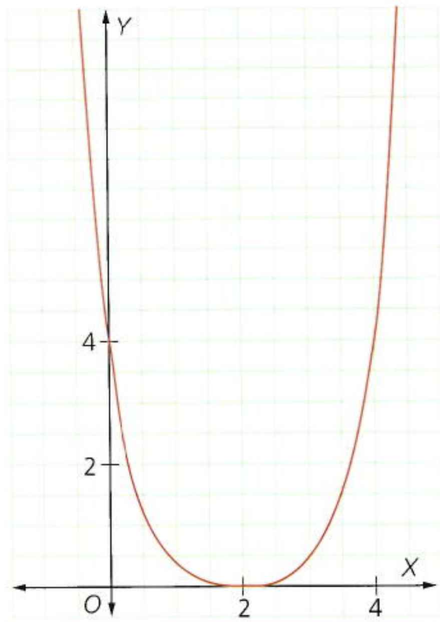


Figura 4.66

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1 Describe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, la concavidad y los puntos de inflexión de la función de la Figura 4.67.

Con base en la descripción, decide en qué intervalos $f'(x)$ y $f''(x)$ son positivas, negativas, nulas o no existen.

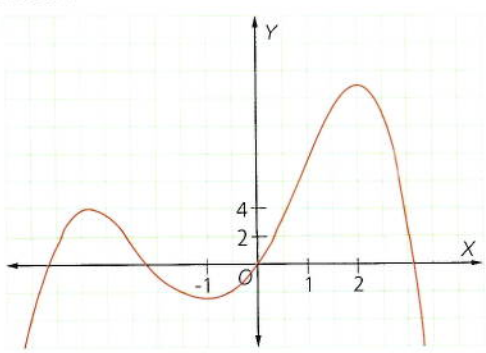


Figura 4.67

Evaluación del aprendizaje

Las ventas (en miles de dólares) de una compañía se modelan mediante la función $R(x) = -0{,}05x^2 + 10x - 350$, para un número x de unidades vendidas con $0 \leqslant x \leqslant 185$.

a. ¿Cuántas unidades debe vender la compañía para obtener los mayores ingresos?, ¿cuál es ese ingreso? Traza un bosquejo de la gráfica.

b. La misma compañía ha determinado que su función de costo $C(x)$ sigue el modelo $C(x) = 0{,}8x + 20$, donde $C(x)$ está en miles de dólares y x es el número de unidades vendidas. ¿Cuántas unidades debe vender la compañía para maximizar la utilidad?, ¿cuál es esa utilidad? Traza un bosquejo de la gráfica.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

17 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Saberes previos

¿Qué debe tenerse en cuenta para que un negocio arroje la mayor utilidad posible?

Analiza

Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función $y = m(x)$ cuya gráfica es:

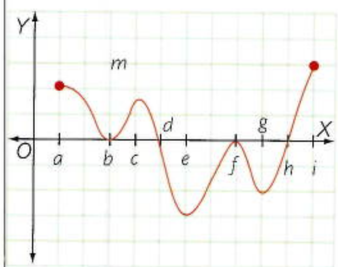


Figura 4.68

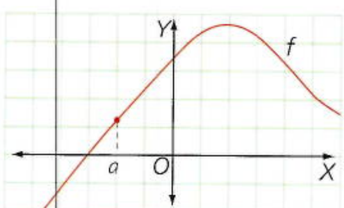


Figura 4.69

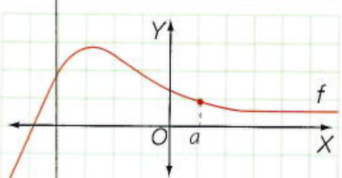


Figura 4.70

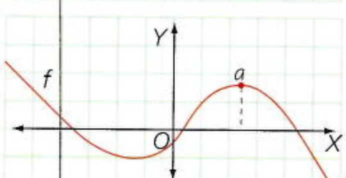


Figura 4.71

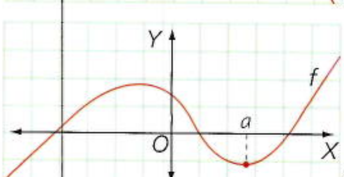


Figura 4.72

Conoce

La gráfica de $y = m(x)$ en la Figura 4.68 es creciente en los intervalos (b, c), (e, f) y (g, i) y decreciente en (a, b), (c, e) y (f, g). Como la función no necesariamente toma el mayor o el menor valor de su recorrido en estos puntos, se afirma que en c y en f se presentan **máximos relativos**, y en b, e y g, **mínimos relativos**.

Sea una función $f(x)$ definida en un entorno de a.

- $f(x)$ es **creciente** en dicho entorno (Figura 4.69) si:

  $f(a) < f(x)$, para todo x del entorno situado a la derecha de a $(x > a)$.

  $f(a) > f(x)$, para todo x del entorno situado a la izquierda de a $(x < a)$.

- $f(x)$ es **decreciente** en dicho entorno (Figura 4.70) si:

  $f(a) > f(x)$, para todo x del entorno situado a la derecha de a $(x > a)$.

  $f(a) < f(x)$, para todo x del entorno situado a la izquierda de a $(x < a)$.

- $f(x)$ alcanza un **máximo relativo** en a (Figura 4.71) si para todo x del entorno se cumple que $f(a) > f(x)$.

- $f(x)$ alcanza un **mínimo relativo** en a (Figura 4.72) si para todo x del entorno se cumple que $f(a) < f(x)$.

El crecimiento y decrecimiento de una función y sus máximos o mínimos relativos poseen una relación con los signos de la derivada y su anulación.

Sea f la función representada en la Figura 4.73. Si f es derivable en cualquier punto de su dominio, se puede afirmar que:

- Si $f'(x) < 0$ en un entorno de x_0, entonces las rectas tangentes a la curva en $P(x, f'(x))$ para todo x del entorno, excepto quizás en x_0, tienen pendiente negativa, lo que significa que f es decreciente en ese entorno (cualquier entorno a la izquierda de d, a la derecha de e y a la izquierda de g).

Con un análisis similar:

- Si $f'(x) > 0$ en un entorno de x_0, entonces f es creciente en el entorno, (cualquier entorno a la izquierda de a, a la izquierda de b y a la derecha de g).
- De otra parte, si f presenta un máximo o un mínimo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$ puesto que la recta tangente a la curva en $P(x_0, f(x_0))$ es horizontal (esto ocurre en $x = a, b, e$ y g).

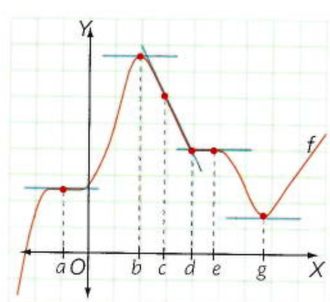


Figura 4.73

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Los resultados obtenidos anteriormente se resumen a continuación.

Si $f'(x_0) > 0$ en un entorno de un x deteminado, entonces f es **creciente** en dicho entorno.

Si la derivada de una función en un entorno de un punto dado es positiva, las rectas tangentes a la curva de la función en ese entorno tienen pendiente positiva. Entonces, para todo valor del entorno sucede lo que se observa en x_0 para la Figura 4.74.

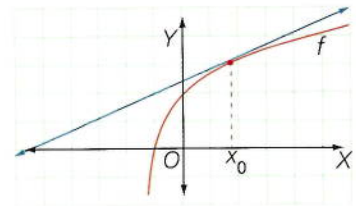


Figura 4.74

Si f presenta un **máximo** o un **mínimo relativo** en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

En los máximos o mínimos relativos, la recta tangente a la curva de f es horizontal y, por tanto, la derivada en ellos será cero (Figura 4.75).

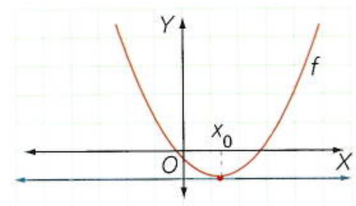


Figura 4.75

Si $f'(x_0) < 0$ para un entorno de un x determinado, entonces f es **decreciente** en dicho entorno.

Si la derivada de una función en un entorno de un punto dado es negativa, las rectas tangentes en ese entorno tienen pendiente negativa. Entonces, para todo valor del entorno sucede lo que se observa en x_0 para la Figura 4.76.

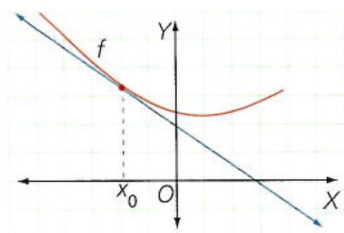


Figura 4.76

Ejemplo 2

Para determinar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 6x^5 - 15x^4 - 80x^3 + 1$ se procede como se muestra a continuación.

Se halla la derivada de $f(x)$ y se factoriza para estudiar su signo:

$$f'(x) = 30x^4 - 60x^3 - 240x^2 = 30x^2(x^2 - 2x - 8) = 30x^2(x + 2)(x - 4)$$

Como $f'(x)$ se anula en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 4$, se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos cuyos extremos son esos valores, usando la Tabla de signos 4.2.

	$-\infty$ -2	4	$+\infty$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Tabla 4.2

Si $x < -2$ o $x > 4$, entonces $f'(x) > 0$. Por lo tanto, f es creciente en la región $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

Si $-2 < x < 4$ y $x \neq 0$, entonces $f'(x) < 0$. Por lo tanto, f es decreciente en $(-2, 4) - \{0\}$.

Así, sin necesidad de estudiar con precisión el comportamiento de la función en las proximidades de -2, 0 y 4, se puede esbozar la gráfica de $y = f'(x)$, como en la Figura 4.77.

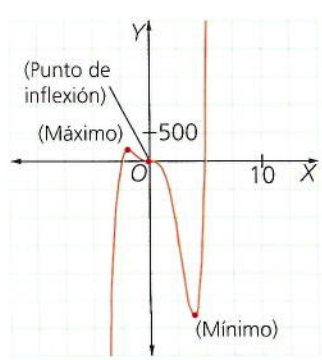


Figura 4.77

En $x = -2$, la función pasa de creciente a decreciente; así, el punto $(-2, f(-2))$ es un máximo relativo.

En $x = 4$, la gráfica pasa de decreciente a creciente y, por tanto, $(4, f(4))$ es un mínimo relativo.

Aunque en el punto $(0, f(0))$ hay una tangente horizontal, ya que $f'(0) = 0$, la función es decreciente a la izquierda de $x = 0$ y continúa siendo decreciente a la derecha de $x = 0$, por lo que dicho punto no es ni máximo ni mínimo relativo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

17 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si $f'(x_0) \leq 0$, entonces f es decreciente en x_0.

b. Si $f'(x_0) > 0$, entonces f es creciente en x_0.

c. Si f es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0) \leq 0$.

Razonamiento

2 Halla los máximos y mínimos relativos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ b. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

3 Las gráficas de las figuras 4.78 a 4.81 corresponden a las de las derivadas de ciertas funciones. En cada caso, determina si la función correspondiente alcanza un valor mayor para $x = a$ o para $x = b$.

a.

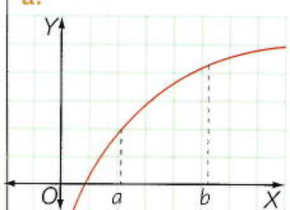


Figura 4.78

b.

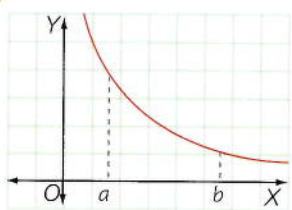


Figura 4.79

c.

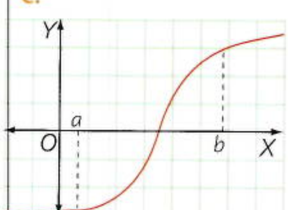


Figura 4.80

d.

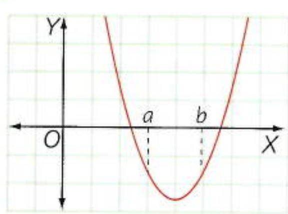


Figura 4.81

4 Considera la función $f(x) = xg(x)$ que tiene las siguientes características:

I. La función $g(x)$ es continua, derivable y tiene un máximo en $x = 1$.

II. $f(1) \cdot g(1) = 4$

a. ¿Tiene la función f un máximo en $x = 1$? Justifica tu respuesta.

b. Si, además, se sabe que $g(x) = ax^2 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c para que f tenga un mínimo en $x = 0$.

Comunicación

5 Describe el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - 1$ en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Ejercitación

6 Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y los mínimos de cada función. Luego establece la relación entre cada una de ellas y su correspondiente gráfica.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2$

b. $f(x) = x^4 - 4x^3$

c. $f(x) = \operatorname{sen}x - \sqrt{3}\cos x$

d. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

e. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}$

f. $f(x) = \dfrac{(x - 4)^2}{x^2 - 4}$

g. $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}$

h. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{5}{2} - x\right)$

1.

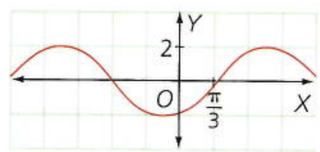


Figura 4.82

2.

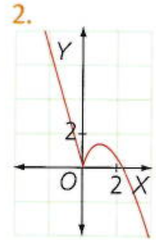


Figura 4.83

3.

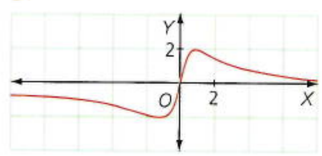


Figura 4.84

4.

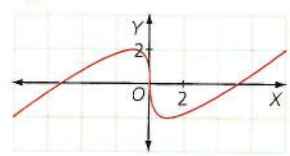


Figura 4.85

5.

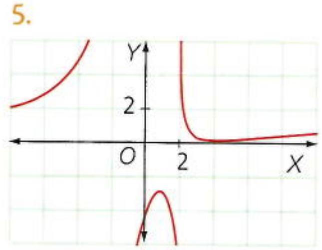


Figura 4.86

6.

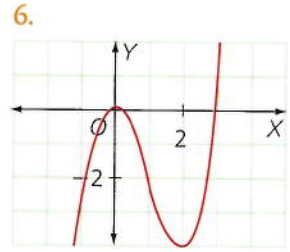


Figura 4.87

7.

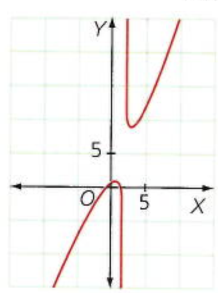


Figura 4.88

8.

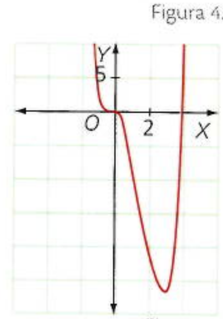


Figura 4.89

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Resolución de problemas

7 Sea $T(d)$ la temperatura en el exterior del carro de Pedro (medida en grados Celsius), dada como una función de la distancia total que él condujo (medida en kilómetros). En la gráfica de la Figura 4.90 se muestra esa relación.

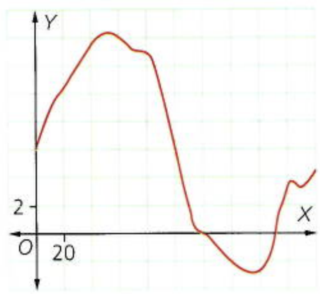


Figura 4.90

a. ¿Qué temperatura hacía en el exterior del carro cuando apenas se iniciaba el movimiento?

b. ¿En qué intervalos la temperatura exterior aumentó y en cuáles disminuyó?

c. ¿Cuál fue la temperatura máxima entre los kilómetros 0 y 110?

8 María Fernanda lanzó desde el techo de un edificio un globo lleno de agua de forma vertical. La posición vertical del globo está dada por la expresión $f(t) = 35 + 30t - 5t^2$ en metros, donde t es el tiempo en segundos desde que el globo fue lanzado.

a. ¿Cuál es la velocidad $v(t)$?, ¿cuál la aceleración $a(t)$?

b. ¿Qué tan alto llegó el globo? ¿En cuánto tiempo se logró eso?

c. ¿En cuánto tiempo llegó el globo al suelo?

9 Supón que la elevación por encima del nivel del mar de una carretera está dada por la función:

$$E(x) = 500 + \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right),$$

en donde x está en millas (mi). Supón que si x es positiva estamos al este del punto inicial de medida y x es negativa si estamos al oeste de tal punto.

Si comenzamos a 25 mi al oeste del punto inicial de medida y manejamos hasta avanzar 25 mi al este del punto inicial, ¿cuántas millas del recorrido se avanzó en una pendiente ascendente?

10 La población de conejos (en cientos) después de t años en una cierta área está dada por la expresión $P(t) = t^2 \ln(3t) + 6$.

a. ¿Cuál es la población inicial?

b. Determina si la población de conejos decrece en los dos primeros años.

11 El peso de un recién nacido (en libras) durante los tres primeros meses de vida puede modelarse mediante la función $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{19}{6}x + 8$, en donde x es el tiempo en meses. Determina los intervalos en los cuales un recién nacido gana peso y aquellos en los que lo pierde.

Evaluación del aprendizaje

i Un paciente está siendo medicado. La concentración del medicamento t horas después de comenzar el tratamiento viene dada por la expresión $C(t) = \frac{t^2 + 1}{t^3 + 1}$ mg/L.

a. Encuentra $C'(t)$.

b. Encuentra la razón de cambio instantánea de la concentración cuando $t = \frac{1}{2}$.

c. Encuentra la razón de cambio instantánea de la concentración cuando $t = 1$.

d. Cuando $t = 1$, ¿la concentración crece o decrece?

e. Encuentra la ecuación de la recta tangente cuando $t = 1$.

ii Una población de bacterias crece de tal manera que después de transcurridas t horas hay $P(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$ gramos de estas.

a. ¿En qué intervalos de tiempo crece y decrece la población?

b. ¿En qué punto se halla el máximo relativo?

c. ¿En dónde se ubica el mínimo relativo?

d. ¿Cuál es la población inicial?

e. ¿Cuál es la población en el máximo y el mínimo relativos?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

18 Problemas de optimización

Saberes previos

Si tienes un cartón y quieres construir una caja con este, ¿cómo lo cortarías para que se desperdiciara la menor cantidad de material?

Analiza

Leonardo tiene 2 400 metros de alambre para encerrar un terreno bordeado por un río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo de mayor área que puede encerrar sabiendo que no se debe cercar el lado del campo que da al río?

Conoce

La Figura 4.91 muestra la situación.

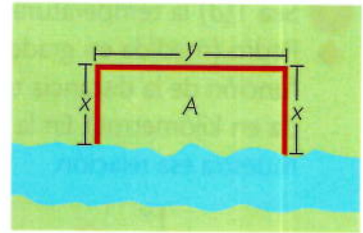


Figura 4.91

- El área A de este terreno es $A = xy$.
- El perímetro que debe bordearse es $2x + y$.

Como se tienen 2 400 metros de alambre para bordear el terreno, según se indicó, entonces $2x + y = 2\,400$, de donde $y = 2\,400 - 2x$.

- El intervalo que debe considerarse es $[0, 1\,200]$, pues al ser y una longitud debe ser mayor o igual que cero: $y = 2\,400 - 2x \geq 0$ y de ahí, $x \leq 1\,200$. Como x también debe ser mayor o igual que cero, entonces se concluye que $0 \leq x \leq 1\,200$.
- Al reemplazar y en A, se tiene la función

$$A(x) = x(2\,400 - 2x) = 2\,400x - 2x^2$$

- Para encontrar el máximo valor de la función A, se halla su derivada, se iguala a 0 y se resuelve la ecuación resultante. Por lo tanto, $A'(x) = 2\,400 - 4x = 0$, de donde, $x = 600$.
- El valor máximo de A en $[0, 1\,200]$ se alcanza en $x = 600$ o en los extremos del intervalo, así que se calcula el valor de A en cada uno de esos puntos:

$$A(0) = 0;\ A(600) = 720\,000;\ A(1\,200) = 0$$

- En el intervalo cerrado $[0, 1\,200]$ la mayor área posible es $720\,000 \text{ m}^2$ y esta se obtiene para

$$x = 600 \text{ m y } y = 2\,400 - 2(600) = 1\,200 \text{ m}$$

Para determinar el **valor máximo** y el **valor mínimo** de una función continua f en un cierto intervalo cerrado $[a, b]$, se puede proceder así:

1. Se hallan los puntos $c_1, c_2, \ldots, c_p$ del intervalo (a, b) donde f no es derivable.
2. Se obtiene $f'(x)$ y se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$. De todas las soluciones reales de esta ecuación, se tienen en cuenta solamente aquellas que estén en el intervalo abierto (a, b). Sean estas $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
3. Se calculan $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_p), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(a)$ y $f(b)$ y se eligen el mayor valor para el máximo y el menor para el mínimo.

Los máximos y mínimos de una función pueden estar en donde la derivada es 0, donde no sea derivable o en los extremos del intervalo. Cuando el intervalo es abierto, no tiene sentido calcular el valor de la función en los extremos, pero se puede sustituir por el cálculo de un límite.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 1

Para hallar la ecuación de la recta que, pasando por $A(4, 3)$, determina con los semiejes positivos un triángulo de área mínima, se siguen estos pasos:

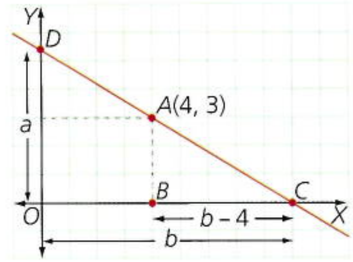


Figura 4.92

1. Se nombran las variables: base b y altura a del triángulo que se obtiene (Figura 4.92).

2. Se escribe la función a optimizar (en este caso minimizar), Área $= \dfrac{ba}{2}$.

3. Se busca una relación entre las variables. La semejanza de los triángulos ABC y DOC, nos lleva a escribir $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{b-4}$, por lo que $a = \dfrac{3b}{b-4}$ y Área $= \dfrac{1}{2} b \cdot \dfrac{3b}{b-4} = f(b)$.

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable b: $(4, +\infty)$.

5. Se busca el mínimo de $f(b) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{b^2}{b-4}$ en $(0, +\infty)$:

$f(b) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2b \cdot (b-4) - b^2}{(b-4)^2} = 0$ solo si $b^2 - 8b = 0$, de ahí que $b = 0$ o $b = 8$.

Hay que calcular $f(8)$, $\lim\limits_{b \to 4^+} f(b)$, $\lim\limits_{b \to +\infty} f(b)$:

$f(8) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{8^2}{8-4} = 24$, $\lim\limits_{b \to 4^+} f(b) = +\infty$, $\lim\limits_{b \to +\infty} f(b) = +\infty$. Por tanto, el mínimo se alcanza en $b = 8$, por lo que $a = 6$ y la recta pedida es $y = -\dfrac{3}{4}x + 6$.

Ejemplo 2

En el triángulo isósceles ABC de la Figura 4.93, $AB = AC$, el lado BC mide 4 cm y la altura trazada desde A, 1 cm. Para calcular la distancia de un punto P sobre esta altura, tal que la suma de las distancias desde P a cada vértice del triángulo sea mínima, se realiza el siguiente procedimiento.

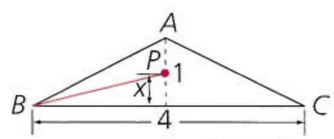


Figura 4.93

1. Se nombran variables: x es la distancia de P a BC.

2. $f(x) = PA + PB + PC = 1 - x + 2\sqrt{x^2 + 4}$.

Como la función $f(x)$ depende de una sola variable, no es necesario buscar relaciones entre variables.

3. La variable se mueve en el intervalo $[0, 1]$.

4. Se halla el mínimo de f en $[0, 1]$:

$$f'(x) = -1 + \frac{4x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = 1, \text{ es decir, si } 4x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Estos dos valores no pertenecen al intervalo $(0, 1)$, por lo que no hay ningún valor que anule la derivada en dicho intervalo $(0, 1)$. Por consiguiente, basta calcular $f(0)$ y $f(1)$ y elegir el menor. $f(0) = 5$, $f(1) = 2\sqrt{5}$, por lo que el valor mínimo se alcanza en $x = 1$, es decir, cuando $P = A$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

18 Problemas de optimización

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1 Encuentra tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble que el otro y que la suma de sus cuadrados sea:

a. máxima   b. mínima

2 Se quiere escribir un texto en una superficie de 96 cm^2, de modo que queden 2 cm en cada margen lateral de la hoja en la que está escrito, así como 3 cm arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible.

3 Se quiere construir un piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Para eso se dispone de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

4 Se dispone de un hilo metálico de 140 m de longitud. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos, de tal manera que uno de ellos tenga el doble de longitud que el otro y que, al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima.

Halla la longitud de cada trozo.

5 En el cono de radio R y altura H de la Figura 4.94 se inscribe un cono invertido con el vértice en el centro de la base. Calcula las dimensiones del cono pequeño para que su volumen sea máximo.

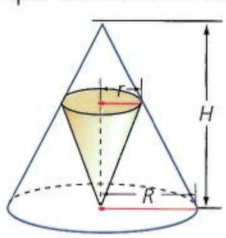


Figura 4.94

6 Dados los puntos $A(0, 3)$ y $B(4, 5)$, señala un punto M en el eje X tal que la distancia $S = AM + MB$ sea mínima.

7 En la circunferencia de un lago de 1 km de radio se marcan dos puntos A y B diametralmente opuestos. Una persona quiere ir de A a B y puede ir nadando, andando por la semicircunferencia o combinando caminos. Si nada a 2 km/h y anda a 5 km/h, ¿cuánto tardará, como mínimo, en llegar?

8 Sandra necesita encerrar un terreno rectangular. Si ella tiene 500 metros de alambre y se sabe que uno de los lados del terreno no requiere de cerca, ¿cuáles son las dimensiones de este que pueden encerrar la mayor área posible?

9 Martín quiere construir una caja cuya longitud del ancho de la base sea tres veces la longitud de su ancho. El material para elaborar la base y la tapa superior cuesta \$ 25 000 por metro cuadrado y el que requiere para las caras cuesta \$ 15 000 el metro cuadrado. Si la caja debe tener un volumen de 50 m^3, determina las dimensiones que minimizarán el costo de su construcción.

10 Ricardo tiene un trozo de cartón de 14 dm por 10 dm y quiere cortar las esquinas como se muestra en la Figura 4.95 para luego hacer los dobleces necesarios y armar una caja. Determina la altura de la caja que garantiza el máximo volumen posible.

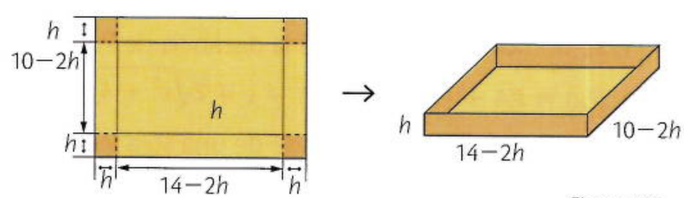


Figura 4.95

11 Se debe construir una ventana como la que se muestra en la Figura 4.96. Si hay 12 m de material para el marco, ¿cuáles deben ser las dimensiones que garanticen la mayor iluminación?

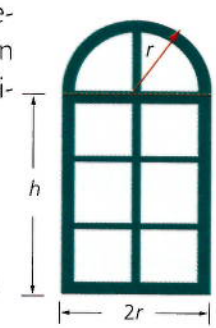


Figura 4.96

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

12 Determina el área del rectángulo con la mayor área posible que pueda inscribirse en un círculo de radio 4 (Figura 4.97).

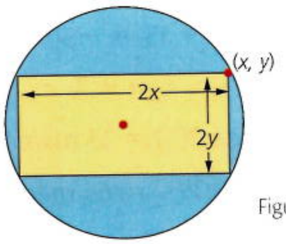


Figura 4.97

13 Una colonia de moho que crece y decrece en un periodo de $1 \leq t \leq 12$, luego de t días cubre un área de $A(t) = 12t - t^2 + 2$ dada en mm^2.

a. ¿Cuál es el área máxima que cubre la colonia durante ese periodo de tiempo?

b. ¿Después de cuántos días la colonia crece lo máximo posible?

c. ¿Cuál es el área mínima que cubre la colonia en el intervalo de tiempo indicado?

14 Se está desarrollando un medicamento para el mercado. Debido a la economía de escala, el costo de la producción de un frasco de ese medicamento depende de la cantidad de frascos que se produzcan.

Supón que el costo de producir x frascos es de $(40x + 500)$ dólares.

El laboratorio que produce el medicamento puede vender x frascos siempre que el precio de cada uno sea $70 - 0{,}05x$.

a. ¿Cuántos frascos de medicamento se deben producir para que la utilidad sea máxima?

b. ¿Cuál es la utilidad máxima?

c. ¿Cuál debe ser el precio de un frasco del medicamento para que la utilidad sea máxima?

Ten en cuenta que la utilidad se obtiene restando los costos de producción del dinero que se recibe de las ventas (o ingresos).

15 A un paciente se le administra un medicamento. Para un periodo de $0 \leq t \leq 7$, la concentración de la droga en su sangre después del inicio del tratamiento viene dado por la expresión $D(t) = -5t^2 + 34t + 15$ mg/l.

a. ¿En qué momento la concentración de la droga fue máxima durante este tiempo?

b. ¿Cuál fue esa máxima concentración?

c. ¿En cuál momento la concentración de la droga fue mínima en ese intervalo de tiempo?

Evaluación del aprendizaje

I El rendimiento de un cultivo de maíz se puede evaluar mediante la función $y = \dfrac{10x}{2 + x^2}$ para $x \geq 0$, donde x es la cantidad de toneladas de fertilizantes usadas por acre de suelo y y es la producción de maíz medida en toneladas por acre.

a. Encuentra el nivel máximo de fertilizante que se usa en el cultivo.

b. Encuentra el máximo rendimiento del cultivo.

II Un cultivo sostenible de peces C es una función tal que $C = F(P) - P$ y el máximo cultivo sostenible se halla mediante la derivada de C.

Encuentra el máximo cultivo sostenible y la población de equilibrio para:

$F(P) = P + 0{,}4P(1 - 0{,}0001P)$, donde P es el número de peces. ¿Qué porcentaje de la población de equilibrio se debe cosechar para obtener la producción máxima sostenible?

Educación ambiental

El rendimiento de un cultivo de maíz se evalúa mediante la función $y = 5x + x^2$ para $x \geq 0$, donde x es la cantidad de fertilizante por acre de suelo y y es la producción de maíz. Encuentra el nivel máximo de fertilizante que se usa.

- ¿Qué consecuencias trae el uso excesivo de fertilizantes para el ambiente?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

19 Aplicaciones de la segunda derivada

Saberes previos

Si la derivada de una función es otra función, ¿es su segunda derivada también una función?

Analiza

La contaminación del agua del mar se estudia a partir del análisis de las bacterias presentes en pequeñas muestras. La población P de una determinada bacteria, medida en miles por cm^3 (centímetros cúbicos), corresponde a la función:
$P(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 40$ para $0 < t < 7$.

- Averigua cuándo alcanza su tope la población, cuándo llega a su mínimo y dónde crece a mayor ritmo. Traza un bosquejo de la gráfica de la función P.

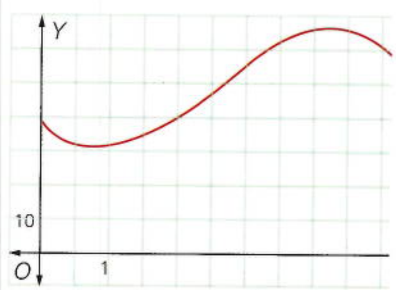


Figura 4.98

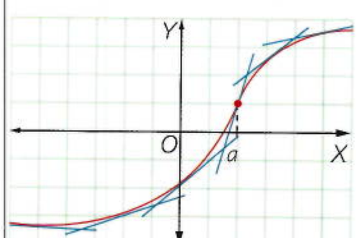


Figura 4.99

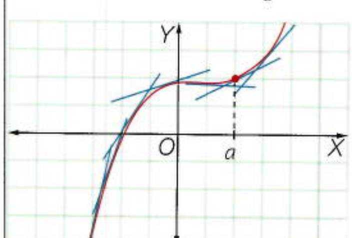


Figura 4.100

Conoce

19.1 Curvatura y puntos de inflexión

Para la situación planteada la razón de cambio corresponde a la derivada de la función $P(t)$, esto es $P'(t) = -3t^2 + 18t - 15 = -3(t - 1)(t - 5)$.

Los puntos donde la derivada es 0 son $t = 1$ y $t = 5$.

Hay un mínimo relativo en $t = 1$, donde $P(1) = 33$ mil/cm^3.

Hay un máximo relativo en $t = 5$, donde $P(5) = 65$ mil/cm^3.

En los puntos extremos del intervalo se tiene que $P(0) = 40$ mil/cm^3 y $P(7) = 33$ mil/cm^3. La colonia crece más rápido cuando la segunda derivada es 0, es decir, para $P''(t) = -6t + 18 = 0$. Esto ocurre para $t = 3$, donde la población es $P(3) = 49$ mil/cm^3.

El máximo incremento en la población es $P'(3) = 12$ mil/cm^3.

La gráfica que corresponde al comportamiento de la población de bacterias se muestra en la Figura 4.98.

Observa que si $t < 3$, $P''(t) > 0$ y si $t > 3$, $P''(t) < 0$.

Si se compara este resultado con la gráfica, se deducen las conclusiones de la Tabla 4.3 sobre la relación entre el signo de $P''(t)$ y la posición de la gráfica de $P(t)$ respecto de la recta tangente en cada punto.

Signo de $P''(t)$	Posición de la curva con respecto a la tangente
+	Curva por encima de la tangente
−	Curva por debajo de la tangente
0	No puede asegurarse nada

Tabla 4.3

Si se observa la gráfica de la función representada en la Figura 4.99, se ve que a la izquierda y hasta el punto a, la curva está por encima de la recta tangente en cada punto, y cada punto, a partir de $x = a$, está siempre por debajo de la correspondiente tangente.

Sin embargo, en la gráfica de la Figura 4.100, la posición relativa de la curva y sus tangentes es opuesta a la de la gráfica anterior.

La posición relativa de una curva y sus tangentes en los distintos puntos de su dominio define lo que se conoce como **curvatura de una función en un punto**.

Los puntos en donde se produce el cambio de la posición relativa entre la curva y sus tangentes (punto a en ambas figuras) se denominan **puntos de inflexión** de la función.

La forma de **estudiar la curvatura de una función** es sencilla en los puntos en que esta es derivable, ya que la curvatura está relacionada con el signo de la segunda derivada de una función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

En general para una función f:

- Si $f''(a) > 0$ en un entorno de a, entonces la función $f'(x)$ es creciente en dicho entorno, por lo que la recta tangente estará cada vez más vertical, (suponiendo que $f'(a) \geq 0$), es decir, la gráfica está por encima de la tangente (Figura 4.101).
- Si $f''(a) < 0$ en un entorno de $a, f'(x)$ es decreciente en dicho entorno, la recta tangente será cada vez más horizontal, (suponiendo que $f'(a) \geq 0$), esto es, la gráfica está por debajo de la tangente (Figura 4.102).
- En el caso $f''(a) = 0$ no puede asegurarse nada (Figura 4.103).

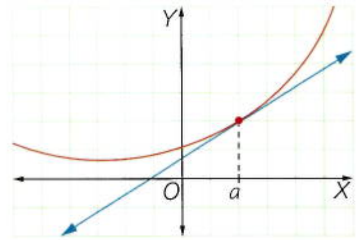


Figura 4.101

Si la curva está por encima de la tangente en un punto $P(a, f(a))$, se dice que f es **cóncava hacia arriba** en ese punto. Si la curva está por debajo de la tangente en $P(a, f(a))$, se dice que f es **cóncava hacia abajo** en ese punto.

Si la curva cambia de posición respecto de la tangente en $P(a, f(a))$, se dice que ese es un **punto de inflexión**.

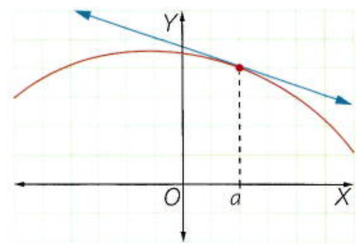


Figura 4.102

Con estas condiciones se puede escribir:

Si $f''(a) > 0, f$ es **cóncava hacia arriba** en a.

Si $f''(a) < 0, f$ es **cóncava hacia abajo** en a.

Si $f''(a) = 0$, no se puede concluir nada, pero si f presenta un **punto de inflexión** en el punto $P(a, f(a))$, entonces $f''(a) = 0$.

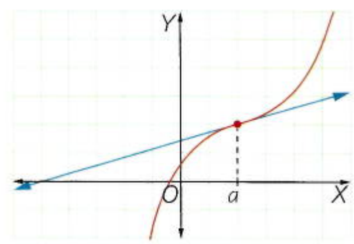


Figura 4.103

19.2 Segunda derivada para calcular de extremos relativos

La segunda derivada también sirve para saber si un punto de la tangente horizontal es máximo o mínimo de una función dada.

Si $f'(a) = 0$, es decir, si la tangente en $P(a, f(a))$ es horizontal, entonces:

- Si $f''(a) > 0$, la curva está por encima de la tangente y, por tanto, el punto $P(a, f(a))$ es un mínimo relativo.
- Si $f''(a) < 0$, la curva está por debajo de la tangente y, por tanto, el punto $P(a, f(a))$ es un máximo relativo.
- Si $f''(a) = 0$, se estudia el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de a.

Ejemplo 1

Los extremos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 1$ (Figura 4.104) se obtienen así:

$f'(x) = 12x^3 - 12x$. Así pues $f'(x) = 0$, si x toma los valores 0, 1, y -1.

$f''(x) = 36x^2 - 12$

$f''(0) = -12 < 0$, el punto $(0, 1)$ es un máximo relativo.

$f''(1) = 24 > 0$, el punto $(1, -2)$ es un mínimo relativo.

$f''(-1) = 24 > 0$, el punto $(-1, -2)$ es también un mínimo relativo.

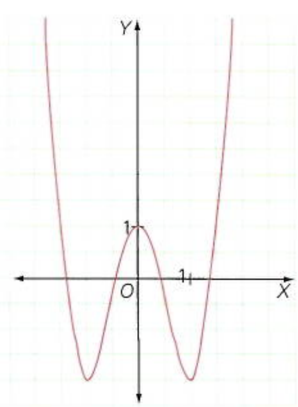


Figura 4.104

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

19 Aplicaciones de la segunda derivada

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 6x^2$.

2 Calcula para la función $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

Razonamiento

3 Estudia la curvatura y determina la abscisa de los puntos de inflexión de $f(x)$ sabiendo que

$$f''(x) = (x + 1)(x - 3)^2(x - 7)$$

Comunicación

4 ¿Tiene algún punto de inflexión la gráfica de la función definida como $f(x) = x^2 + \cos x + 1$?

Razonamiento

5 Halla los valores de m para los que la función presentada a continuación es siempre cóncava hacia arriba.

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

6 Observa en la Figura 4.105 la gráfica de la segunda derivada de cierta función f. A partir de ella, deduce la curvatura de f y sus puntos de inflexión. ¿Qué se puede afirmar con seguridad de la gráfica de f?

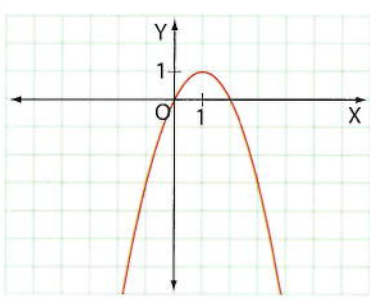


Figura 4.105

7 Considera la función $y = Ax^3 + 6x^2 - Bx$, donde A y B son constantes desconocidas. Si es posible, determina esos valores de tal manera que la gráfica de y tenga un valor máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en $x = 1$.

8 Lee y responde.

La función f (que no se muestra aquí) es continua y diferenciable para todos los números reales. Las gráficas de f' y f'' se muestran en la Figura 4.106. ¿Qué puede afirmarse de $f(-2)$?

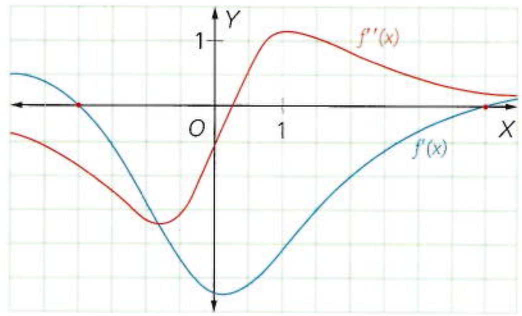


Figura 4.106

9 La Figura 4.107 muestra la gráfica de una función f y de su primera y segunda derivada.

Indica cuál de ellas corresponde a la función f, a f' y a f''.

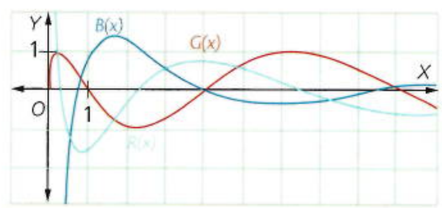


Figura 4.107

10 Determina los intervalos en los que la función cuya gráfica se muestra en la Figura 4.108 es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

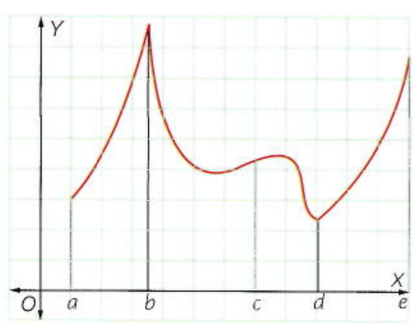


Figura 4.108

Halla los puntos de inflexión.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Resolución de problemas

11 Un rectángulo tiene x m de largo y 20 m de perímetro. ¿Cuál es el área máxima de dicho rectángulo? ¿Cuánto mide el largo del rectángulo?

12 Un balón se lanza al aire. Su altura h en cualquier momento t en segundos viene dada por la expresión $h = 5t(4 - t)$.

¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?

13 Halla dos números positivos cuya suma sea 75, tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea el máximo.

14 Demuestra que entre todos los rectángulos con área igual a 100 cm^2, el que tiene el menor perímetro es el cuadrado de lado 10 cm.

15 Un campesino desea delimitar una parcela rectangular de 900 m^2 de área. La cerca tiene un costo de \$ 15 000 el metro.

¿Cuáles deben ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado?, ¿cómo cambia la respuesta si el costo del cercado sube a \$ 20 000 por metro?

16 El costo promedio en dólares de fabricar cierto artículo es $C(x) = 5 + \frac{48}{x} + 3x^2$, en donde x es el número de artículos producidos. Encuentra el valor mínimo de C.

17 Eugenia va a construir un tanque para peces con un volumen de 3 m^3 y quiere que la base sea un rectángulo cuyo largo sea el doble que su ancho. La base y los lados del tanque serán de vidrio. ¿Con cuáles dimensiones se requerirá la menor cantidad de vidrio?

18 Alirio planea comenzar un cultivo de manzanas. Si planta más de 60 árboles, el promedio de la producción será de aproximadamente 200 libras, pero por cada árbol adicional que siembre, la producción se bajará en un promedio de 1,5 libras por árbol. Alirio quiere plantar la máxima cantidad de árboles y obtener el mayor beneficio. ¿Cuántos árboles deberá plantar para lograrlo?

Evaluación del aprendizaje

i Calcula, para la función $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión en intervalos de curvatura.

ii Halla los valores de m para los que la función:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

es siempre cóncava hacia arriba.

iii ¿Tiene algún punto de inflexión la gráfica de $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x - 1$?

iv Un estudio proyectó que para el periodo de 1990 a 2020 el número de usuarios de celular (en miles de millones), puede modelarse mediante

$f(t) = -0{,}000728t^3 + 0{,}0414t^2 - 0{,}296t + 0{,}340$, en donde t es el número de años a partir de 1990.

a. Halla la razón de cambio instantánea en el número de usuarios de celulares.

b. Encuentra la razón de cambio instantánea de la expresión que hallaste en la parte *a*.

c. Usa la segunda derivada para indicar qué tan rápido creció la cantidad de usuarios de celular entre el 2005 y el 2015.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Continuidad

Ejercitación

1 Observa la Figura 4.109 y determina:

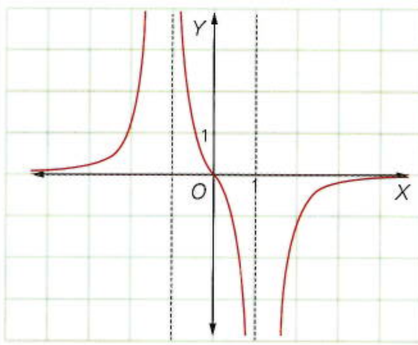


Figura 4.109

a. La continuidad por la izquierda en -1.

b. La continuidad por la derecha en -1.

c. La continuidad en -1.

d. Los intervalos donde la función es continua.

e. La continuidad de la función.

Comunicación

2 Estudia la continuidad de cada función y determina el tipo de discontinuidad que presentan.

a.

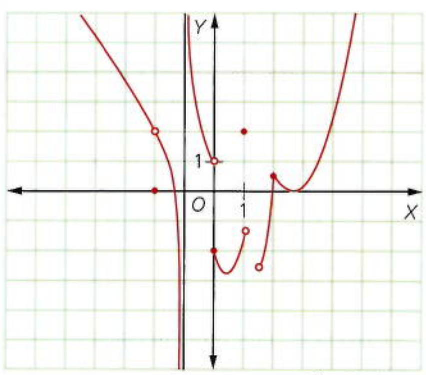


Figura 4.110

b.

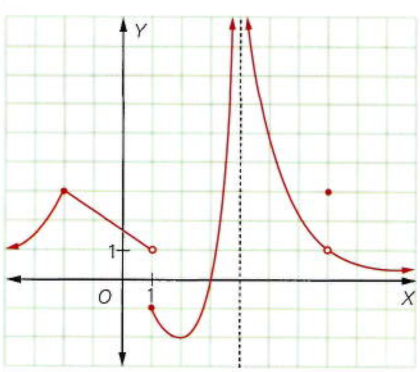


Figura 4.111

Derivadas

Ejercitación

3 Determina la segunda derivada de cada función.

a. $f(x) = x^3 + x - 2$

b. $f(x) = x^2 + x$

c. $f(x) = 4x^2 - x$

d. $f(x) = -x + 3$

e. $f(x) = 4x^5 + 2x - 8$

4 Determina si las siguientes funciones son continuas en $x = a$.

a. $f(x) = |x|$ para $a = 0$

b. $f(x) = -x^2 + 2x$ para $a = 3$

c. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ para $a = -2$

d. $f(x) = \sqrt{-x}$ para $a = 1$

5 Observa la gráfica de la función f y halla:

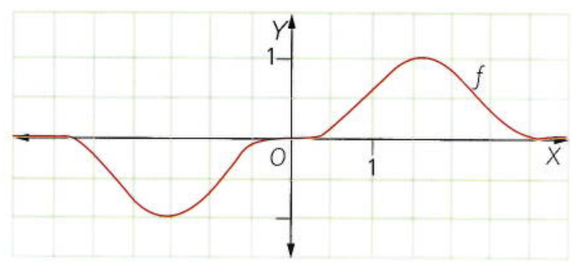


Figura 4.112

a. La ecuación de la recta secante que pasa por $P(1, f(1))$ y $Q\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

b. La ecuación de la recta tangente en $x = 1{,}5$.

c. La recta normal a la tangente en $x = 1{,}5$.

Resolución de problemas

6 La posición de un objeto lanzado con una velocidad inicial de 50 m/s se modela mediante la función $f(t) = -t^2 + 9$.

Calcula el cociente incremental y la derivada en el instante de tiempo $t = 3$ s.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Utilizar una gráfica

Problema

En la gráfica de la Figura 4.113 se muestra la función $f(x) = x^2 + 3$ y una recta tangente a dicha función en el punto $x = 2$.

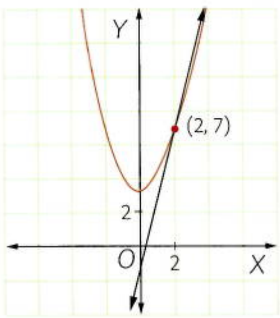


Figura 4.113

¿Cuál es la ecuación de esta recta tangente?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información te da el problema?
  R: La ecuación $f(x)$ y el punto de tangencia (2, 7).
- ¿Qué te piden encontrar?
  R: La ecuación de la recta tangente $f(x)$ en el punto $x = 2$.

2. Crea un plan

- Recuerda la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto y aplícala.

3. Ejecuta el plan

- La derivada de $f(x) = x^2 + 3$ es $f'(x) = 2x$.
- La derivada en el punto de tangencia es $f'(2) = 4$.
- La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ se halla con la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - 7 = 4(x - 2)$$
$$y = 4x - 8 + 7$$
$$y = 4x - 1$$

R: La ecuación de la recta tangente es $y = 4x - 1$.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la ecuación de la recta normal a la función en dicho punto es $y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{15}{2}$.

Aplica la estrategia

1 Observa la gráfica de la Figura 4.114 que muestra una función cuadrática y una recta tangente a ella en un punto.

$f(x) = -x^2 - 2x + 2$

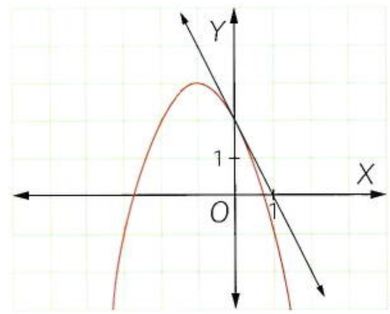


Figura 4.114

¿Cuál es la ecuación de la recta normal a la recta tangente en este punto?

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

Resuelve otros problemas

2 Un cuerpo realiza un movimiento rectilíneo descrito como $s(t) = 16t - t^3$. ¿Cuál es la expresión de su aceleración instantánea?

Formula problemas

3 Escribe un problema a partir de la siguiente información y luego resuélvelo.

"La derivada de un cociente, no es el cociente de las derivadas".

Enriquece tu vocabulario

- Construye una afirmación válida con las siguientes palabras:
  Función - Derivada - Continuidad

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Evaluación del aprendizaje

Continuidad

Razonamiento

1 Escribe el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifica tus respuestas. VERDADERO/FALSO

a. Para que una función sea continua en un punto de su dominio, solo debe existir el límite de la función en dicho punto.

b. Para que una función sea continua en un punto de su dominio, basta con que exista la imagen de ese punto.

c. Una función continua en un intervalo es continua en cada punto del mismo.

Tipos de discontinuidad

Comunicación

2 Plantea una función que cumpla las condiciones dadas en cada caso. PREGUNTA ABIERTA

a. Continua en $x = 1$.

b. Discontinua de salto finito en $x = 0$.

c. Con discontinuidad evitable en $x = -2$.

Continuidad de funciones elementales

Comunicación

3 Completa los espacios con los términos correctos para que las afirmaciones sean verdaderas. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. La ______ de dos funciones continuas en $x = a$ es continua en ______.

b. La diferencia de dos funciones ______ en $x = a$ es ______ en $x = a$.

Teorema de los valores intermedios

Razonamiento

4 Demuestra que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$ toma el valor π en el intervalo (1, 2). ACTIVIDAD DE REFUERZO

Cotas de una función

Razonamiento

5 Estudia la acotación de las funciones dadas en todo su dominio. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = 2 - x^2$

b. $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$

c. $h(x) = (x + 4)^2 - 3$

d. $i(x) = -4x + 3x^2 - 1$

Derivada de una función en un punto. Velocidad instantánea

Resolución de problemas

6 Dos partículas parten de un mismo punto sobre una recta línea y se mueven a lo largo de esta según las ecuaciones $s_1(t) = t^2 - 4t$ y $s_2(t) = 3t - t^2$, donde s_1 y s_2 están en metros y t en segundos. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. ¿En qué momento las dos partículas tendrán la misma velocidad?

b. Determina las velocidades de las partículas en el momento en que están en la misma posición sobre la recta.

Medida e instrumentos de medida de valores medios

Resolución de problemas

7 Un móvil que se desplaza con velocidad constante aplica los frenos durante 25 s y recorre 400 m hasta detenerse. Calcula: SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. La velocidad que tenía el móvil antes de aplicar los frenos.

b. La desaceleración produjeron los frenos.

Definición geométrica de la derivada

Razonamiento

8 Dada la parábola $f(x) = x^2$, halla los puntos en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Derivadas sucesivas

Ejercitación

9 Halla las primeras cinco derivadas de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Continuidad y derivabilidad

Razonamiento

10 Responde. ¿Hay alguna pareja de números a y b para los cuales la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$? Justifica tu respuesta. PREGUNTA ABIERTA

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 1, \text{ si } x < 0 \\ x^2 + a, \text{ si } 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{b}{x-1}, \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Regla de la cadena

Ejercitación

11 Halla la derivada de las siguientes funciones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $y = (1 - 5x)^6$

b. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$

Derivadas de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Ejercitación

12 Determina las derivadas de cada una de las siguientes funciones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^7}$

b. $f(x) = \ln\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}$

c. $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

d. $\operatorname{sen}^3 3x$

e. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}$

f. $f(x) = \arccos e^x$

Derivación implícita

Ejercitación

13 Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto $\left(\sqrt{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Regla de L'Hôpital

Razonamiento

14 Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. VERDADERO/FALSO

a. Si existen $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, y son iguales, se puede calcular el límite de las derivadas.

b. Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existen y hay una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Criterio de la primera y la segunda derivada

Comunicación

15 Considera las funciones dadas y estudia sus máximos y mínimos relativos, así como su crecimiento y decrecimiento. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = 6x - 3x^5 + x^4$

b. $f(x) = -x^2 + 5$

Comunicación

16 Completa las siguientes afirmaciones para que sean verdaderas. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. Los mínimos y máximos relativos de una función se hallan a partir de la ______.

b. Si la segunda derivada es ______ que 0 en un punto, hay un máximo relativo en dicho punto.

c. Si la segunda derivada es ______ que 0 en un punto, hay un mínimo relativo en ese punto.

d. Si la segunda derivada es ______ que 0 en un punto, se estudia el signo de la primera derivada a cada lado del punto.

Problemas de optimización

Modelación

17 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -4)$ y determina, con el eje X positivo y el eje Y negativo, un triángulo de área mínima. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicaciones de la primera y la segunda derivada

Resolución de problemas

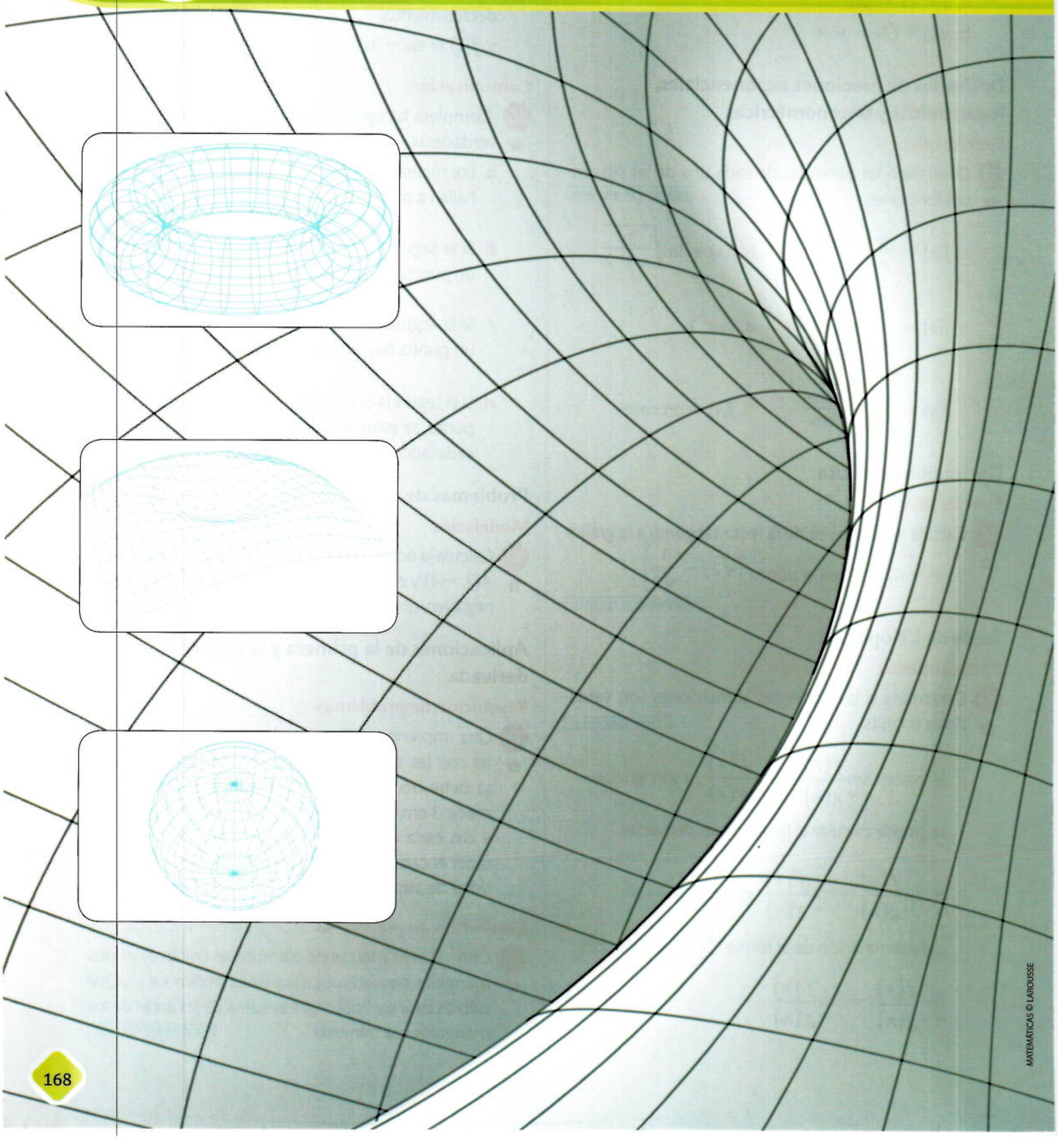
18 Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm², el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas

19 Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Análisis e interpretación de funciones



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ya sabemos

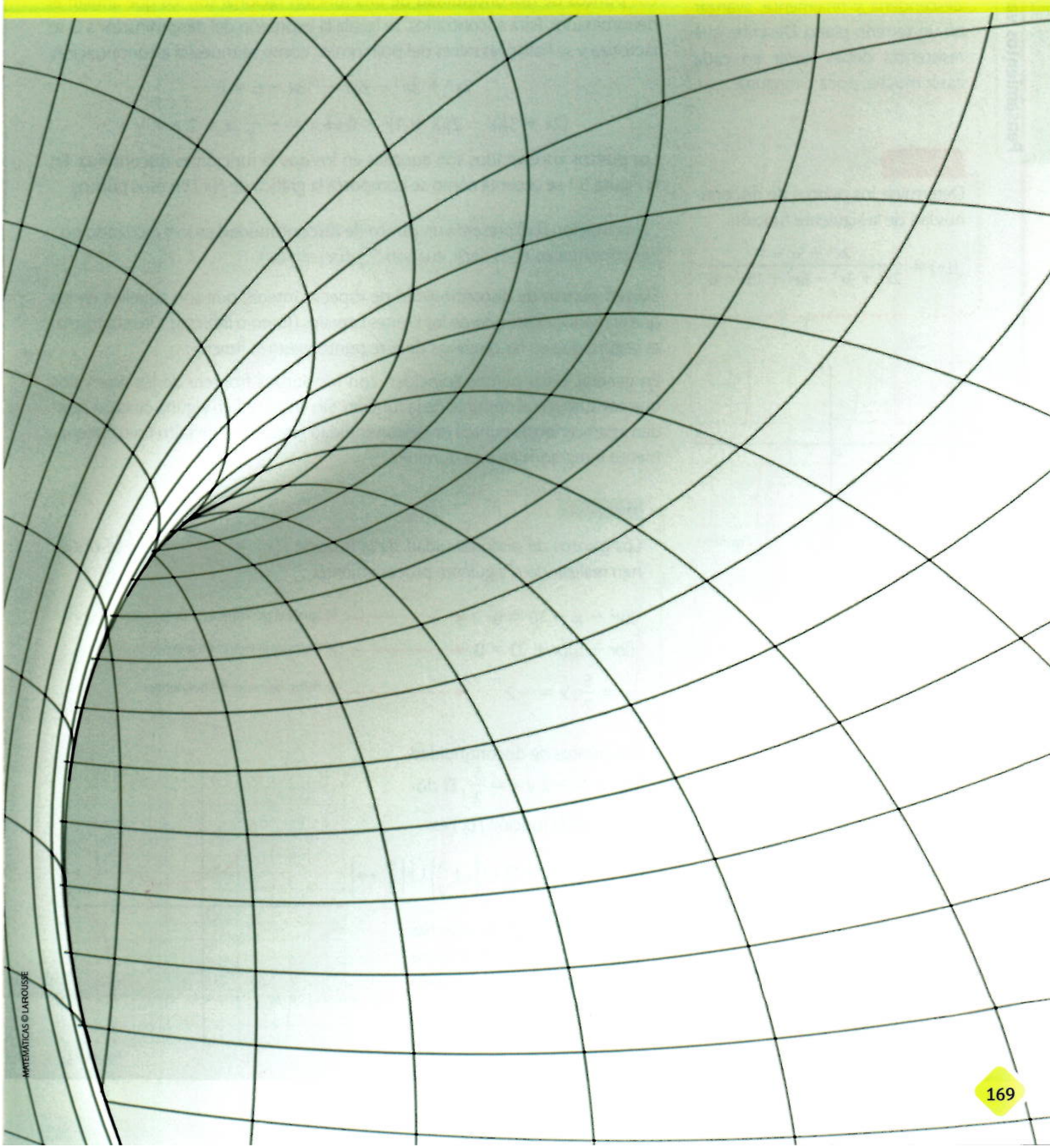
- Determinar la continuidad de funciones.
- Calcular la derivada de funciones reales.

Vamos a aprender

- A utilizar criterios y propiedades para el análisis y estudio de funciones.

Nos sirve para

- Realizar estudios sobre funciones que modelan problemas en diferentes contextos.



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Puntos de discontinuidad y puntos críticos

Saberes previos

Imagina que vas en bicicleta y debes ascender una montaña, luego descenderla y finalmente, avanzar en un terreno plano. Describe qué resistencia debes hacer en cada caso: mucha, poca o ninguna.

Analiza

Determina los puntos de discontinuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6}$$

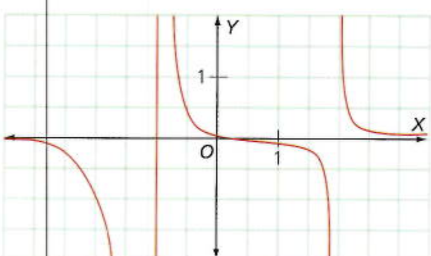


Figura 5.1

Conoce

1.1 Puntos de discontinuidad

Los **puntos de discontinuidad** de una función racional son los que anulan el denominador. Para encontrarlos, se iguala la expresión del denominador a 0, se factoriza y se hallan las raíces del polinomio, como se muestra a continuación.

$$2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 2)(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = 2, x = -1$$

Los puntos encontrados son aquellos en los que la función es discontinua. En la Figura 5.1 se observa cómo se comporta la gráfica de $f(x)$ en esos puntos.

Una función $f(x)$ presenta un **punto de discontinuidad** en $x = a$ cuando no es continua en él; es decir, cuando $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Existen puntos de discontinuidad de especial interés, que son aquellos en los que al menos existe uno de los límites laterales (finito o infinito). De esta forma, es seguro que en las cercanías de este punto exista la función.

En general, estos puntos coinciden con los puntos frontera de los intervalos que constituyen el dominio de la función. Sin embargo, en alguna ocasión pueden aparecer otros puntos de discontinuidad (evitable o de salto finito) plenamente integrados en este dominio.

Ejemplo 1

Los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{2x - 8}{2x^2 - x - 10}$ se obtienen realizando el siguiente procedimiento.

$2x^2 - x - 10 = 0$ ← Se iguala el denominador de la función $f(x)$ a 0.

$(2x - 5)(x + 2) = 0$ ← Se factoriza la expresión anterior.

$x = \frac{5}{2}, x = -2$ ← Se hallan las raíces del polinomio.

Los puntos de discontinuidad son $x = -2$ y $x = \frac{5}{2}$. El dominio de la función $f(x)$ es:

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup \left(-2, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

En la Figura 5.2 se observa la gráfica de la función y su comportamiento en los puntos de discontinuidad.

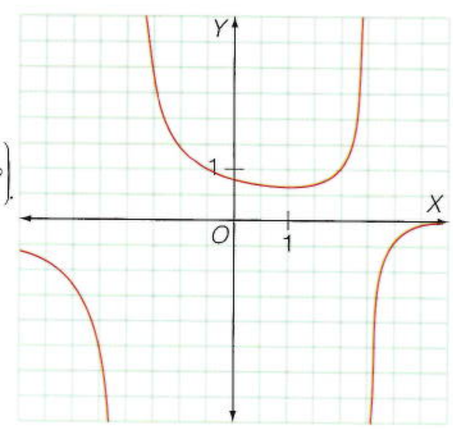


Figura 5.2

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.2 Puntos críticos

Los **puntos críticos** de una función f son los puntos en los que la función es continua y su primera derivada se anula o no existe; es decir, los puntos $x = a$ en los que $f'(a) = 0$ o $f'(a)$ no existe.

Ejemplo 2

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene por derivada $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. El punto $x = 0$ es un punto crítico, ya que en él la función es continua, pero no existe $f'(0)$.

Ejemplo 3

Los puntos críticos de la función $f(x) = \dfrac{2x - 8}{2x^2 - x - 10}$, cuyos puntos de discontinuidad se estudiaron en el ejemplo 1, se calculan igualando a 0 la primera derivada de la función $f(x)$ y despejando la variable x.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 32x - 28}{(2x^2 - x - 10)^2} = 0$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $-4x^2 + 32x - 28 = 0$. Al factorizar este polinomio y hallar sus raíces, se obtiene $x = 1$ y $x = 7$ que son puntos críticos de esta función. Como para todos los elementos del dominio existe la primera derivada de $f(x)$, entonces $x = 1$ y $x = 7$ son los únicos puntos críticos de esta función.

Ejemplo 4

Observa cómo determinar los puntos de discontinuidad y los puntos críticos de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$ **b.** $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

a. La función $f(x)$ es discontinua en los valores en los que la expresión $x^2 - 4$ es igual a 0. Si $x^2 - 4 = 0$, entonces $x^2 = 4$, de donde $x = -2$ y $x = 2$.

Luego, el dominio de la función es $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ son $x = -2$ y $x = 2$.

Para hallar los puntos críticos de $f(x)$, se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Teniendo en cuenta que para todos los elementos del dominio de $f(x)$ existe la primera derivada, el único punto crítico es $x = 0$. En la Figura 5.3 se observa la representación gráfica de la función $f(x)$.

b. La función está definida en $\mathbb{R}$ y, por eso, no existen puntos de discontinuidad. Tampoco tiene puntos críticos. La representación gráfica de esta función se observa en la Figura 5.4.

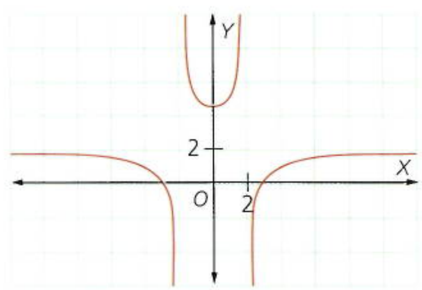


Figura 5.3

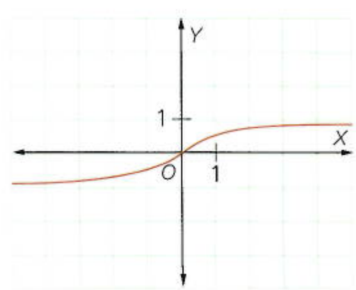


Figura 5.4

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Puntos de discontinuidad y puntos críticos

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x}$

b. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{2x - 3}$

c. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$

d. $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

e. $f(x) = \sqrt{e^{2x^2 - 5x + 2}}$

f. $f(x) = \dfrac{3x}{2x - 5} - \dfrac{1}{x^2}$

Razonamiento

2 Indica los puntos de discontinuidad de especial interés (puntos de discontinuidad en los que al menos existe uno de los límites laterales) en las funciones de la actividad 1.

Indica también si en alguno de estos puntos la función es continua a la izquierda o a la derecha.

Ejercitación

3 Calcula el recorrido de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 + x - 6$

b. $f(x) = 2x^3 - 3$, si $-2 < x < 4$

c. $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$

4 Indica los puntos de discontinuidad de $f(x)$.

a. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 5}{2}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 + 4}$

c. $f(x) = x + \sqrt{x + \dfrac{1}{2}}$

d. $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$

e. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 5}$

Comunicación

5 Determina los puntos de discontinuidad de las funciones representadas a continuación.

a.

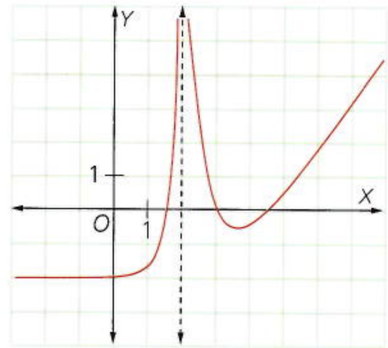


Figura 5.5

b.

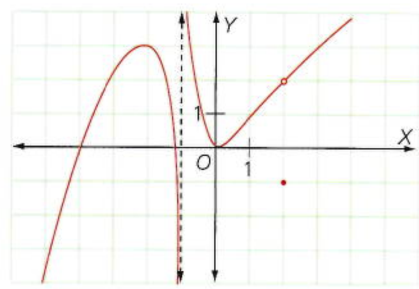


Figura 5.6

c.

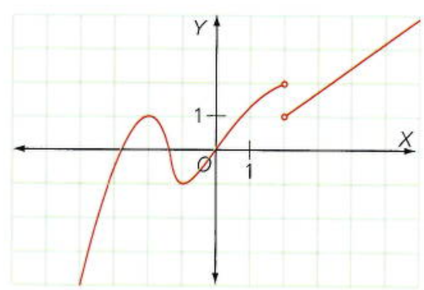


Figura 5.7

d.

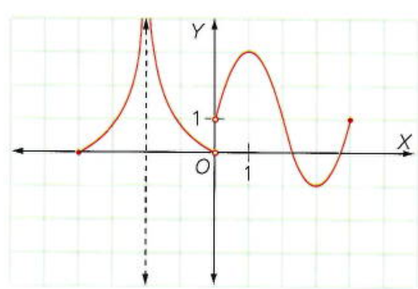


Figura 5.8

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejercitación

6 Halla los puntos críticos de $f(x)$.

a. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 4}}$

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 - 4}$

c. $f(x) = \dfrac{-2x + 1}{x^2 - 4x + 4}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x - 8}}$

7 Determina los puntos críticos de las funciones que se representan en las figuras 5.9 y 5.10.

a.

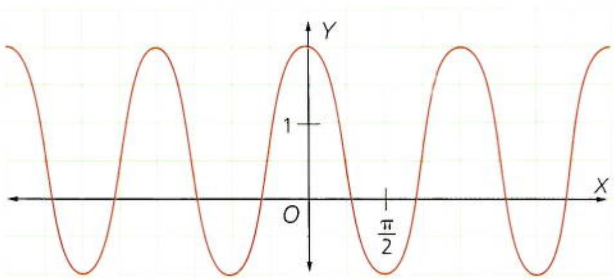


Figura 5.9

b.

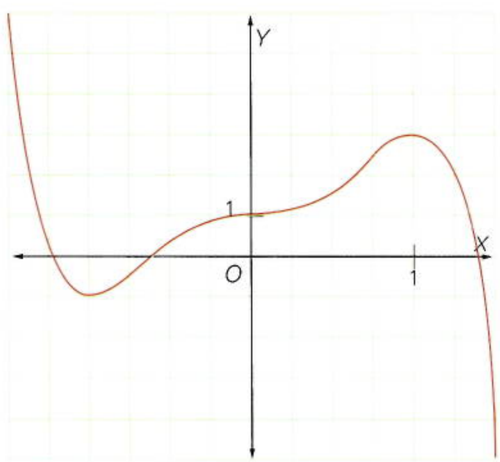


Figura 5.10

Modelación

8 Propón una función para cada caso, que tenga los puntos críticos que se piden.

a. Un punto crítico.

b. Dos puntos críticos.

c. Ningún punto crítico.

d. Infinitos puntos críticos.

Resolución de problemas

9 Un ratón es introducido repetidas veces en un laberinto para estudiar su capacidad de aprendizaje. Se ha observado que el tiempo, en minutos, que tarda en recorrerlo en el intento x viene dado por la fórmula $T(x) = 4 + \dfrac{12}{x}$.

a. Calcula el dominio de $T(x)$ en este contexto.
b. ¿Puede tardar el ratón menos de 4 minutos en realizar el trayecto?
c. Calcula el recorrido de $T(x)$ en su contexto.
d. Determina los puntos de discontinuidad y los puntos críticos de la función $T(x)$.

Evaluación del aprendizaje

i Indica si los valores dados son puntos críticos de cada función.

a. $f(x) = -3x^2 + 2x$ $\quad x = \dfrac{1}{3}$

b. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{1 + x^2}$ $\quad x = 1$ y $x = -1$

c. $f(x) = x^4 + 32x$ $\quad x = -2$

d. $f(x) = -\dfrac{2}{5}\ln\left(\dfrac{x}{3}\right)$ $\quad$ No tiene

ii Una compañía de telefonía ofrece la promoción que se muestra en el aviso publicitario de la Figura 5.11.

Escribe sin parar

Los **10** primeros mensajes del mes son gratis. Puedes mandar hasta **100** mensajes por **$10 000** y, si envías más de **100**, cada uno te costará **$80**.

¡Suscríbete ya!

Figura 5.11

a. Escribe la función que relaciona el número de mensajes enviados, x, con su costo total.
b. Haz en tu cuaderno la representación gráfica de la función.
c. Halla el dominio de la función.
d. Determina los puntos de discontinuidad de la función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Puntos de corte con los ejes, signo, simetría y periodicidad

Saberes previos

¿Puede una función cortar al eje Y en más de un punto? Explica.

Analiza

¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes de la función cuya gráfica se muestra en la Figura 5.12?

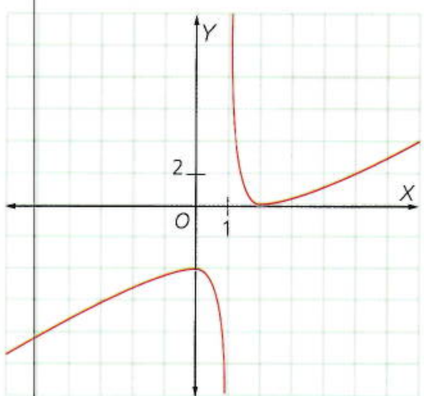


Figura 5.12

Conoce

2.1 Puntos de corte con los ejes

En la Figura 5.12 se observa que la función corta al eje X en el punto $(2, 0)$ y al eje Y en el punto $(0, -4)$.

El **punto de corte con el eje de ordenadas** Y, si existe, es $P(0, f(0))$.

Para calcular los **puntos de corte con el eje de abscisas** X, es preciso encontrar, si existen, las soluciones $x_1, x_2 \ldots$ de la ecuación $f(x) = 0$. Los puntos buscados serán $Q_1(x_1, 0)$, $Q_2(x_2, 0)$, ...

Ejemplo 1

La expresión de la función de la Figura 5.12 es:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}.$$

Al calcular $f(0)$, se obtiene $f(0) = -4$. Por lo tanto, la función corta al eje de ordenadas en el punto $(0, -4)$.

Para calcular los puntos de corte con el eje X, se considera $f(x) = 0$ y se resuelve la ecuación como se muestra a continuación:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Entonces, $f(x)$ corta al eje de las abscisas en el punto $(2, 0)$.

2.2 Signo

Estudiar el **signo de una función** consiste en determinar en qué intervalos la función toma valores positivos, es decir, saber cuándo la gráfica está por encima del eje X, y en qué intervalos toma valores negativos, o cuándo la gráfica está por debajo del eje X.

Ejemplo 2

Para estudiar el signo de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$, es necesario resolver la inecuación $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} > 0 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{x - 1} > 0.$

De ahí se obtiene que $f(x)$ está por encima del eje X en el intervalo $(1, +\infty)$ y está por debajo del eje X en $(-\infty, 1)$.

2.3 Simetría

Una función es **simétrica respecto al eje** Y si se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función par.**

Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas** si se cumple que $f(-x) = -f(x)$. En este caso se dice que es una **función impar.**

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 3

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas, porque $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

2.4 Periodo

Una función es **periódica** de periodo T si para todo x real y n entero, $f(x + nT) = f(x)$. Esto es, la gráfica de la función en cada intervalo de la forma $[nT, (n + 1)T)$, con n entero, es igual que la gráfica de la función en el intervalo $[0, T)$ y, por tanto, basta con estudiarla en ese intervalo.

Ejemplo 4

Para calcular el periodo de $g(x) = \cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}x$, se tiene en cuenta que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π; por tanto, se calcula $g(x + 2\pi)$.

$$g(x + 2\pi) = \cos\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - \operatorname{sen}x \neq g(x)$$

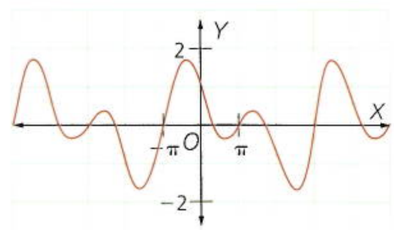


Figura 5.13

Para obtener una expresión equivalente a $g(x)$, en la función coseno debe aparecer la expresión $\dfrac{x}{2} + 2\pi$.

Lo anterior se logra al tomar 4π como periodo. Es decir:

$$g(x + 4\pi) = \cos\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) - \operatorname{sen}x$$
$$= \cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}x = g(x)$$

Así pues, el periodo de la función es $T = 4\pi$.

La gráfica de la función $g(x)$ se observa en la Figura 5.13.

Ejemplo 5

En la función $f(x) = x^3 - 4x$, el punto de corte con el eje de ordenadas es $A(0, f(0)) = (0, 0)$.

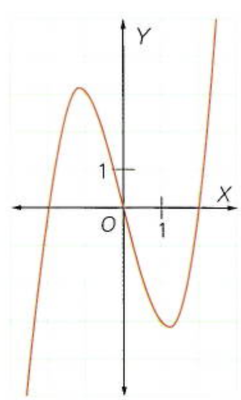


Figura 5.14

Al resolver la ecuación $x^3 - 4x = 0$, se obtienen los puntos de corte con el eje de abscisas, que son $A(0, 0)$, $B(-2, 0)$ y $C(2, 0)$.

Para estudiar el signo, se resuelve la inecuación $x^3 - 4x < 0$. Luego, f es positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

Como $f(-x) = (-x)^3 - 4 \cdot (-x) = -(x^3 - 4x) = -f(x)$, la función es impar y, por tanto, simétrica respecto al origen.

La Figura 5.14 muestra la representación gráfica de esta función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Puntos de corte con los ejes, signo, simetría y periodicidad

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina los puntos de corte con los ejes, el signo y la simetría de cada una de las funciones representadas en las figuras 5.15 a 5.17.

a.

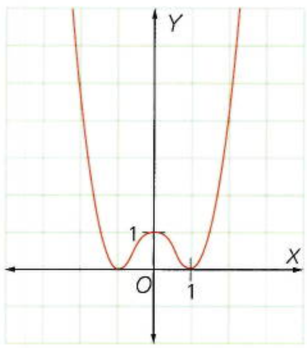


Figura 5.15

b.

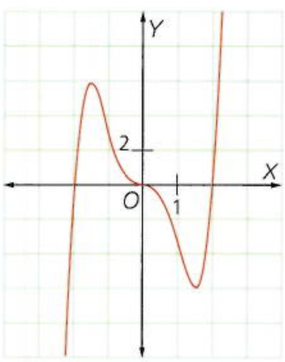


Figura 5.16

c.

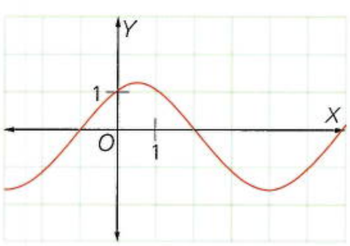


Figura 5.17

2 Estudia si son periódicas las siguientes funciones, y si lo son, indica su periodo.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x + \tan x$

b. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \tan 2x$

c. $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \tan 3x$

3 Halla los puntos de corte con los ejes y estudia el signo de cada función.

a. $f(x) = (x - 1)(x + 1)^2$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 1}$

c. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

d. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$

e $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

4 Estudia las simetrías de las siguientes funciones.

a. $f(x) = -2x^3 + x - 1$

b. $f(x) = \ln x^2$

c. $f(x) = \dfrac{x^6}{x^4 - 1}$

d. $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^3 - x}$

e. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

f. $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \cos 5x$

Modelación

5 Traza la gráfica de una función f que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

a. Es simétrica con respecto al eje de abscisas y periódica con periodo 2.

b. Es simétrica con respecto al origen y puntos de corte con el eje X en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

c. No tiene simetría par ni impar y es negativa en $(-\infty, 2)$.

d. Es positiva en $(-\infty, -5) \cup (0, 2)$ y negativa en $(-5, 0) \cup (2, \infty)$ y tiene un punto de corte con el eje Y en $(0, 0)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejercitación

6 Calcula el periodo de cada función.

a. $f(x) = \sec x$

b. $f(x) = \tan x$

c. $f(x) = \tan(\pi x)$

d. $f(x) = \operatorname{sen} 4x$

e. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$

f. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos 3x$

g. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

Razonamiento

7 Comprueba que si una función $f(x)$ tiene periodo T, entonces la función $f(ax)$ tiene periodo $\frac{T}{a}$. Utiliza esta propiedad para hallar el periodo de cada una de las funciones.

a. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x$

b. $f(x) = \cos^2 \frac{\pi}{3} x$

c. $f(x) = \tan(3\pi x)$

d. $f(x) = \cot^2 \frac{\pi}{3} x$

8 Lee, analiza y responde las preguntas.

a. Si una función es periódica de periodo 4, es suficiente conocer su gráfica en el intervalo $[-2, 2]$ para poder representarla en $\mathbb{R}$.

b. ¿Qué relación tienen dos funciones que son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante?

c. ¿La suma de dos funciones pares también es una función par?

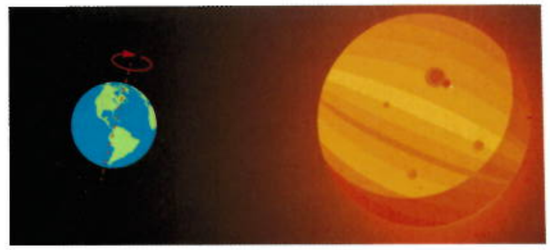
d. ¿El cociente de dos funciones impares es una función par o una función impar? Muestra con un ejemplo.

e. ¿Una función puede tener infinitos puntos de corte con el eje X?, ¿y con el eje Y? Justifica tus respuestas.

f. ¿Existe alguna función que tenga simetría par e impar a la vez?, ¿cuál?

Resolución de problemas

9 En su movimiento de rotación, la Tierra da una vuelta completa sobre de su eje en un día.



a. Haz la gráfica de la función que indica el número de grados que gira la Tierra en función del tiempo durante un día.

b. ¿Cómo sería la gráfica anterior a lo largo de una semana?

c. ¿La función es periódica?, ¿la función es simétrica?

Evaluación del aprendizaje

✓ Determina los puntos de corte con los ejes, el signo y la simetría de cada función.

a.

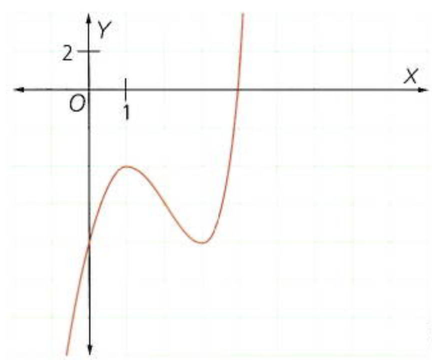


Figura 5.18

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$

Estilos de vida saludable

Tener lapsos de descanso mientras estudias es importante para lograr un mejor rendimiento. Se recomienda un descanso de cinco minutos por cada hora de estudio. Traza la gráfica de una función con la que puedas interpretar la información anterior, suponiendo que estudias 4 horas seguidas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Ramas infinitas. Asíntotas

Saberes previos

Cuando un meteorito se acerca a un planeta su gravedad lo atrae y hace que su velocidad aumente. En un cierto momento el planeta "expulsa" al meteorito y este se aleja hacia el infinito. Traza una gráfica que muestre la trayectoria del meteorito.

Analiza

Describe lo que observas en la Figura 5.19.

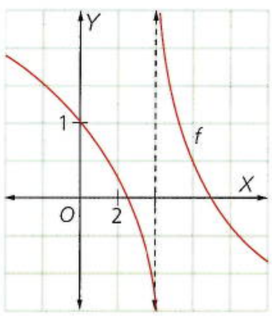


Figura 5.19

Conoce

3.1 Asíntotas verticales

En la función $f(x)$ de la Figura 5.19 se observa que cuando x se acerca a 4, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes o más pequeños, respectivamente. Es decir:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$$

Las dos ramas de la función que se acercan a la recta $x = 4$ se conocen como **ramas infinitas** (aparecen cuando alguna de las variables o ambas tienden a $+\infty$ o a $-\infty$). Si una rama infinita de una función se aproxima a una recta, como en este caso, dicha recta será una **asíntota** de la función. Por tanto, la recta $x = 4$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

Siendo a un número real, la recta vertical $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si se verifica lo siguiente:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ o bien } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo 1

Observa el procedimiento para hallar las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}$.

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, las posibles asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

- $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}$ es del tipo $\dfrac{k}{0}$; entonces, se calculan los límites laterales.

$\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = +\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = -\infty$. Por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de f.

- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \lim_{x\to 1} -\frac{x + 2}{1 + x} = -\frac{3}{2}$. Luego, $x = 1$ no es una asíntota de la función f. En la Figura 5.20 se observa la gráfica de la función.

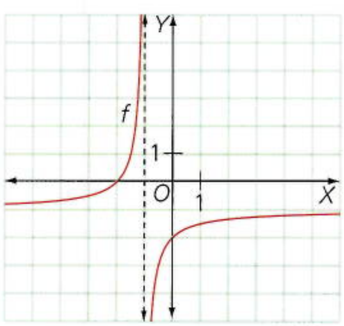


Figura 5.20

3.2 Asíntotas horizontales

La recta $y = h$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si se cumple:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = h \text{ o bien } \lim_{x\to -\infty} f(x) = h$$

Ejemplo 2

Para hallar las asíntotas horizontales de la función $f(x) = e^x + 2$, se deben calcular los límites de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} (e^x + 2) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to -\infty} (e^x + 2) = 2$$

Por lo tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de f cuando x tiende a $-\infty$. Observa que, como $e^x > 0$ para todo x, $e^x + 2 > 2$; entonces, la gráfica de f queda siempre por encima de la recta $y = 2$ (Figura 5.21).

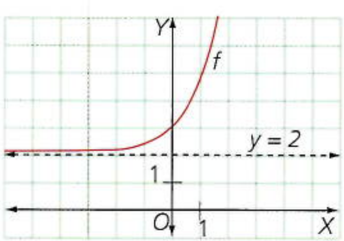


Figura 5.21

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3.3 Asíntotas oblicuas

En otras ocasiones, cuando x toma valores grandes, los correspondientes valores de $f(x)$ también se hacen grandes. En estos casos interesa saber si la función se aproxima a una recta oblicua.

La recta $y = mx + n$ con $m \neq 0$ y $n \neq 0$ es la ecuación de una **asíntota oblicua** de $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \text{ o } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

Ejemplo 3

La función $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ no tiene asíntotas horizontales, porque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Para hallar las asíntotas oblicuas de esta función, se divide el polinomio del numerador entre el polinomio del denominador. De esta manera, se puede escribir $g(x) = (x - 1) + \dfrac{1}{x+1}$, es decir, $g(x) - (x - 1) = \dfrac{1}{x+1}$; por eso, para valores grandes de x, los valores de $g(x)$ y de la recta $y = x - 1$ son prácticamente iguales y, para ellos, el cociente $\dfrac{1}{x+1}$ es prácticamente 0. Por tanto, $y = x - 1$ es una asíntota oblicua de $g(x)$, tanto si x tiende a $+\infty$ como si tiende a $-\infty$ (Figura 5.22).

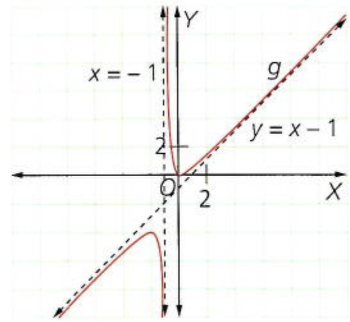


Figura 5.22

3.4 Método general para el cálculo de asíntotas oblicuas

Si $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$, entonces:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \text{ y } n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

Ejemplo 4

Para calcular las asíntotas oblicuas de $f(x) = 3x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, se observa que $D(f) = (0, +\infty)$; entonces solo tiene sentido calcular una asíntota oblicua cuando x tienda a $+\infty$. Si $y = mx + n$ es la asíntota oblicua, entonces:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}{x} = 3$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left(3x + \sqrt{\frac{1}{x}} - 3x\right) = 0$$

La asíntota es $y = 3x$. En la Figura 5.23 se tiene la gráfica de la función $f(x)$. En ella se observa también que f tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

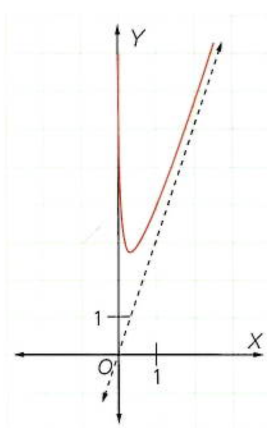


Figura 5.23

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Ramas infinitas. Asíntotas

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Observa las representaciones gráficas de las funciones y explica por qué en cualquiera de ellas la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$.

a.

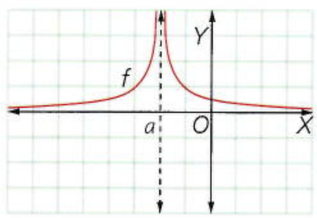


Figura 5.24

b.

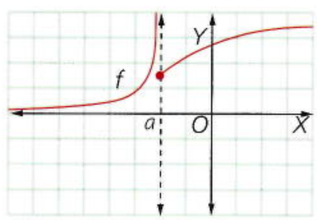


Figura 5.25

c.

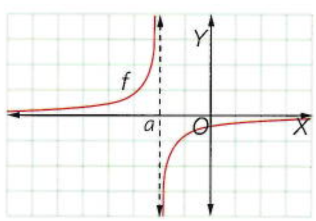


Figura 5.26

Razonamiento

2 Observa la Figura 5.27 y calcula los límites.

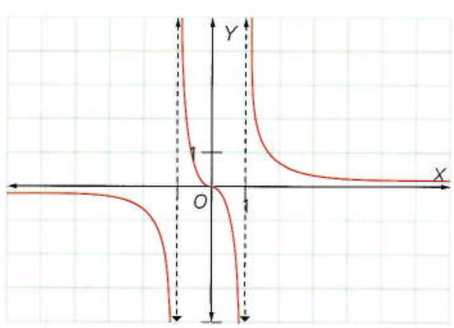


Figura 5.27

a. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

f. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Ejercitación

3 Estudia las asíntotas de las siguientes funciones polinómicas.

a. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2$

b. $f(x) = x^3 + x^2 - 8$

4 Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 2}$

c. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$

d. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^3 - 1}$

e. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x}{x^2 + 1}$

f. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{2x^2 - 3}$

g. $f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 + 4}$

h. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

i. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$

5 Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones irracionales.

a. $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{3}{4}}$

b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4 - 16}{x}}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + \dfrac{1}{4}}$

e. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Determina las asíntotas de las siguientes funciones con valores absolutos.

a. $f(x) = |2x - 3| + x|x - 1|$

b. $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

c. $f(x) = \dfrac{|x| + 2}{x + 2}$

d. $f(x) = \ln(|x - 2|)$

7 Calcula las asíntotas de las siguientes funciones trigonométricas.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x$

b. $f(x) = \operatorname{sen} x + 3\cos x$

Razonamiento

8 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Explica tu respuesta.

a. La función $f(x) = -\dfrac{3}{x^2 + 4}$ tiene dos asíntotas verticales, una en $x = 2$ y otra en $x = -2$. ( )

b. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 2}$. ( )

c. La función $f(x) = (2 + x^2)e^{\frac{x}{2}}$ no tiene asíntotas verticales. ( )

d. La función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ no tiene asíntotas verticales, horizontales ni oblicuas. ( )

e. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical por derecha de $f(x) = \ln\sqrt{x + 1}$. ( )

9 Lee, analiza y responde.

Una función racional f tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y el dominio de una función g es $\mathbb{R} - \{1\}$.

a. ¿Se puede afirmar que 2 no es un punto del dominio de f?

b. ¿Es $x = 1$ una asíntota vertical de g?

c. Escribe la expresión de una función f y de una función g que cumpla con las condiciones establecidas.

10 Si f es la función definida en $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = 1$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

c. La recta de ecuación $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de la función f.

d. La función no tiene asíntotas horizontales ni asíntotas verticales.

Resolución de problemas

11 Se estima que el número de tableros digitales en los colegios de una ciudad crecerá según la función $p(x) = \dfrac{3\,000x^2}{x^2 + 1}$, donde x corresponde al tiempo medido en años.

a. Encuentra las asíntotas de la función $p(x)$.

b. Según esta función, ¿cuál es el tope máximo que se alcanzará al pasar los años en el número de tableros digitales?

c. Traza la gráfica de la función en tu cuaderno.

Evaluación del aprendizaje

La curva de la Figura 5.28 representa la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

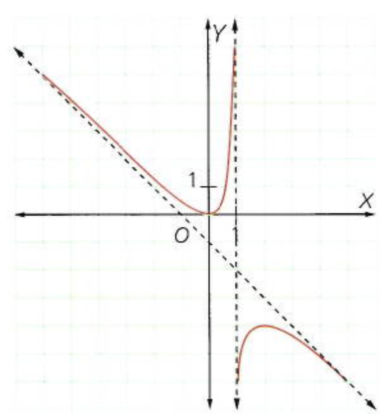


Figura 5.28

¿Cuál es el valor de a, b, c, d y e?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Análisis gráfico de funciones

Saberes previos

Traza la gráfica de una función que sea simétrica con respecto al eje Y y que tenga un máximo y un mínimo relativo. Describe el comportamiento de tu función.

Analiza

Las gráficas de las funciones asociadas a situaciones de la cotidianidad permiten observar el comportamiento de las funciones y obtener diversas conclusiones. En la Figura 5.29 se observa la variación de las ventas de una empresa desde el primer año de su creación hasta los siguientes nueve años.

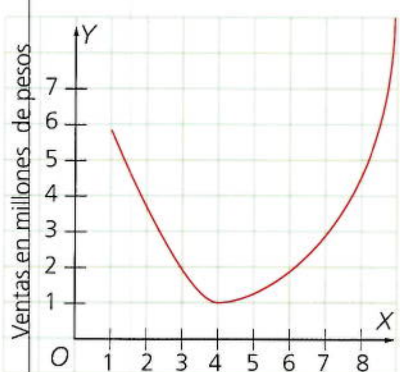


Figura 5.29

- Escribe dos conclusiones que puedas inferir de la Figura 5.29.

Conoce

En la Figura 5.29 se observa que las ventas de la empresa durante los primeros cuatro años decrecieron; sin embargo, después del cuarto año empezaron a aumentar de manera considerable. A partir de la gráfica, también se puede inferir el total de las ventas en cada año; por ejemplo, en el octavo año la empresa vendió \$ 4 500 000.

Teniendo en cuenta la importancia de la representación gráfica de una función, a continuación se presentan los pasos para realizar un estudio completo de una función y obtener su representación gráfica.

I. Dominio y continuidad

Se determina el conjunto de números para los cuales se puede hallar el valor de la función y, dentro de este, aquellos valores en los cuales la función es continua.

II. Simetría

Se estudia la simetría de la función teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- Si $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D(f)$ $\Rightarrow$ La función es simétrica respecto al eje Y.
  $\Rightarrow$ f es una función par.
- Si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D(f)$ $\Rightarrow$ La función es simétrica respecto al origen O.
  $\Rightarrow$ f es una función impar.

III. Periodicidad

Se analiza si la función es periódica; para ello, se verifica si existe un número real T tal que para cualquier x del dominio $f(x) = f(x + T)$. Si se cumple tal igualdad, la función es periódica con periodo T. El estudio de la periodicidad se aplica principalmente en funciones trigonométricas.

IV. Puntos de corte con los ejes

Se calculan, si es posible, los puntos de corte con los ejes.

- **Con el eje de abscisas:** se resuelve la ecuación $f(x) = 0$.
  Se puede obtener ninguno, uno, varios o infinitos puntos de corte con el eje X.
- **Con el eje de ordenadas:** se sustituye en $y = f(x)$ el valor $x = 0$.
  Se puede obtener, como máximo, un punto de corte con el eje Y.

V. Asíntotas

Se estudia si la función tiene asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

- Las **asíntotas verticales** son las rectas $x = a$, tales que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.
  Se buscan en los puntos en los que la función no está definida o no es continua.
- Las **asíntotas horizontales** son las rectas $y = b$, tales que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.
- Las **asíntotas oblicuas** son las rectas $y = mx + n$, tales que $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

VI. Crecimiento

Se estudia la monotonía de la función.

Cuando una función es derivable:

- Los **intervalos de crecimiento** I son aquellos en los que se verifica que $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, y
- Los **intervalos de decrecimiento** I son aquellos en los que se verifica que $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$.

VII. Puntos de inflexión y concavidad

Cuando una función es dos veces derivable, se hallan los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

- **Intervalos de concavidad hacia arriba:** son los intervalos I en los que $f''(x) > 0$, para todo $x \in I$.
- **Intervalos de concavidad hacia abajo:** son los intervalos I en los que $f''(x) < 0$, para todo $x \in I$.
- **Punto de inflexión** $(a, f(a))$: es aquel para el que se cumple $f''(a) = 0$ o $f''(a)$ no existe y, además, es el punto en el que la función cambia su concavidad.

VIII. Representación gráfica

Con la información obtenida en los pasos anteriores, se traza la gráfica de la función. En algunos casos puede resultar aconsejable realizar una tabla de valores, para facilitar la representación gráfica de la función.

Ejemplo 1

Observa el estudio de la función $h(x) = x^2 - 5$ y su correspondiente representación gráfica.

- La función cuadrática $h(x)$ está definida y es continua para todo número real; luego, $D(h) = \mathbb{R}$.
- La función tiene simetría par, pues se cumple que $h(-x) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$h(-x) = (-x)^2 - 5 = h(x)$$

- Los puntos de corte con el eje X son $\left(-\sqrt{5},\ 0\right)$ y $\left(\sqrt{5},\ 0\right)$ y el punto de corte con el eje Y es $(0, -5)$.
- $h'(x)$ es creciente para todo $x \in (0, +\infty)$ y es decreciente para todo $x \in (-\infty, 0)$.

$$h'(x) = 2x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x > 0$$

$$h'(x) = 2x < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x < 0$$

- La función es cóncava hacia arriba en todo su dominio, pues $h''(x) = 2$, y $2 > 0$. La función $h(x)$ no tiene concavidad hacia abajo; por tanto, no existe punto de inflexión.
- El bosquejo de la gráfica de la función $h(x) = x^2 - 5$ se representa en la Figura 5.30, teniendo en cuenta el estudio efectuado en los pasos anteriores.

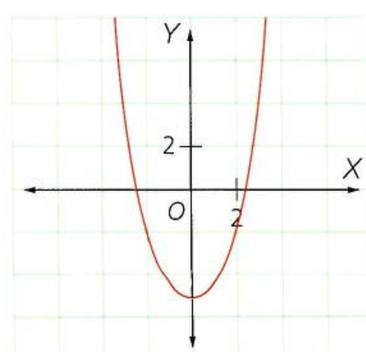


Figura 5.30

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Análisis gráfico de funciones

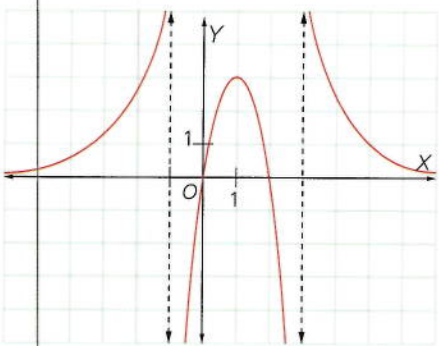


Figura 5.31

Ejemplo 2

Observa cómo se representa la función que cumple los siguientes requisitos.

- Tiene dos asíntotas verticales, que son: $x = -1$ y $x = 3$.
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (1, 3) \cup (3, +\infty)$
- $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (-1, 3)$
- $f(0) = f(2) = 0, f(1) = 3$

Primero, se representan en unos ejes coordenados las asíntotas verticales.

El signo de la primera derivada indica que la función es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 1)$ y decreciente en $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$; también, que tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.

El signo de la segunda derivada indica que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y $(3, +\infty)$ y hacia abajo en $(-1, -3)$.

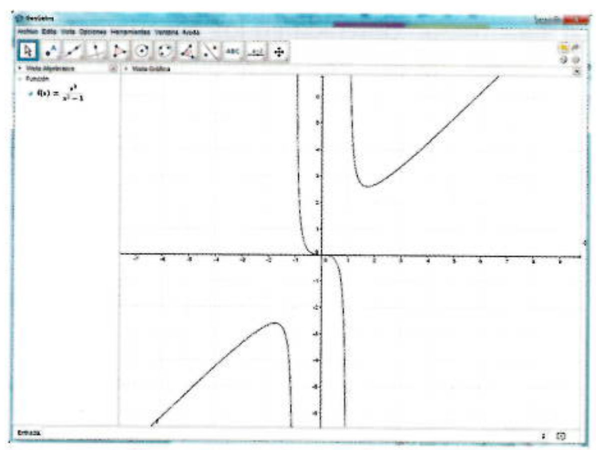
La gráfica de la función (Figura 5.31), pasa por los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, 3)$.

MatemaTICS

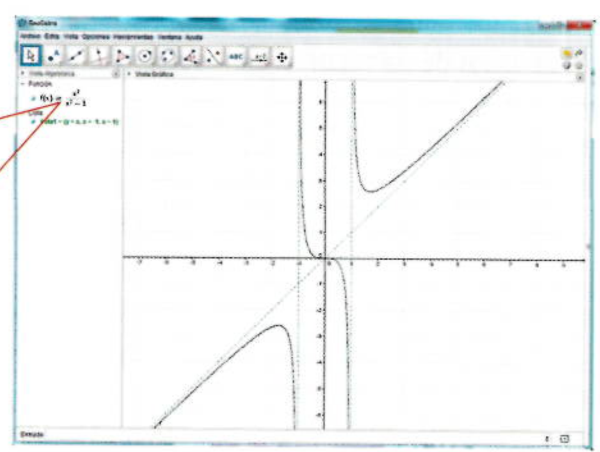
Gráficas de funciones y sus asíntotas en GeoGebra

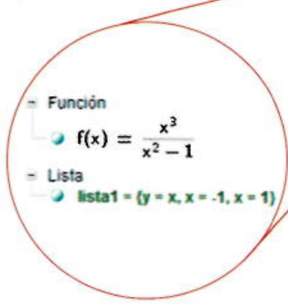
- Observa cómo se obtiene la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ y sus asíntotas en GeoGebra.

Se digita en la barra de entrada la función así $x^3/(x^2 - 1)$. Al pulsar Enter en la vista algebraica aparece la función que se digitó, y en la vista gráfica, su representación, como se observa a la derecha.



Para hallar las asíntotas de la función, se digita en la barra de entrada Asíntota[f] y luego se pulsa Enter; f es el nombre automático que le da GeoGebra a la función (ver vista algebraica). Las ecuaciones de las asíntotas de la función aparecen en la vista algebraica así: $y = x, x = -1, x = 1$.





MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

b. $f(x) = e^{x^2}$

c. $f(x) = 2x^2 + \ln x$

d. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

2 Lee la información y resuelve.

En los puntos críticos puede haber un punto máximo relativo, un punto mínimo relativo o un punto de inflexión de tangente horizontal.

- **Máximo relativo** $(a, f(a))$. En las cercanías de la izquierda de a, la función crece; en las cercanías de la derecha de a, la función decrece.
- **Mínimo relativo** $(a, f(a))$. En las cercanías de la izquierda de a, la función decrece; en las cercanías de la derecha de a, la función crece.
- **Puntos de inflexión.** En las cercanías de a, el crecimiento no cambia y, además, la segunda derivada cambia de signo en $x = a$, siendo $f''(a) = 0$ o $f''(a)$ no existe.

Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones y determina si estos corresponden a puntos máximos relativos, puntos mínimos relativos o puntos de inflexión.

a. $f(x) = x^3 - 2x$

b. $f(x) = 2x^4$

c. $f(x) = -x^2 + x$

d. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 2}$

Modelación

3 Representa una función que reúna las siguientes características.

- Es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.
- Es decreciente en $(0, 4)$.
- Los extremos relativos son $A(0, 6)$ y $B(4, -3)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
- $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$.

Resolución de problemas

4 Supón que la función $G(x)$ dada a continuación modela la puntuación obtenida por un estudiante en un examen dependiendo del tiempo x, expresado en horas, que haya dedicado a su preparación.

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}, \text{ si } 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x + 3}, \text{ si } x > 15 \end{cases}$$

a. Estudia el crecimiento de esta función.

b. Un estudiante ha dedicado menos de quince horas a preparar el examen. Justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de cinco puntos.

c. Explica por qué la puntuación no será superior a diez puntos.

Evaluación del aprendizaje

Observa la gráfica de $f(x) = 4x^2 - x^4$ en la Figura 5.32.

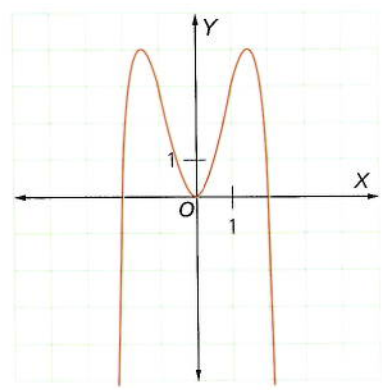


Figura 5.32

Estudia los siguientes aspectos.

a. Dominio y continuidad

b. Simetría

c. Periodicidad

d. Puntos de corte con los ejes

e. Asíntotas

f. Crecimiento

g. Puntos de inflexión y concavidad

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Estudio de funciones polinómicas

Saberes previos

Halla los valores de x tales que $(x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0$. ¿Qué puedes concluir de lo anterior con respecto a la gráfica de la función $f(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$. ¿Cómo son los puntos de corte de $f(x)$ y de $g(x) = 3(x - 3)(x + 1)(x + 2)$?

Analiza

Halla el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 5x - 3$

b. $g(x) = -4x^2 - 2$

c. $h(x) = x^3 - 1$

Conoce

Una función $f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ es **polinómica** si $P(x)$ es un polinomio en x, para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones f, g y h son polinómicas (f es afín, g es cuadrática y h es cúbica) y el dominio de cada una es el conjunto de los números reales. En la Figura 5.33 se observa que las funciones f, g y h son continuas en su dominio y que no tienen ningún tipo de asíntota.

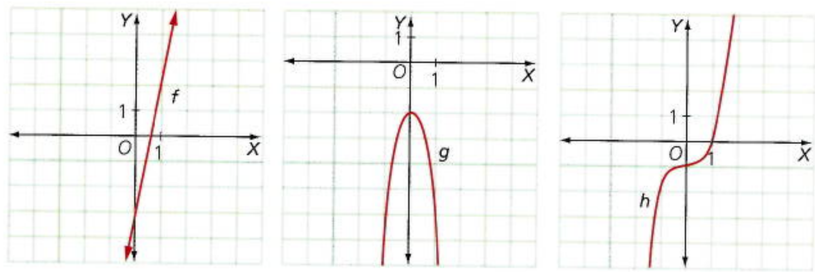


Figura 5.33

Para realizar un estudio de una **función polinómica** f y representarla gráficamente, es conveniente tener en cuenta que $D(f) = \mathbb{R}$, f no tiene ningún tipo de asíntota y que f tiene dos ramas infinitas.

Para trazar la gráfica de una función polinómica, es importante:

1. Estudiar la posible simetría de la función.

2. Estudiar los puntos de corte con los ejes.

3. Calcular los puntos máximos y mínimos relativos.

4. Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

5. Estudiar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.

Ejemplo 1

En la Figura 5.33 se puede observar lo siguiente:

- La función $f(x) = 5x - 3$ no tiene puntos máximos ni puntos mínimos y es creciente en todo su dominio. Esta función corta al eje X en $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ y al eje Y en $(0, -3)$.

- La función $g(x) = -4x^2 - 2$ es simétrica con respecto al eje Y, tiene un máximo relativo en $(0, -2)$, es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. La función g es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de corte con el eje X.

- La función $h(x) = x^3 - 1$ no tiene simetría par ni impar, corta al eje Y en $(0, -1)$ y al eje X en $(1, 0)$. Asimismo, h es creciente en todo su dominio, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ y, por tanto, tiene un punto de inflexión en $(0, -1)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

Observa a continuación el estudio de la función polinómica $f(x) = 3x^3 - x$.

- $D(f) = \mathbb{R}$ y no tiene ninguna asíntota.
- La función tiene simetría impar, porque:

$$f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$$

- El punto de corte con el eje Y es $(0, 0)$, pues $f(0) = 3(0)^3 - 0 = 0$.
- Los puntos de corte con el eje X son $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$ y $(0, 0)$ y se obtienen igualando a 0 la función $f(x)$ y despejando la variable independiente.
  Si $f(x) = 3x^3 - x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - 1) = 0$.
  Por tanto, $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, y $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.
- Los máximos y mínimos relativos se determinan igualando a 0 la primera derivada de la función:

$$f'(x) = 9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ y } x = -\frac{1}{3}$$

  Luego, como f es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right)$.
- La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, pues $f''(x) = 18x < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) = 18x > 0$ si $x > 0$, respectivamente.
- $(0, 0)$ es un punto de inflexión, puesto que $f''(x) = 18x = 0 \Rightarrow x = 0$ y además en el la función cambia su concavidad.

Para facilitar la representación de la función se elabora una tabla de valores.

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$
f(x)	$-\frac{69}{8}$	-2	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	2	$\frac{69}{8}$

Tabla 5.1

La gráfica de la función se observa en la Figura 5.34.

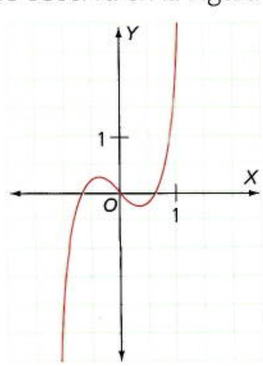


Figura 5.34

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Estudio de funciones polinómicas

Ejemplo 3

Observa el análisis y la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

- **Simetría**

$f(-x) = -x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow$ No presenta simetría par ni impar.

- **Puntos de corte con los ejes**

Con el eje X: $x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

Con el eje Y: $f(0) = -4$

Por tanto, los puntos de corte son: $(0, -4)$, $(1, 0)$ y $(-2, 0)$.

- **Máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento**

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) \Rightarrow x = 0, x = -2$

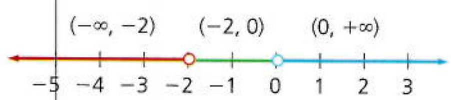


Figura 5.35

Se decide si los puntos críticos son máximos o mínimos relativos observando el crecimiento a la izquierda y a la derecha de cada punto. Para ello, se determinan los intervalos en los que queda dividida la recta real cuando se marcan sobre ella los puntos que anulan la primera derivada (Figura 5.35), y se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos obtenidos.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
Punto de prueba	$f'(-4) > 0$	$f'(-1) < 0$	$f'(2) > 0$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de $f(x)$	↗ Creciente	↘ Decreciente	↗ Creciente

Tabla 5.2

Como $f(x)$ crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0)$, entonces la función tiene un mínimo relativo en $(0, -4)$ y un máximo relativo en $(-2, 0)$.

- **Puntos de inflexión e intervalos de concavidad**

Los puntos que anulan la segunda derivada, y en los que cambia la concavidad, son puntos de inflexión.

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Al ubicar el punto $x = -1$ en la recta real, esta queda dividida en dos intervalos, que son $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$, en los cuales se estudiará el signo de la segunda derivada para determinar la concavidad de la función.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Punto de prueba	$f''(-2) < 0$	$f''(0) > 0$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
Comportamiento de $f(x)$	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Tabla 5.3

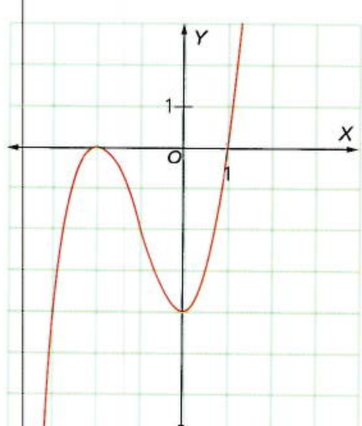


Figura 5.36

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1, +\infty)$. Como $f''(-1) = 0$ y en $x = -1$, la concavidad de la función cambia; entonces, $(-1, -2)$ es un punto de inflexión.

La representación gráfica de la función se observa en la Figura 5.36 .

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Relaciona las gráficas de las figuras 5.37 a 5.40 con las expresiones algebraicas correspondientes.

a. $f(x) = x^2 - 1$ b. $h(x) = |x^2 - 1|$

c. $g(x) = (x - 1)^2 - 1$ d. $j(x) = (x - 1)^2$

1.

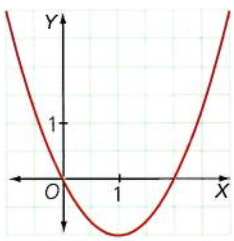


Figura 5.37

2.

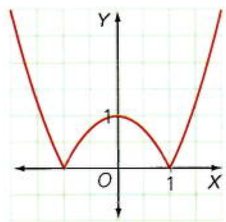


Figura 5.38

3.

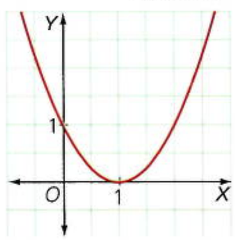


Figura 5.39

4.

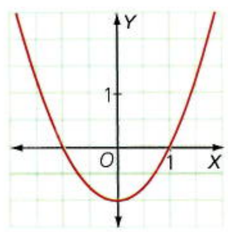


Figura 5.40

Ejercitación

2 Realiza el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja sus gráficas.

a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b. $f(x) = x^2 - x + 3$

c. $f(x) = -x^2 + 9$

d. $f(x) = x^2 - 1$

3 Resuelve sabiendo que

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9.$$

a. Halla los puntos de corte con los ejes.

b. Estudia el signo de la función.

c. Halla el crecimiento de f.

d. Halla los máximos y mínimos relativos.

e. Dibuja la gráfica de la función.

f. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función $f(x)$?

4 Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 113$ tenga un máximo en el punto $(5, 162)$.

Resolución de problemas

5 La capacidad de concentración de una atleta de salto alto en una competición de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3 - t)$, donde t mide el tiempo en horas y $t \in [0, 3]$.

a. Calcula los intervalos en los que la capacidad de concentración de la atleta aumenta y aquellos en los que disminuye.

b. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la atleta pueda batir su propia marca?

c. Representa gráficamente la función que indica la capacidad de concentración.

Evaluación del aprendizaje

Halla lo que se indica en cada caso, dada la función $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + ax^3 - 2x^2 + bx - \frac{14}{3}$.

a. Calcula los valores de a y b para que haya un punto de inflexión en $(-2, 0)$.

b. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento para los valores de a y b hallados.

c. Halla los extremos relativos para los valores de a y b hallados.

d. Estudia los intervalos de concavidad para los valores de a y b hallados.

e. Halla los puntos de inflexión de f.

f. Dibuja la gráfica de la función.

g. ¿Cuántos puntos de corte tiene la función con el eje de abscisas?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Supón que la inversión i (en millones de pesos) de una fundación que tiene entre sus misiones desarrollar culturas de no violencia y paz, se modela con la función $i(x) = 50(x - 1)^2 + 40$, donde x representa los años. ¿En qué año la fundación hizo la menor inversión? ¿Cuáles son los beneficios de servir de mediador en la solución de un conflicto?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Estudio de funciones racionales y funciones con radicales

Saberes previos

¿Qué es un número racional? ¿Puede el denominador de un número racional ser 0? Explica.

Analiza

Verifica que el numerador y el denominador de la función racional $f(x) = \dfrac{2x^4 + 2x^3}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$ tengan $x = -1$ como raíz común. Luego, simplifica la fracción algebraica.

Conoce

6.1 Estudio de funciones racionales

El número $x = -1$ es una raíz tanto del numerador como del denominador de $f(x)$, pues al calcular el valor de cada una de las funciones polinómicas que forman la función $f(x)$ en $x = -1$ se obtiene 0.

La simplificación de la función racional se obtiene de esta manera:

$$\frac{2x^4 + 2x^3}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = \frac{2x^3(x+1)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$$

Para representar una **función racional** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, debe asegurarse que el numerador y el denominador no tengan raíces comunes y simplificar la fracción algebraica $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Esta nueva función será igual a la inicial, excluyendo de su dominio los puntos $x = a$ que anulaban a $P(x)$ y $Q(x)$ a la vez.

Para graficar una función racional, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- **Dominio y continuidad**: El dominio de cualquier función racional es todo $\mathbb{R}$, excepto los valores que anulan el denominador. Estas funciones son continuas en su dominio.
- **Ramas infinitas y asíntotas**
  - Presentan asíntotas verticales en los puntos que anulan al denominador, excepto, quizás, en aquellos que anulan también al numerador.
  - Solo existen asíntotas horizontales si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.
  - Solo existen asíntotas oblicuas si el grado del numerador es una unidad superior al grado del denominador. Se pueden hallar mediante la división del numerador entre el denominador. El cociente obtenido es la asíntota, ya que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x) - C(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

  Como el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$, entonces para x muy grandes el cociente tiende a 0.

- **Puntos críticos y crecimiento**
  - Se calculan los puntos críticos, se divide la recta real en intervalos limitados por estos puntos y se estudia la monotonía de la función en los intervalos obtenidos.
  - Estos puntos límite en los que se anula la primera derivada pueden ser máximos o mínimos relativos, o puntos de inflexión de tangente horizontal.
- **Puntos de inflexión y concavidad**
  - Se calculan los puntos que anulan la segunda derivada.
  - Se divide la recta real en intervalos limitados por estos puntos y los puntos que anulan el denominador de la función, y se estudia la curvatura. Estos puntos límite en los que se anula la segunda derivada pueden ser puntos de inflexión.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 1

Observa el estudio y la representación de la función racional $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

- **Dominio y continuidad**

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

- **Puntos de corte con los ejes**

Con el eje X: si $y = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^3}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

Con el eje Y: si $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

- **Asíntotas**

La función tiene asíntotas verticales en $x = 2$ y en $x = -2$.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

$f(x)$ tiene asíntotas oblicuas, pero no horizontales.

$$\frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2x + \frac{8x}{x^2 - 4} \Rightarrow \text{La asíntota oblicua es } y = 2x.$$

$$\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x = \frac{8x}{x^2 - 4} \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ si } x \to +\infty \\ < 0 \text{ si } x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow$$ La curva queda por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$.

- **Puntos críticos y crecimiento**

$f'(x) = \dfrac{2x^4 - 24x^2}{(x^2 - 4)^2}$ Si $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2\sqrt{3}, x = -2\sqrt{3}$

Se ubican en la recta real los valores que anulan la primera derivada y los que no pertenecen al dominio ($x = 2$ y $x = -2$) y se estudia la monotonía así:

$-\infty$ $\quad -2\sqrt{3} \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 2\sqrt{3} \quad +\infty$

f'(x)	+	−	−	−	−	+
f(x)	Crece	Decrece	Decrece	Decrece	Decrece	Crece

Tabla 5.4

En $(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ tiene un máximo y en $(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ tiene un mínimo.

- **Puntos de inflexión y concavidad**

$f''(x) = \dfrac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$

Se ubica en la recta real el valor que anula la segunda derivada y los que no pertenecen al dominio $x = 2$ y $x = -2$.

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

f'(x)	−	+	−	+
f (x)	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Tabla 5.5

Por tanto, (0, 0) es un punto de inflexión. En la Figura 5.41 se representa la función.

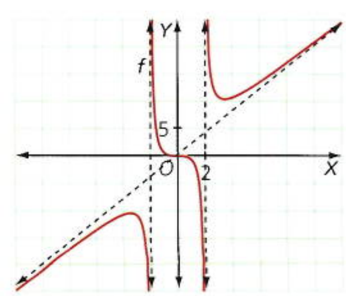


Figura 5.41

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Estudio de funciones racionales y funciones con radicales

6.2 Estudio de funciones con radicales

Las funciones con radicales son expresiones de la forma $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ donde $g(x)$ es una función polinómica o racional.

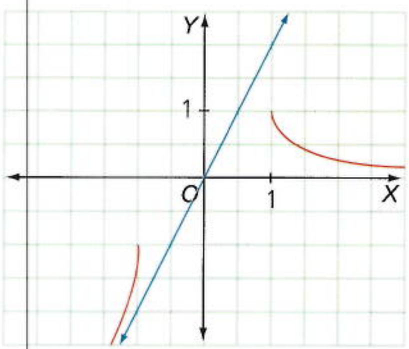


Figura 5.42

Ejemplo 2

Al analizar la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ (figura 5.42) se tiene:

- **Dominio** $f(x)$ no está definida para $x^2-1<0$. Luego, el dominio de f es $\mathbb{R}-(-1,1)$.
- **Asíntotas:**

  $y=0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

  No hay asíntota horizontal por la izquierda.

  $y=2x$ es una asíntota oblicua por la izquierda.
- **Información de la primera derivada:**

  Como $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ no se anula para ningún valor de x, entonces $f(x)$ no tiene puntos críticos.

  Para $x>1, f'(x)<0$, luego $f(x)$ es decreciente.

  Para $x<-1, f'(x)>0$, luego $f(x)$ es creciente.
- **Información de la segunda derivada:**

  Como $f''(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ es positiva para todo el dominio, $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

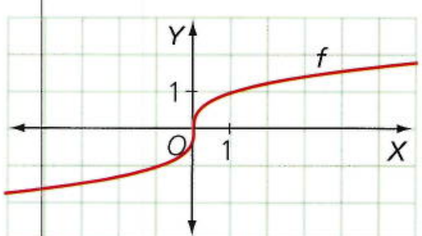


Figura 5.43

Ejemplo 3

Observa el estudio de la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (Figura 5.43):

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ y } f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

- Como no hay ningún valor de x para el que $f''(x)=0$, entonces se estudia la concavidad en torno al punto en el que no hay segunda derivada, es decir, en $x=0$.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Punto de prueba	$f''(-1)=\frac{2}{9}>0$	$f''(1)=-\frac{2}{9}<0$
Signo de $f''(x)$	$+$	$-$
Comportamiento de $f''(x)$	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Tabla 5.6

Luego, $(0, 0)$ es un punto de inflexión en donde no existe $f''(x)$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Realiza un estudio completo de las siguientes funciones racionales y traza sus gráficas.

a. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$ b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 3}$ d. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3}$

e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ f. $f(x) = \dfrac{3x}{x^3 - 8}$

Razonamiento

2 Calcula el valor de k para que la siguiente función tenga un máximo relativo en el punto $x = 2$.

$$f(x) = \frac{2x + k}{x^2 - 2x + 1}$$

¿Cuál es el valor de este máximo?

3 Calcula el valor de k para que la siguiente función tenga una asíntota oblicua en $y = 2x - 5$.

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + 7x + 3k}{x^2 + 3}$$

4 Estudia los intervalos de crecimiento y los puntos críticos de la siguiente función.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

5 Resuelve lo que se indica dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x}}.$$

a. Halla el dominio de f.

b. Halla los puntos de corte con los ejes.

c. Estudia las asíntotas de la función.

d. Calcula los extremos relativos de f.

e. Traza la gráfica de la función.

6 Traza la gráfica de las siguientes funciones irracionales, estudiando su dominio, los puntos de corte con los ejes, sus asíntotas y los máximos y mínimos relativos. Establece el crecimiento, la concavidad y los puntos de inflexión.

a. $f(x) = x + \sqrt{x}$ b. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

Resolución de problemas

7 El interés anual $I(t)$, en %, ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo t, en años, que se esté dispuesto a mantener la inversión. La expresión que modela tal situación es $I(t) = \dfrac{90t}{t^2 + 9}$.

a. Calcula razonadamente cuántos años le conviene a una persona mantener su dinero en tal entidad si desea optimizar el interés.

b. Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el interés podría llegar a ser negativo? Justifica tu respuesta.

c. Traza la gráfica de la función $I(t)$.

Evaluación del aprendizaje

i Realiza un estudio completo de las siguientes funciones y traza sus gráficas.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 4}$ b. $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x + 3}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d. $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

ii Determina si las siguientes afirmaciones sobre la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ son verdaderas (V) o falsas (F). Explica tus respuestas.

a. El dominio de la función es $\mathbb{R}$. ( )

b. La función corta al eje Y en el punto $(0, 4)$ y no tiene puntos de corte con el eje X. ( )

c. f crece en $[2, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 2]$. ( )

d. El punto $(2, 2)$ es el mínimo relativo de f. ( )

e. f tiene dos asíntotas oblicuas cuyas ecuaciones son: $y = x - 2$ y $y = -x + 2$. ( )

f. $f'(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$ ( )

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

7 Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

Saberes previos

Dibuja en un plano cartesiano los puntos (0, 0), (1, 3), (2, 9), (3, 27), (4, 81) y únelos con por una línea continua. ¿Qué valor de y le corresponderá a $x = 10$? Describe la función que trazaste.

Analiza

Una colonia de 50 bacterias crece exponencialmente, duplicando su población cada minuto.

- ¿Qué tipo de función modela el crecimiento de la población de bacterias? ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que la población sea máxima?

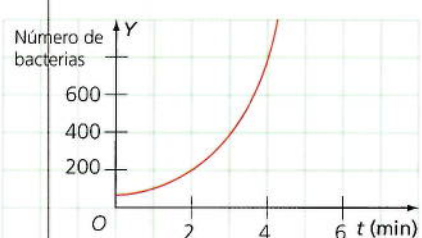


Figura 5.44

Conoce

7.1 Estudio de funciones exponenciales

El crecimiento de la población de bacterias se modela con la función exponencial $f(t) = 50 \cdot 2^t$, donde t está dado en minutos. Suponiendo que el crecimiento de la población no se ve afectado por ninguna condición externa, no se tendría un valor para t tal que la población sea máxima, ya que a medida que aumenta el tiempo, la población aumenta de forma indefinida; esto se observa de manera más clara en la Figura 5.44.

Las funciones **exponenciales** más sencillas son de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Para representar funciones exponenciales se tiene en cuenta lo siguiente:

- **Dominio, continuidad y recorrido:** El dominio de la función $f(x) = a^x$ es el conjunto de los reales, para $a > 0$ y $a \neq 1$ y f es continua en él.

  El valor de a^x cuando a es un número estrictamente positivo es siempre un número positivo. Es decir, el recorrido de la función es $R(f) = (0, +\infty)$.

- **Asíntotas:** Puede ocurrir que una recta sea asíntota horizontal u oblicua en $+\infty$ y no en $-\infty$, y viceversa. Incluso, una función podría tener una asíntota horizontal en un lado y una oblicua en el otro. Para calcular los límites, en ocasiones se deberá utilizar la regla de L'Hôpital.

- **Intervalos de crecimiento y puntos máximos y mínimos relativos**

  Se divide la recta real en intervalos limitados por los puntos de discontinuidad, los que anulan la primera derivada y los puntos del dominio donde no existe esta primera derivada. Se estudia la monotonía, los puntos máximos y los puntos mínimos en los intervalos obtenidos.

- **Intervalos de concavidad y puntos de inflexión**

  Se divide la recta real en intervalos limitados por los puntos de discontinuidad, los que anulan la segunda derivada y los puntos del dominio donde no existe esta segunda derivada. Luego, se estudia la curvatura y los puntos de inflexión en los intervalos limitados por tales puntos.

Ejemplo 1

Para la función $f(x) = e^{2x - x^2}$ se tiene que:

- $D(f) = \mathbb{R}$ y f es continua en él.
- La función no tiene simetría par ni impar, porque:

$$f(-x) = e^{2 \cdot (-x) - (-x)^2} = e^{-2x - x^2}$$

  Luego, $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

- El punto (0, 1) es el único punto de corte con los ejes.

  Con el eje X: si $y = 0 \Rightarrow y = e^{2x - x^2} = 0 \Rightarrow$ No existe un x tal que $y = 0$

  Con el eje Y: si $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow (0, 1)$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

- La función $f(x) = e^{2x-x^2}$ no tiene asíntotas verticales ni oblicuas. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, pues:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{2x-x^2} = e^{(-\infty)} = 0 \text{ y } \lim_{x \to -\infty} e^{2x-x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x-x^2} = 0$$

- Para hallar los puntos críticos y los intervalos de crecimiento se deriva la función así:

$$f'(x) = (2 - 2x)\, e^{2x-x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Como $D(f) = \mathbb{R}$ y $f'(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$, solo se estudia la monotonía en torno al punto crítico $x = 1$. Hay un máximo relativo en $(1, e)$.

En $(-\infty, 1)$, $f'(0) = 2 > 0$, $f'(x)$ es positiva y $f(x)$ es creciente.

En $(1, +\infty)$, $f'(2) = -2 < 0$, $f'(x)$ es negativa y $f(x)$ es decreciente.

En la Tabla 5.7 se resume esta conclusión.

$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Tabla 5.7

- Para determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad, se debe hallar la segunda derivada y los valores de x para los que es 0.

$$f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)\, e^{2x-x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Intervalo	$\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
Punto de prueba	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(2) > 0$
Signo de $f''(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de $f(x)$	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Tabla 5.8

Los puntos de inflexión son: $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$ y $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

En la Figura 5.45 se observa la representación gráfica de la función.

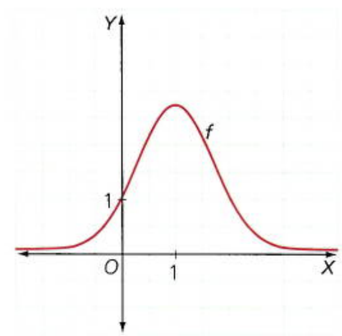


Figura 5.45

7.2 Estudio de funciones logarítmicas

Para representar las **funciones logarítmicas** se debe tener en cuenta lo siguiente:

- **Dominio y continuidad:** El valor de $\log_a x$, cuando $a > 0$, solo está definido para $x > 0$. La función logaritmo es continua en su dominio. Además: $\log_a x > 0$, si $x > 1$; $\log_a x = 0$, si $x = 1$; $\log_a x < 0$, si $0 < x < 1$; $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$.
- **Asíntotas:** Para calcular los límites necesarios para determinar las asíntotas, en ocasiones será necesario utilizar la regla de L'Hôpital.
- **Máximos y mínimos relativos. Puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y de concavidad:** Para estudiar los intervalos de crecimiento y de concavidad, se divide la recta real en intervalos limitados por los puntos de discontinuidad, los puntos que anulan la derivada correspondiente y los puntos del dominio donde no existe esta derivada.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

7 Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

Ejemplo 3

A continuación se estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

- **Dominio:** $D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Es continua en $D(f)$.
- **Puntos de corte con los ejes:** No tiene.
- **Simetrías:** No tiene sentido su estudio.
- **Asíntotas:**

Verticales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0$

La función se acerca al origen de coordenadas; por lo tanto, no tiene asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = -\infty, \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty \Rightarrow$ La recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{\text{L'Hopital}} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \Rightarrow \text{No tiene.}$$

Oblicuas: $$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{x}{\ln x}}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \Rightarrow \text{No hay.}$$

- **Puntos críticos e intervalos de crecimiento:**

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Se estudia el signo de la derivada en los intervalos cuyos extremos son los puntos $x = 1$ y $x = e$.

Intervalo	$(0, 1)$	$(1, e)$	$(e, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de $f(x)$	Decreciente	Decreciente	Creciente

Tabla 5.9

Luego, f tiene un mínimo relativo en (e, e).

- **Puntos de inflexión e intervalos de concavidad:**

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

Se estudia el signo de la segunda derivada en los intervalos cuyos extremos son los puntos $x = 1$ y $x = e^2$.

Intervalo	$(0, 1)$	$(1, e^2)$	$(e^2, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$	$+$
Comportamiento de $f(x)$	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia arriba

Tabla 5.10

No hay punto de inflexión. En la Figura 5.46 se observa la gráfica de la función.

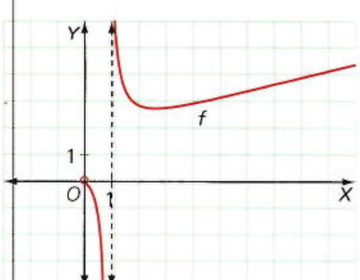


Figura 5.46

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula lo siguiente dada la función $f(x) = (1 - x)e^{-x}$.

a. El dominio de f.

b. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c. Los intervalos de concavidad.

d. Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función.

e. Con los datos anteriores, traza la gráfica de f.

2 Resuelve a partir de la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

a. Halla el dominio de f.

b. Estudia las posibles simetrías de la función.

c. Calcula los puntos de corte con los ejes.

d. Determina las asíntotas de la función.

e. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de f.

f. Estudia la concavidad y los puntos de inflexión.

g. Traza la gráfica de la función.

3 Resuelve a partir de la función $f(x) = x^2e^x$.

a. Halla el dominio de f.

b. Calcula los puntos de corte con los ejes.

c. Determina las asíntotas de la función.

d. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de f.

e. Estudia la concavidad y los puntos de inflexión.

f. Traza la gráfica de la función.

4 Realiza un estudio completo de las siguientes funciones y traza sus gráficas.

a. $f(x) = xe^x$

b. $f(x) = x\ln x$

c. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

d. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Resolución de problemas

5 Cuando un cable se cuelga de dos postes, la curva que se forma se llama catenaria. La ecuación de una catenaria es $f(x) = \dfrac{e^{4x} + e^{-4x}}{8}$.

a. Determina el punto máximo relativo.

b. Representa gráficamente la función.

6 De acuerdo con un modelo logístico, la población mundial (en miles de millones), t años después de 1960, se comportará según $P(t) = \dfrac{5{,}4}{1 + 1{,}4e^{at}}$.

a. Halla el valor de a sabiendo que en 1980 la población mundial era de 4 385 190 000 habitantes.

b. ¿Cuál será, según este modelo, la población mundial en el año 2018?

c. Dibuja la gráfica de la función $P(t)$.

Evaluación del aprendizaje

✓ Halla el valor de k para que la función $f(x) = \dfrac{x^2 + k}{\ln x}$ tenga un extremo relativo en $x = \sqrt{e}$. Para este valor, realiza lo indicado.

a. Estudia el dominio de la función.

b. Halla los puntos de corte con los ejes.

c. Calcula e interpreta el valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x}$.

d. Determina las asíntotas de la función.

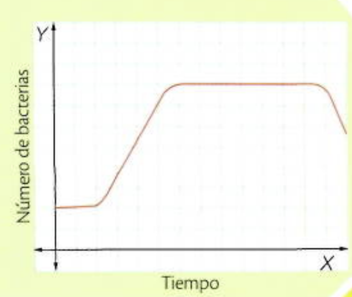
e. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de la función.

f. Demuestra que la gráfica de la función no tiene puntos de inflexión.

g. Traza la gráfica de la función.

Educación ambiental

Observa la curva de crecimiento bacteriano y descríbela. ¿Por qué crees que las bacterias son importantes en los procesos de biorremediación?



MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8 Estudio de funciones trigonométricas

Saberes previos

¿En cuántos puntos corta la función sen$x$ al eje x? ¿En cuántos puntos corta al eje Y?

Analiza

Escribe dos características de la función de la Figura 5.47.

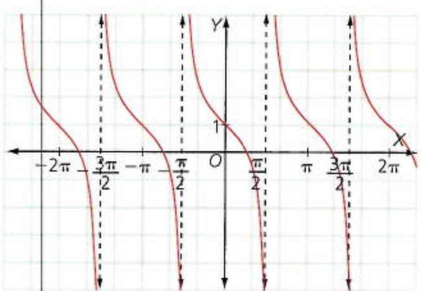


Figura 5.47

Conoce

La ecuación correspondiente a la función de la Figura 5.46 es $f(x) = 1 - \tan x$.

- Esta función es trigonométrica y, por lo tanto, es periódica con periodo π.
- Además, tiene infinitas asíntotas verticales en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1

A continuación se estudia y se representa la función $f(x) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x$.

- **Dominio**

  $D(f) = \mathbb{R}$. f es continua en todo su dominio.

- **Simetría**

  $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}^2(-x) = -\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x \Rightarrow f$ no es par ni impar.

- **Periodicidad**

  $f(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \operatorname{sen}^2(x + 2\pi) = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x = f(x)$

  La función es periódica con periodo 2π. Por tanto, solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, 2\pi]$ y generalizar los resultados a todo $\mathbb{R}$.

- **Puntos de corte con los ejes**

  Eje X: $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x(1 + \operatorname{sen}x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = 0, \operatorname{sen}x = -1$

  $$\Rightarrow \quad x = 0; x = \pi; x = 2\pi; x = \frac{3\pi}{2}$$

  Eje Y: $\operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}^2(0) = 0 \Rightarrow y = 0$

  Los puntos de corte son $(0, 0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

- **Asíntotas**

  No tiene ningún tipo de asíntota.

- **Puntos críticos e intervalos de crecimiento**

  $f'(x) = \cos x + 2\operatorname{sen}x\cos x = \cos x(1 + 2\operatorname{sen}x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0, \operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$

  Entonces $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$
Signo de $f'(x)$	+	−	+	−	+
f	Creciente	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Tabla 5.11

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ Mínimos $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$

En la Figura 5.48 se observa la representación de la función.

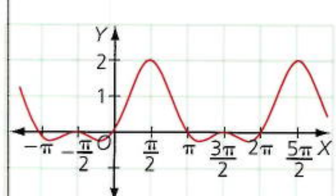


Figura 5.48

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina lo que se indica a partir de la función $f(x) = 2\text{sen}x + \text{sen}(2x)$.

a. Estudia la simetría.

b. Determina el periodo de f.

c. Calcula los puntos de corte con los ejes.

d. Halla los extremos relativos.

e. Traza la gráfica de la función.

2 Resuelve a partir de la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{1 + \text{sen}x}$.

a. Estudia su periodicidad.

b. Halla las asíntotas verticales de f.

c. Calcula los puntos de corte con los ejes.

d. Halla los extremos relativos de f.

e. Traza la gráfica de la función.

3 Traza la gráfica de cada función trigonométrica haciendo un estudio de sus características.

a. $f(x) = \text{sen}(2x)$

b. $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$

c. $f(x) = \text{sen}^2(\pi x)$

d. $f(x) = -2 + \cos(2x)$

Razonamiento

4 Observa la Figura 5.49 en la que se representó una función de la forma:

$$f(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$$

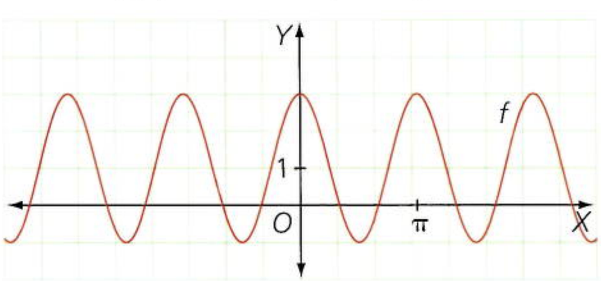


Figura 5.49

a. Indica los valores de a, b, c y d.

b. ¿Cuál es el periodo de f?

Resolución de problemas

5 La distancia al suelo de un punto A en el borde de un neumático de 60 centímetros de diámetro viene dada por la expresión $f(x) = 30 + 30\text{sen}x$, donde x es el ángulo que forma con la horizontal el radio de la rueda correspondiente a ese punto.

a. Indica en qué intervalo es suficiente estudiar la función f.

b. Dibuja la gráfica que refleje la distancia al suelo de cada uno de los puntos del borde del neumático en función de x, en el intervalo anterior.

Evaluación del aprendizaje

i Realiza un estudio de la función trigonométrica representada en la Figura 5.50.

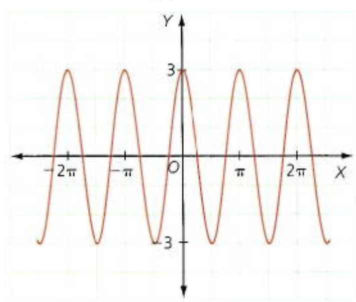


Figura 5.50

ii Considera la función $f(x) = \text{sen}[g(x)]$, siendo $g(x)$ un polinomio de cuarto grado, y determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tu respuesta.

a. La gráfica de f puede cortar cinco veces al eje X.

b. El máximo número de puntos de la gráfica de f, para los cuales f' es 0, es 5.

c. Si $g(x) > \pi$ para todo x real, entonces la gráfica de f no corta al eje X en ningún punto.

d. Si $g'(x) \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq 1$.

e. La gráfica de f es periódica con periodo 2π.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Puntos de discontinuidad y puntos críticos

Ejercitación

1 Halla los puntos de discontinuidad de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - 7x + 18}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

c. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{(x + 3)^3}$

2 Halla los puntos críticos de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^3 + x^2 - 2$

b. $f(x) = -x^2 + x$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

d. $f(x) = \sqrt{2x - x}$

Puntos de corte con los ejes, signo, simetría y periodicidad

Comunicación

3 Haz en tu cuaderno la representación gráfica de una función que cumpla con lo siguiente:

- Puntos de corte con el eje X: $A(2, 0)$ y $B(6, 0)$.
- El punto de corte con el eje Y es $E(0, 3)$.
- Es simétrica respecto al eje Y.
- Es periódica.

Ramas infinitas. Asíntotas

Ejercitación

4 Identifica las asíntotas de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$

b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{1 - x}}$

c. $f(x) = -\dfrac{x^2}{(x + 9)^3}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Análisis gráfico de funciones

Comunicación

5 Construye la gráfica de una función que cumpla todos y cada uno de los siguientes requisitos.

a. El dominio es $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

b. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

d. Tiene un máximo relativo en $(0, 0)$.

e. Tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt[3]{-2}$.

f. Es creciente en el intervalo $\left(\sqrt[3]{-2}, 0\right)$.

g. Es decreciente en $\left(-\infty, \sqrt[3]{-2}\right) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Estudio de funciones polinómicas, racionales y con radicales

Razonamiento

6 Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx - d$, con $b \neq 0$, que no tenga máximos ni mínimos relativos.

7 Halla el valor de k para que la función $f(x) = \dfrac{2x + k}{\sqrt{x - 1}}$ tenga un extremo relativo en $x = \dfrac{5}{2}$ y traza la gráfica para dicho valor.

Estudio de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Razonamiento

8 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ obteniendo previamente sus elementos más significativos y comprueba que alcanza el máximo absoluto en el punto de abscisa e. Según lo que muestra la gráfica, ¿es mayor $\dfrac{1}{e}$ o $\dfrac{\ln \pi}{\pi}$?

9 Traza la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \tan(2x)$

b. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Analizar una función

Problema

Determina los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{1-2x}{2x^2+x-6}$.

1. Comprende el problema

- ¿Qué tipo de función es $f(x)$?

  R: Una función racional.

- ¿Qué se debe hallar?

  R: Los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$.

2. Crea un plan

- Identifica qué tipo de función se tiene y encuentra los puntos de discontinuidad de la función.

3. Ejecuta el plan

- Como $f(x)$ es una función racional, los puntos de discontinuidad se obtienen en los valores de x que anulan el denominador. Por tanto, los puntos de discontinuidad serán aquellos en los que se cumpla que:

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

- Como la expresión anterior es una ecuación cuadrática, se soluciona utilizando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Por tanto, $x_1 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{3}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-1-7}{4} = -2$.

R: Los puntos de discontinuidad son $x = \dfrac{3}{2}$ y $x = -2$.

4. Comprueba la respuesta

Verifica que el dominio de la función es:

$$D(f) = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$$

Aplica la estrategia

1. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje X y los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x - 1}$?

   a. Comprende el problema

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

Resuelve otros problemas

2. Las ganancias de una empresa, en miles de pesos, vienen dadas por la función $f(x) = \dfrac{50x - 3x}{2x + 5}$, donde x representa los años de vida de la empresa cuando $x > 0$.

   a. Determina los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y el dominio de la función.

   b. ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 5.51 y resuélvelo.

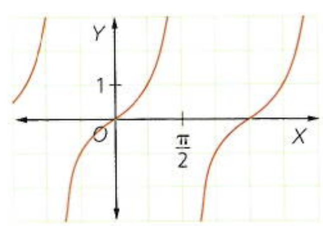


Figura 5.51

Enriquece tu vocabulario

- Utiliza las siguientes palabras para escribir una frase que determine cómo hacer un análisis de una función.

  dominio   recorrido   asíntotas   mínimos
  puntos de corte   máximos   continuidad

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Evaluación del aprendizaje

Puntos de discontinuidad y puntos críticos

Ejercitación

1 Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones reales. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \dfrac{6x - 4}{3x^2 + 7}$

b. $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 - 2}{x^2 + 3x}$

c. $f(x) = \dfrac{18}{9x^2 + 3x + 12}$

d. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4 + x^2}$

2 Halla la primera derivada de cada función y determina sus puntos críticos. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

b. $f(x) = \dfrac{-5x}{\sqrt{x} + 7x - 1}$

c. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4x^2 - x - 7}}$

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 3}{3 - x^2}$

Puntos de corte con los ejes, signo, simetría y periodicidad

Ejercitación

3 Esboza las gráficas de las siguientes funciones y determina los puntos de corte con los ejes, el signo, la simetría y la periodicidad. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = 3\tan x - \dfrac{1}{x}$

b. $f(x) = -2\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

c. $f(x) = \ln x^3$

d. $f(x) = 2 - x^3 + 5x^2$

4 Determina si las siguientes funciones son simétricas e indica el tipo de simetría. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = x^3 - 8$

b. $f(x) = \cos x + (4x - 3)^2$

c. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + 1$

d. $f(x) = \tan x - 3$

Ramas infinitas. Asíntotas

Razonamiento

5 Determina si las siguientes funciones tienen asíntotas y específica de qué tipo son. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = 2x^3 + 8x - x^2$

b. $f(x) = \dfrac{x - 4}{1 - x^2}$

c. $f(x) = \dfrac{6}{3x + x^2 + 1} - 5$

d. $f(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{2x^2 - 3}{4x^2 + 9}$

Análisis gráfico de funciones

Modelación

6 Representa una función que cumpla todas las condiciones dadas a continuación. PREGUNTA ABIERTA

a. Decreciente en todos los reales con punto de inflexión en $(3, -1)$.

b. Cóncava hacia arriba y asíntota en $x = 3$.

c. Cóncava hacia abajo, con máximo absoluto en el punto $(-1, 2)$.

d. $f''(x) > 0$ en $(-2, +\infty)$.

Estudio de funciones polinómicas

Comunicación

7 Indica cuáles de las siguientes funciones son polinómicas. Escribe su dominio y rango. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \dfrac{2 - 3x^2}{3 - x^5}$

b. $f(x) = x^4 - 2x^2 + x^3 + 1$

c. $f(x) = -3x - 6 + x^8$

d. $f(x) = 12x^5 + 11x$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

8 Selecciona las características que correspondan a las funciones polinómicas. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. Tiene dos ramas infinitas.

b. Su dominio son todos los reales positivos.

c. El grado de la variable es 2.

d. No tiene asíntotas.

e. Su dominio son todos los reales.

f. El grado de la variable es mayor o igual que 1.

g. Tiene infinitas ramas.

9 Estudia las siguientes funciones y traza sus gráficas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = 3 - x$

b. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

c. $f(x) = 27x^8 - 1$

d. $f(x) = 4 - (x + 1)^2$

Estudio de funciones racionales y con radicales

Razonamiento

10 Observa las gráficas de las figuras 5.52 a 5.55 y selecciona aquellas que pueden representar funciones racionales. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a.

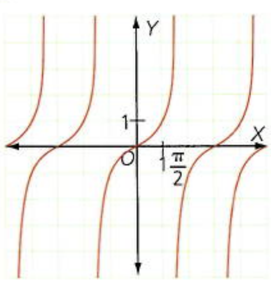


Figura 5.52

b.

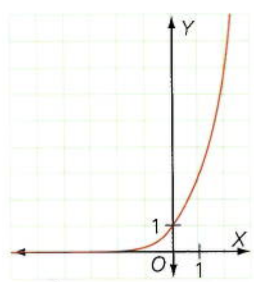


Figura 5.53

c.

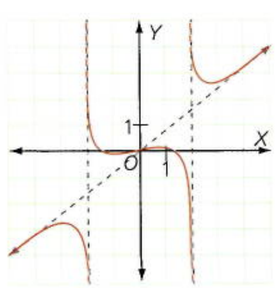


Figura 5.54

d.

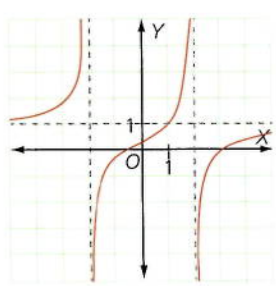


Figura 5.55

11 Traza la gráfica de las siguientes funciones a partir del estudio de su dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, máximos y mínimos y concavidad. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. $f(x) = \dfrac{4}{3x^2 + 1} - 2$

b. $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{x^2 + 5}}$

c. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 11 - x^2}}$

Estudio de funciones exponenciales y logarítmicas

Comunicación

12 Selecciona las características que corresponden a funciones exponenciales. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. Su dominio son todos los números reales.

b. Son funciones periódicas.

c. Tienen asíntotas verticales.

d. Su recorrido son los reales positivos.

13 Determina el dominio, el recorrido, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas y estudia el crecimiento de las siguientes funciones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \ln(3x + 5)$

b. $f(x) = 2 - x\ln 2x$

Estudio de funciones trigonométricas

Ejercitación

14 Traza las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas, a partir del estudio de sus propiedades. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. $f(x) = -1 + 4\cos(2x - 3)$

b. $f(x) = \sec 3(x - 4)$

c. $f(x) = -3\text{sen}(3x + 8)$

d. $f(x) = \tan(5 - x)$

Razonamiento

15 Halla el periodo de las funciones trigonométricas e indica en cuál intervalo es suficiente estudiarlas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

b. $f(x) = 4 + \tan\dfrac{2x}{3}$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Estadística y probabilidad

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ya sabemos

- Resolver y plantear problemas usando conceptos básicos de probabilidad.

Vamos a aprender

- A hallar la probabilidad de la unión e intersección de sucesos.

Nos sirve para

- Hallar la probabilidad total de un suceso a partir de las probabilidades condicionadas de otros sucesos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1 Estudios estadísticos

Saberes previos

¿Por qué crees que algunas encuestas se alejan de la realidad y no reflejan las verdaderas tendencias o preferencias de un público específico?

Analiza

En un país se desea conocer si la imagen que tienen los habitantes del presidente es favorable o desfavorable; para ello, se aplicaron 1000 encuestas a hombres y mujeres mayores de 18 años que habitan zonas urbanas del país. Los resultados se registran en la Figura 6.1.

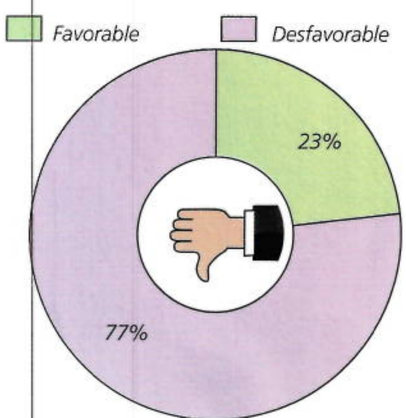


Figura 6.1

- ¿Qué herramienta se utilizó para recolectar la información?, ¿qué características tiene el grupo examinado?

Conoce

1.1 Población y muestra

Para conocer el grado de satisfacción que sienten los habitantes del país ante la labor del mandatario se empleó la encuesta. Como es imposible o poco práctico preguntar a la totalidad de habitantes, se seleccionó una muestra de 1000 personas.

La **población** es el conjunto de elementos que cumplen una determinada característica. La **muestra** es un subconjunto de la población.

Ejemplo 1

En 2005 en una encuesta aplicada a 500 adultos de una ciudad, el 22% de los encuestados manifestaron que el clima laboral con respecto al año anterior había desmejorado. En este estudio, la población es la totalidad de adultos de la ciudad y la muestra está constituida por los 500 adultos consultados.

1.2 Estudios estadísticos

Para realizar un estudio estadístico es necesario seleccionar una muestra, ya que existen muchos motivos que imposibilitan estudiar toda la población.

Ejemplo 2

En cada una de las siguientes situaciones se explica por qué no es útil estudiar toda la población.

- Si se quiere estimar el porcentaje de votos que obtendrá un partido político en unas elecciones nacionales, resultaría imposible realizar una encuesta sobre la intención de voto de todo un país. Esto supondría además un costo elevado.
- Si el estudio estadístico consiste en conocer la duración media de las bombillas que fabrica una determinada empresa, no se puede medir la duración de cada bombillo, porque al mantenerlos encendidos todos, se perdería la producción.

Cuando no se requieren resultados muy exactos y basta con una ligera aproximación o cuando es preciso obtener los resultados en un periodo de tiempo corto, tampoco es necesario analizar toda la población. Todas estas consideraciones llevan a realizar el estudio estadístico sobre una muestra.

Para que los resultados obtenidos a partir de una muestra sean confiables, esta tiene que cumplir dos condiciones: tener un tamaño adecuado y que sus elementos hayan sido seleccionados de manera aleatoria. Si cumple estas dos condiciones, se dice que la muestra es **representativa**. En el caso en que la selección no sea aleatoria, se dirá que la muestra es **sesgada**.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.3 Variable estadística

Una **variable estadística** es una característica de una población, que se puede medir para hacer un análisis de la misma. Estas pueden ser **cuantitativas** o **cualitativas**.

Una variable cuantitativa puede ser **discreta**, esto es cuando toma solamente valores aislados que se expresan mediante números naturales, o **continua**, que es cuando los valores que toma se encuentran dentro de un intervalo.

Las variables de tipo cualitativo, por su parte, miden gustos y preferencias. Estas pueden ser nominales u ordinales. En el ladillo se presenta la diferencia.

- Nominal: presenta modalidades no numéricas que no tienen orden, por ejemplo el género o el estado civil de una persona.
- Ordinal: cuando las opciones de respuesta admiten un orden, por ejemplo, estrato social o la valoración de una evaluación en aceptable, bueno o excelente.

1.4 Distribución de frecuencias para datos agrupados por clases

Una **distribución de frecuencias** para datos agrupados es una manera de organizar y presentar los datos obtenidos de una observación de manera que se puedan analizar y plantear conclusiones. Dichos datos se pueden agrupar según la frecuencia con que se repiten o con determinados intervalos de valores, llamados clases, que resumen la información y son pertinentes cuando el conjunto de datos es numeroso.

Ejemplo 3

A continuación se muestran las estaturas de 40 mujeres de una universidad.

1,63	1,52	1,54	1,81	1,52	1,60	1,77	1,59	1,46	1,65
1,59	1,73	1,68	1,62	1,64	1,50	1,57	1,79	1,54	1,69
1,61	1,63	1,69	1,72	1,57	1,73	1,67	1,59	1,74	1,80
1,59	1,56	1,77	1,79	1,68	1,74	1,77	1,72	1,68	1,62

Para construir la distribución de frecuencias se puede resumir la información en una distribución de frecuencias por clases. Para ello, primero se determina el rango, así: $1{,}81 - 1{,}46 = 0{,}35$. Luego, se divide el rango en un número de intervalos adecuado, que se puede calcular por medio de la expresión $\sqrt{n}$; donde n es el número de datos. Esta será la **amplitud** de cada intervalo. Para este caso, se aproxima el valor a siete. Por lo tanto:

$$\text{Amplitud} = \frac{\text{Rango}}{\text{No. de intervalos}} = \frac{0{,}35}{7} = 0{,}05$$

Finalmente, se construye la distribución de frecuencias y se determina el número de observaciones que corresponden a cada clase; es decir, la frecuencia absoluta, f_i. En la tabla 6.1 se incluye la frecuencia relativa f_r, y las respectivas frecuencias acumuladas F_i y F_r, en porcentajes.

Estatura (m)	f_i	$f_r(\%)$	F_i	$F_r(\%)$
[1,46; 1,51)	2	5	2	5
[1,51; 1,56)	4	10	6	15
[1,56; 1,61)	8	20	14	35
[1,61; 1,66)	7	17,5	21	52,5
[1,66; 1,71)	6	15	27	67,5
[1,71; 1,76)	6	15	33	82,5
[1,76; 1,81)	7	17,5	40	100

Tabla 6.1

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

1.5 Parámetro y estadígrafo

Un **parámetro** es una medición numérica que describe una característica de una población.

Un **estadígrafo** es una medición que describe características relacionadas con la muestra.

Los estadígrafos más importantes son las **medidas de tendencia central** (media aritmética, mediana y moda), las **medidas de dispersión** (rango, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación) y las **medidas de posición** (deciles, cuartiles y percentiles).

Ejemplo 4

El promedio de las calificaciones obtenidas por todos los estudiantes del grado undécimo es un **parámetro**. El promedio alcanzado por diez estudiantes de undécimo es un **estadígrafo**.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. Clasifica los caracteres estadísticos en cualitativos y cuantitativos.
   a. Sexo
   b. Altura
   c. Lugar de nacimiento
   d. Número de hermanos
   e. Gastos mensuales
   f. Deporte favorito
   g. Tiempo dedicado a dormir

2. En cada uno de los siguientes casos identifica la población, una muestra y el carácter estadístico.
   a. Se quiere averiguar el número de habitantes de todos los municipios de Santander.
   b. Se desea analizar el peso de los bebés que nacen en un hospital de Montería.
   c. Se quiere conocer el color preferido entre los estudiantes de un colegio.
   d. Se desea analizar el porcentaje de trabajadores que ganan un salario mínimo en la ciudad de Pasto.
   e. Se quiere averiguar el número de niños en edad escolar que hay en una ciudad.

Ejercitación

3. En la Tabla 6.2 se registran los salarios semanales de 65 empleados de una fábrica.

Salario (pesos)	Número de empleados
[172300, 324800)	25
[324800, 477300)	14
[477300, 629800)	10
[629800, 782300)	8
[782300, 934800)	9

Tabla 6.2

Responde las preguntas.
   a. ¿Cuál es el carácter estadístico estudiado? ¿La variable estadística es cualitativa o cuantitativa?
   b. ¿Cuál es la población de estudio?
   c. ¿De qué tamaño es la muestra?

Razonamiento

4. Analiza la siguiente situación y determina si se describe un parámetro o un estadígrafo.
   - En una encuesta aplicada a 540 amas de casa de la ciudad de Ibagué, se encuentra que la mayoría prefiere la marca "Limpia más" de productos de aseo en lugar de otras marcas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Determina si cada enunciado es verdadero (V) o falso (F).

Enunciado	V	F
a. La muestra es una característica de los elementos de una población.		
b. Una población es un conjunto de individuos u objetos que se analizan.		
c. Una variable cuantitativa puede ser continua o discreta.		
d. Una variable discreta toma solo valores enteros.		
e. Una variable cuantitativa continua toma valores en los números reales.		
f. Un parámetro es lo mismo que un estadígrafo.		

Tabla 6.3

Resolución de problemas

6 Se recolectó información relacionada con el consumo mensual de metros cúbicos de agua de algunas familias de un barrio de Tunja. Los datos obtenidos se registran en la Tabla 6.4.

Consumo mensual de agua (m^3)	Número de familias
[9, 12)	3
[12, 15)	6
[15, 18)	4
[18, 21)	18
[21, 24)	10
[24, 27)	6
[27, 30)	2

Tabla 6.4

a. Determina la población, la muestra y el tipo de variable.

b. ¿Cuál es la amplitud de cada intervalo?

c. Halla las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas y relativas acumuladas.

d. ¿Cuántas familias consumen menos de 21 m^3 de agua al mes?

e. Si se espera que el consumo promedio de una familia sea de 18 m^3, ¿cuántas familias exceden el consumo mensual?

7 Federico quiere hacer un estudio estadístico para determinar la cantidad de dinero del que disponen los estudiantes de un colegio para comprar en la hora de descanso. Para ello elabora una encuesta y la aplica a seis estudiantes de cada salón.

a. ¿Cuál es la población y muestra de este estudio?

b. ¿Cuál es el carácter estadístico?, ¿de qué tipo es la variable?

Evaluación del aprendizaje

✓ En la Tabla 6.5 se muestra la edad en la que un grupo de personas contrajeron matrimonio civil en el año 2015.

Edad (años)	Número de hombres	Número de mujeres
[14, 18)	18	25
[18, 22)	124	567
[22, 26)	225	382
[26, 30)	321	272
[30, 34)	598	154
[34, 38)	164	108
[38, 42)	150	98

Tabla 6.5

a. ¿Cuántas personas se encuestaron?

b. ¿Cuántos intervalos fueron considerados y cuál es la amplitud de cada uno?

c. ¿Cuál es la frecuencia relativa del segundo intervalo en las mujeres?

Estilos de vida saludable

Realiza una encuesta en tu colegio para saber qué estilos de vida saludable tienen tus compañeros para mantener una buena salud física y mental. Para realizar tu estudio define el tamaño de la muestra y la población de estudio, organiza tus resultados y socialízalos durante la clase.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2 Muestreo

Saberes previos

Se contratará una campaña en Facebook para vender ropa de bebé. ¿Cómo se debe segmentar el público a quienes les llegará la información?

Analiza

El alcalde de la ciudad planea iniciar un estudio del nivel de satisfacción del servicio de agua y de sus tarifas. Para ello, organizó una encuesta que aplicará en diferentes sectores de la ciudad, teniendo en cuenta el estrato. La encuesta se aplicará solamente al 20% de las personas en cada sector.

- ¿Por qué el alcalde no le aplica la encuesta a todos los habitantes de la ciudad?

Conoce

El alcalde no aplica la encuesta a todos los ciudadanos porque sería un proceso demorado y costoso. Además, si elige solo un porcentaje de los ciudadanos, a partir de sus respuestas, puede plantear conclusiones sobre el nivel de satisfacción.

La **población** o universo se define como un conjunto de elementos, unidades o sujetos de los cuales es posible extraer información y analizarla.

La **muestra** es un subconjunto de la población que puede aportar la misma información que la totalidad de esta. Es importante tener en cuenta que dicha muestra debe ser representativa.

El **muestreo aleatorio** es uno de los procedimientos más frecuentes para extraer una muestra, ya que todos los elementos de la población tienen la misma posibilidad de ser elegidos para ser parte de esta. El muestreo aleatorio puede ser simple, sistemático, estratificado o por conglomerados.

2.1 Muestreo aleatorio simple

El **muestreo aleatorio simple** consiste en elegir al azar los elementos de la población que van a formar parte de la muestra, de manera que todos tengan la misma posibilidad de ser seleccionados.

Ejemplo 1

Para conocer la opinión de 1 300 estudiantes de una universidad sobre aspectos académicos, se hace un muestreo aleatorio simple. Para generar una muestra de 20 estudiantes, un procedimiento adecuado sería disponer de una urna con 1 300 bolas numeradas del 1 al 1 300 y elegir, sin reemplazamiento, 20 bolas que serían los números de los estudiantes a encuestar.

2.2 Muestreo sistemático

En los casos en que se dispone de un listado de los elementos de la población se puede realizar un **muestreo sistemático**, que consiste en elegir al azar el primer elemento de la muestra y continuar tomando elementos igualmente espaciados a partir de este.

2.3 Muestreo estratificado

En ocasiones, la variable que se estudia no es homogénea en toda la población, sino que varía según diferentes grupos o **estratos**. En este caso, la muestra se debe elegir de manera que la proporción en que cada uno de los estratos entra en la muestra sea igual a la proporción que cada uno representa en la población. Este sería el caso de la encuesta de satisfacción que se plantea al inicio de esta página.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

2.4 Muestreo por conglomerados

Para realizar un muestreo estratificado es necesario conocer con gran precisión la población de la que se quiere extraer la información, y esto no siempre es posible. En cambio, en muchos estudios, la población se agrupa física o temporalmente en **conglomerados** parecidos a la población total.

Ejemplo 2

Se quiere realizar un sondeo sobre la intención de voto. Los electores se agrupan de manera natural en municipios. Si la intención de voto dentro de los municipios es similar a la de toda la población, se pueden elegir primero los municipios al azar y después realizar un muestreo aleatorio simple en cada uno de ellos.

2.5 Muestreo a juicio

El **muestreo no aleatorio** es conocido como **muestreo a juicio** y es el método en el que los individuos se seleccionan a juicio y opinión de quien toma la muestra. En este muestreo prima la intención de que determinados elementos estén en la muestra. Otros tipos de muestreo no aleatorio son el muestreo por conveniencia, el muestreo voluntario y el muestreo por cuotas.

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1. Se realizó una encuesta para conocer la preferencia de los 200 habitantes de un conjunto residencial con respecto al servicio de televisión por cable.

   Indica el tipo de muestreo aplicado a cada caso, si:

   a. En el conjunto, las viviendas pertenecen a los estratos 3 y 4, y se eligen cinco personas de cada estrato.

   b. Se hace una lista con los nombres de los residentes del conjunto por orden alfabético, se elige la primera persona al azar y, luego, un nombre cada 20 posiciones en la lista.

   c. Se depositan 200 papeletas con los nombres de los residentes del conjunto en una urna y se seleccionan diez al azar.

2. Elabora una tabla en la que compares los diferentes tipos de muestreo, haciendo énfasis en las ventajas y desventajas de cada uno de estos.

Evaluación del aprendizaje

Determina la población y el tipo de muestreo más adecuado en cada situación. Justifica tu respuesta.

a. El departamento de mercadeo de una empresa textil planea subir los costos de su línea de ropa para dama. El alza inicial se hará en todas las ciudades capitales.

b. El Ministerio de Comunicaciones quiere saber el nivel de satisfacción de los colombianos en relación con la TDT (televisión digital terrestre).

c. La directora de un colegio quiere determinar los promedios de notas en cada una de las materias del currículo para los grados 9, 10 y 11.

d. Un centro comercial planea desarrollar una campaña de motivación para que sus clientes consuman más los productos de la plazoleta de comidas.

e. Una ensambladora de carros quiere lanzar una versión económica de un automóvil último modelo.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

3 Medidas de tendencia central para datos agrupados por clases

Saberes previos

Julián dice que la edad promedio de los estudiantes de grado undécimo es 16,5 años. ¿Qué quiere decir Julián con esa afirmación?

Analiza

Un docente de matemáticas determinó que la valoración final de cada estudiante es el promedio de todas las valoraciones del periodo.

- Las notas de Manuel son: 8,6; 5,2; 5,9; 7,0; 6,8: Si hace falta que Manuel presente la evaluación bimestral, ¿qué nota mínima debe obtener para tener una valoración final de 7,0?

Conoce

Para responder la pregunta se debe tener presente cuántas valoraciones se consideraron en el periodo. En el momento se tienen registradas cinco calificaciones y falta la nota de la evaluación bimestral, así que en total son seis valoraciones. Como Manuel aprobará si obtiene una nota de 7,0 en su evaluación bimestral, se tiene que la sumatoria mínima en las valoraciones debe ser de 42; por tanto, la valoración faltante se calcula como se muestra a continuación.

$$7{,}0 = \frac{8{,}6 + 5{,}2 + 5{,}9 + 7{,}0 + 6{,}8 + x}{6} = \frac{42}{6} \Rightarrow 33{,}5 + x = 42 \Rightarrow x = 8{,}5$$

Manuel debe obtener una nota de 8,5 en su evaluación bimestral para alcanzar el promedio deseado.

Las **medidas de tendencia central** reciben esta denominación, pues permiten analizar los datos en torno a un valor central. Para observaciones con un número grande de variables es recomendable agrupar por clases la información para así determinar sus medidas de tendencia central, de forma aproximada.

3.1 Media aritmética o promedio

La **media aritmética** en un conjunto de datos agrupados por clases es el cociente entre la suma de todos los productos de las marcas de clase o puntos medios de cada intervalo (C_k) por la frecuencia absoluta (f_k) correspondiente, y el total de datos (N).

La media aritmética viene dada por la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (C_k \cdot f_k)}{N}$$

3.2 Mediana

Para calcular la **mediana** para datos agrupados por clases es necesario ubicar primero en la distribución de frecuencias el intervalo en donde se encuentra la mediana. La manera de calcularla es encontrando la posición $\frac{N}{2}$. Este intervalo se conoce como **intervalo de la mediana**.

La mediana de un conjunto de datos agrupados se calcula así:

$$Me = L_k + \frac{\left(\frac{N}{2} - F_{k-1}\right)}{f_k} \cdot A$$

L_k es el límite inferior del intervalo mediano, N es el tamaño de la muestra, F_{k-1} es la frecuencia acumulada anterior al intervalo mediano, f_k es la frecuencia absoluta del intervalo mediano y A es la amplitud del intervalo de la mediana.

3.3 Moda

La **moda** de una variable estadística es el valor de la variable que presenta mayor frecuencia absoluta. La moda se representa por Mo.

Si los datos aparecen en clases, se toma como valor aproximado de la moda la marca de clase de la **clase modal**.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

En la tabla se muestra el peso en kilogramos de los 61 deportistas de una liga del Valle.

Peso (kg)	Marcas de clase (C_i)	f_i	F_i
[50, 60)	55	5	5
[60, 70)	65	12	17
[70, 80)	75	13	30
[80, 90)	85	17	47
[90, 100)	95	10	57
[100, 110)	105	4	61

Tabla 6.6

- Los deportistas de la liga tienen un peso promedio de 79,4 kg, puesto que:

$$\overline{x} = \frac{55 \cdot 5 + 65 \cdot 12 + 75 \cdot 13 + 85 \cdot 17 + 95 \cdot 10 + 105 \cdot 4}{61}$$

$$= \frac{4845}{61} = 79{,}42$$

- En la Tabla 6.6 el intervalo resaltado es el intervalo de la mediana.

Entonces, $Me = 80 + \dfrac{\left(\dfrac{61}{2} - 30\right)}{17} \cdot 10 = 80{,}29$

Esto significa que el 50% de los deportistas de la liga tienen un peso por encima de 80,3 kg y el otro 50% por debajo de tal valor.

- En esta situación el intervalo modal coincide con el intervalo de la mediana; por lo tanto: $Mo = \dfrac{80 + 90}{2} = 85$.

El **promedio** en la situación indica que si los 61 deportistas tuvieran el mismo peso este sería de 79,42 kg.

Por su parte, el valor de la moda indica que el peso más frecuente de los deportistas e 85 kg.

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

En una fábrica se evalúa el tiempo de duración de un nuevo tipo de bombilla LED, para ello se analizaron 100 bombillas (Tabla 6.7).

Tiempo (horas)	Número de bombillas
[1000, 3500)	14
[3500, 5000)	25
[5000, 7500)	31
[10000, 12500)	18
[12500, 15000)	12

Tabla 6.7

Si el grupo de bombillas consideradas no alcanzan un promedio de duración de 6 000 horas, no se producirá en masa este nuevo tipo de bombillas. ¿Consideras que es viable continuar con la producción de esta nueva clase de bombillas?

Evaluación del aprendizaje

A continuación se muestran las edades de motociclistas cuando fallecieron en accidentes de tránsito.

Edad (años)	Número de motociclistas
[15, 21)	101
[21, 27)	253
[27, 33)	137
[33, 39)	211
[39, 45)	116

Tabla 6.8

Escribe falso o verdadero:

a. El 50% de los motociclistas que fallecieron tenían edades por debajo de los 31 años.
b. La edad promedio de los motociclistas que fallecieron es 31,03 años.
c. La moda se encuentra entre 33 y 39 años.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

4 Cuartiles y percentiles para datos agrupados por clases

Saberes previos

Para entregar los informes de los resultados de las Pruebas de Estado, la población se divide en 10 grupos de acuerdo con los puntajes obtenidos en cada una de las pruebas a nivel nacional. ¿Para qué crees que sea útil esa agrupación? ¿Qué indicará que un estudiante se ubique en el grupo 7?

Analiza

Los siguientes valores corresponden a las masas en kg de doce estudiantes de grado undécimo.

64	65	65
63	64	60
63	59	63
60	63	57

- Determina el primer cuartil correspondiente a este conjunto de datos.

Conoce

Para responder la pregunta, se organizan los datos en una tabla de frecuencias.

Masa (kg)	57	59	60	63	64	65
f_i	1	1	2	4	2	2
F_i	1	2	4	8	10	12

Tabla 6.9

La cuarta parte del número de datos es: $12 \div 4 = 3$. El primer **cuartil** corresponde al primer valor que tiene una frecuencia acumulada igual o superior a 3; por tanto, este valor es 60, que tiene una frecuencia acumulada de 4. Este cuartil indica que el 25% de los estudiantes tiene una masa menor que 60 kg.

4.1 Cuartiles

Los **cuartiles** son los valores que dividen la serie de datos en cuatro partes iguales. Los tres cuartiles se simbolizan como Q_1, Q_2 y Q_3.

El primer cuartil, Q_1, deja por debajo el 25% de los datos de la distribución.

El segundo cuartil, Q_2, coincide con la mediana y deja por debajo el 50% de los datos.

El tercer cuartil, Q_3, deja por debajo el 75% de los datos de la distribución.

Para calcular un cuartil para datos agrupados por clases, primero se determina en qué intervalo se ubica el dato de la posición $\frac{k \cdot N}{4}$, donde k es el cuartil que se debe hallar y N es el tamaño de la muestra. Luego, se aplica la expresión:

$$Q_k = L_k + A \cdot \left(\frac{\frac{k \cdot N}{4} - F_{k-1}}{f_k} \right)$$

L_k es el límite inferior del intervalo que contiene el cuartil, A la amplitud del intervalo, F_{k-1} la frecuencia acumulada anterior al intervalo que contiene el cuartil y f_k la frecuencia absoluta del intervalo.

4.2 Percentiles

Los **percentiles** son cada uno de los 99 valores que dividen la serie de datos en 100 partes iguales.

Para calcular un percentil para datos agrupados por clases, primero se determina en qué intervalo se ubica el dato de la posición $\frac{k \cdot N}{100}$, donde $k = 1, 2..., 99$. Luego, se aplica la expresión:

$$P_k = L_k + A \cdot \left(\frac{k\left(\frac{N}{100}\right) - F_{k-1}}{f_k} \right)$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Las calificaciones de 200 aspirantes obtenidas en la prueba de ingreso a una universidad se registran en la Tabla 6.10.

Calificaciones	fk	Fk
[0, 20)	28	28
[20, 40)	45	73
[40, 60)	64	137
[60, 80)	38	175
[80, 100]	25	200

Tabla 6.10

Para hallar el tercer cuartil, primero se tiene que $\frac{3 \cdot 200}{4} = 150$. Como el dato de la posición 150 se ubica en el cuarto intervalo, entonces el tercer cuartil se halla como sigue:

$$Q_k = L_k + A \cdot \left(\frac{\frac{k \cdot N}{4} - F_{k-1}}{f_k} \right) \Rightarrow Q_3 = 60 + 20 \cdot \left(\frac{150 - 137}{38} \right) = 66{,}84$$

Para hallar el percentil 57, se tiene que $\frac{57 \cdot 200}{100} = 114$; por lo tanto, se debe calcular el percentil tomando como referencia al tercer intervalo.

Con esta información se puede concluir que:

$$P_k = L_k + A \cdot \left(\frac{k\left(\frac{N}{100}\right) - F_{k-1}}{f_k} \right) \Rightarrow 40 + 20 \cdot \left(\frac{57\left(\frac{200}{100}\right) - F73}{64} \right) = 52{,}81$$

- El 25% de los aspirantes tuvo calificaciones por encima de 66,8 mientras que las notas del 75% restante estuvo por debajo de 66,8.
- El 57% de los aspirantes tuvo calificaciones por debajo de 52,8.

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

El histograma de la Figura 6.2 muestra las velocidades de conductores con infracciones por exceder el límite de velocidad que en un lugar determinado es de 60 km/h.

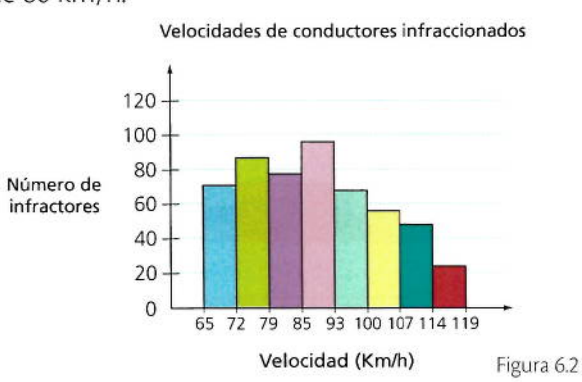


Figura 6.2

Calcula las medidas que se solicitan, y redacta una conclusión por cada una de ellas.

a. El primer cuartil (Q_1)
b. El tercer cuartil (Q_3)
c. El 55° percentil (P_{55})
d. El 70° percentil (P_{70})

Evaluación del aprendizaje

Se les preguntó a 300 personas la edad en la cual habían iniciado el consumo de bebidas alcohólicas. Los resultados se muestran en la Tabla 6.11.

Edad (años)	Número de personas
[10, 13)	72
[13, 16)	101
[16, 19)	68
[19, 22)	39
[22, 25)	20

Tabla 6.11

Si el tercer cuartil está por encima de los 15 años, se planea lanzar campañas en radio y televisión para disminuir el consumo de bebidas alcohólicas. Justifica numéricamente si es necesario iniciar con estas campañas de prevención.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5 Medidas de dispersión

Saberes previos

Una finca cafetera de Nariño recolecta durante 5 días de la semana 15 kg, 18 kg, 21 kg, 23 kg y 13 kg de grano, mientras que otra del Cauca recolecta en el mismo lapso de tiempo 8 kg, 12 kg, 26 kg, 30 kg y 5 kg. ¿Cuáles de estos datos se encuentran más dispersos, los de la producción de la finca de Nariño o los de la finca del Cauca?

Analiza

En la Tabla 6.12 se muestran las distancias (en metros) que alcanzan dos atletas de salto largo en un día de entrenamiento.

Atleta 1	Atleta 2
12,3	14,2
14,5	13,9
11,7	12,8
15,1	12,7
12,8	14,1
11,9	14
15,3	12,9
13,7	13,7
13,9	13,1
12,8	12,6

Tabla 6.12

- ¿Cómo determinarías cuál es el atleta más regular o constante en sus saltos?

Conoce

La media o promedio de la distancia alcanzada por cada atleta es:

Atleta 1

$$\bar{x} = \frac{134}{10} = 13,4$$

Atleta 2

$$\bar{x} = \frac{134}{10} = 13,4$$

Como el promedio de ambos atletas es el mismo, esta medida no permite comparar los resultados. Una alternativa para determinar cuál de los dos es más regular, es observar la **variabilidad** o la **dispersión** en las distancias alcanzadas por cada uno. Para ello, se organizan de menor a mayor los registros de ambos:

Atleta 1	11,7	11,9	12,3	12,8	12,8	13,7	13,9	14,5	15,1	15,3
Atleta 2	12,6	12,7	12,8	12,9	13,1	13,7	13,9	14	14,1	14,2

Tabla 6.13

Se puede advertir que el Atleta 1 es quien más varía en las distancias que alcanza. Por lo tanto, el Atleta 2 es más constante en sus saltos.

Las medidas de dispersión muestran la variabilidad de una distribución indicando cuán alejados están los datos de la media. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad, y cuanto menor sea, más homogénea será.

5.1 Rango

El rango o recorrido de una distribución de datos es la diferencia entre el valor máximo ($x_{máx}$) y el valor mínimo ($x_{mín}$).

$$\text{Rango} = x_{máx} - x_{mín}$$

Ejemplo 1

En la tabla 6.14, se muestran las estaturas de un grupo de estudiantes compuesto por 24 mujeres. El rango corresponde a la diferencia entre 168 (valor máximo) y 149 (valor mínimo).

Es decir, rango $= 168 - 149 = 19$.

Estaturas (cm)	No. de mujeres
[149, 153)	2
[153, 157)	3
[157, 161)	7
[161, 165)	8
[165, 168)	4

Tabla 6.14

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

5.2 Desviación respecto a la media

La **desviación respecto a la media**, denotada d_k, corresponde a la diferencia entre cada valor de la variable x_k y la media aritmética $\overline{x}$.

$$d_k = x_k - \overline{x}$$

En datos agrupados por clases es la diferencia entre la marca de clase de cada intervalo y la media aritmética $\overline{x}$.

Esta medida da información de lo cerca o lejos que está un dato de los demás datos del conjunto. El signo de esta medida indica si el valor está por encima de la media (signo positivo) o por debajo de la media (signo negativo).

5.3 Desviación media

La **desviación media** para datos agrupados por clases, denotada D_k, corresponde a la media de las desviaciones con respecto a la media y se calcula con la fórmula:

$$D_k = \frac{\sum_{k=1}^{m} \left| C_k - \overline{x} \right| \cdot f_k}{N}$$

Por lo tanto, para determinar la desviación media para datos agrupados por clases, se deben calcular las marcas de clase de cada intervalo y luego se multiplican por las frecuencias absolutas, estos datos vienen agrupados en una **tabla de frecuencias** como la del Ejemplo 2.

5.4 Varianza

La **varianza** para datos agrupados por clases, denotada s^2, es la media aritmética de cuadrados de las desviaciones con respecto a la media. Se halla mediante la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m} \left(C_k - \overline{x} \right)^2 \cdot f_k}{N}$$

La varianza permite identificar la diferencia media que hay entre cada uno de los valores respecto a la media del conjunto de datos.

5.5 Desviación típica

La **desviación típica** para datos agrupados por clases, s, es la raíz cuadrada positiva de la varianza y se halla a través de la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m} \left(C_k - \overline{x} \right)^2 \cdot f_k}{N}}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

Los datos de la Tabla 6.15 corresponden a las temperaturas diarias registradas a las 2:00 p.m. durante un mes en la ciudad de Manizales.

Temperatura (ºC)	Frecuencia absoluta f_k	Marcas de clase C_k
[16; 18,8)	5	17,4
[18,8; 21,6)	7	20,2
[21,6; 24,4)	14	23
[24,4; 27,2)	3	25,8
[27,2; 30)	2	28,6
Sumatoria		**685**

Tabla 6.15

La media aritmética de estos datos corresponde a $\overline{x} = \dfrac{685}{31} = 22{,}1$.
Con este dato, se completa la Tabla 6.16.

Temperatura (ºC)	f_k	C_k	d_k	d_k^2	$d_k^2 \cdot f_k$
[16; 18,8)	5	17,4	-4,7	22,09	110,45
[18,8; 21,6)	7	20,2	-1,9	3,61	25,27
[21,6; 24,4)	14	23	0,9	0,81	11,34
[24,4; 27,2)	3	25,8	3,7	13,69	41,07
[27,2; 30)	2	28,6	6,5	42,25	84,5

Tabla 6.16

Se halla la varianza s^2 y, posteriormente, la desviación típica s:

$$s^2 = \frac{110{,}45 + 25{,}27 + 11{,}34 + 41{,}07 + 84{,}5}{31} = \frac{272{,}63}{31} = 8{,}79.$$

$$s = \sqrt{8{,}79} = 2{,}96$$

Cuanto mayor sean la varianza y la desviación típica, más dispersos estarán los datos.

5.6 Coeficiente de variación

El coeficiente de variación, *CV*, se emplea para comparar la dispersión de distribuciones que tienen diferentes medias y distintas desviaciones típicas. Se calcula con la expresión:

$$CV = \frac{S}{\overline{x}}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 La tabla muestra las estaturas de 40 funcionarios de una empresa.

Estatura (m)	Número de funcionarios
[1,46; 1,53)	4
[1,53; 1,60)	9
[1,60; 1,67)	10
[1,67; 1,74)	8
[1,74; 1,81)	9

Tabla 6.17

a. Determina el rango del conjunto de datos.

b. Calcula la desviación con respecto a la media de cada intervalo y escribe cuál está más alejado de la media.

c. Halla la varianza y la desviación típica.

Ejercitación

2 Se tienen dos distribuciones cuyos datos son los siguientes:

Distribución *A*:
9, 5, 3, 2, 1, 2, 6, 4, 9, 8, 1, 3, 5, 4, 2, 6, 3, 2, 5, 6, 7

Distribución *B*:
1, 1, 3, 2, 5, 6, 7, 2, 5, 4, 3, 1, 2, 1, 5, 7, 8, 9, 9, 2, 1

a. Halla el rango de ambas distribuciones.

b. Halla la media aritmética y la desviación típica de ambas distribuciones.

c. Calcula el coeficiente de variación para discernir cuál de las dos distribuciones tiene los datos más concentrados.

Ejercitación

3 Dada la distribución estadística definida por la tabla 6.18.

x_i	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)
f_i	5	6	8	11	1	13

Tabla 6.18

a. Calcula la media, la mediana y la moda.

b. Halla la varianza y la desviación típica.

Ejercitación

4 Considera los siguientes datos: 3, 8, 4, 10, 6, 2.

a. Halla la media y la varianza.

b. Si cada número se multiplica por 3, obtén su media y varianza a partir de los resultados anteriores.

Resolución de problemas

5 Se dan dos conjuntos de datos.

A: 1, 3, 5, 7, 9

B: 1, 5, 10, 15, 30

Sin necesidad de hacer ningún cálculo, ¿cuál de los dos conjuntos tiene mayor dispersión?

Evaluación del aprendizaje

Las tablas 6.19 y 6.20 muestran los resultados de dos laboratorios cuando analizan la cantidad de residuos secos en el agua potable (mg/L).

Laboratorio A

Residuos secos	f_k
[8; 10)	15
[10; 12)	8
[12; 14)	7
[16; 18)	6
[18; 20)	24

Tabla 6.19

Laboratorio B

Residuos secos	f_k
[8; 10)	30
[10; 12)	8
[12; 14)	11
[16; 18)	4
[18; 20)	4

Tabla 6.20

Se elegirá el laboratorio que tenga resultados que presenten menos variabilidad en sus datos. ¿Qué decisión consideras que es la más adecuada? Justifica tus respuestas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

6 Tendencias y análisis de comportamiento

Saberes previos

Según Fedearroz el precio de un kilogramo de arroz osciló así: en septiembre de 2015 costaba $ 3 048, en octubre, $ 3 097, en noviembre $ 3 136 y en diciembre, $ 3 136. Si esa tendencia se mantuvo, ¿cuál pudo haber sido el precio de un kilo de arroz en enero de 2016?

Analiza

El precio promedio de venta de gasolina durante los últimos seis meses de 2015 y los primeros seis meses de 2016 en Villavicencio se muestra en la Tabla 6.21.

Mes	Precio de venta ($)
Julio	8 188,77
Agosto	8 212
Septiembre	8 141,1
Octubre	8 036,9
Noviembre	7 904,6
Diciembre	7 818
Enero	7 822
Febrero	7 718
Marzo	7 612,35
Abril	7 699
Mayo	7 803
Junio	7 803

Tabla 6.21

- Construye una gráfica que permita observar y analizar el comportamiento del precio de venta de la gasolina.

Conoce

Para determinar los cambios en el precio de la gasolina en los doce meses, se halla la media de los datos y se construye una gráfica que permita observar la variación de los datos con respecto al tiempo (Figura 6.3).

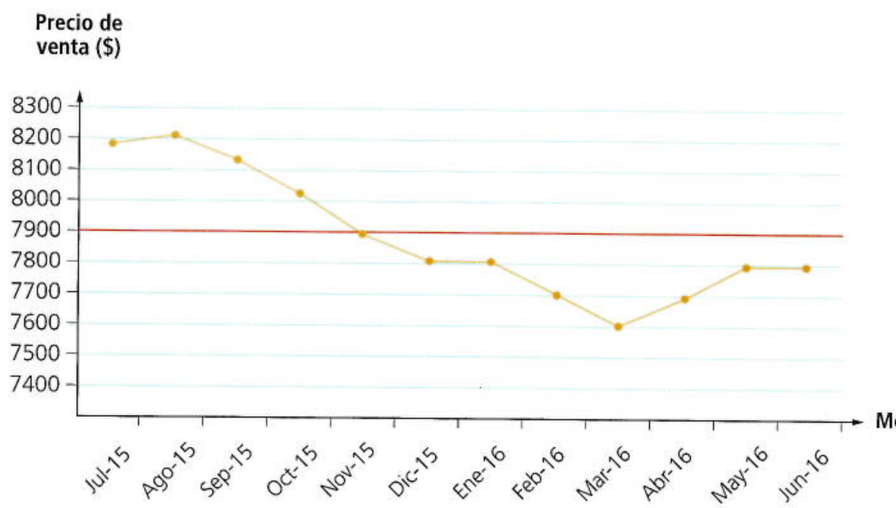


Figura 6.3

La línea horizontal roja corresponde a la media de los datos.

Cada punto de la gráfica es un **comportamiento**.

Se observa, además, que de julio a agosto de 2015 hubo un **aumento**; de agosto de 2015 a marzo de 2016 hubo una serie de **disminuciones** consecutivas, y de marzo a junio de 2016 hubo una serie de aumentos consecutivos.

Para construir **gráficas de comportamiento** se deben seguir estos pasos:

1.° Decidir qué se va a medir.

2.° Determinar el periodo de tiempo a medir, los intervalos en que se va a dividir este periodo y el promedio de los datos.

3.° Trazar dos ejes perpendiculares. En el eje vertical, marcar las frecuencias de cada dato y, en el eje horizontal, los periodos o intervalos de tiempo.

4.° Relacionar cada dato con su frecuencia y unir los puntos mediante líneas.

5.° Trazar una línea horizontal que corresponda a la media de los datos. Esta se llama **línea media**.

6.° Buscar tendencias y comportamientos.

Un **comportamiento** puede ser el punto de un dato individual o una serie de puntos de datos consecutivos que están al mismo lado de la línea media.

Una **tendencia** es una serie de aumentos o disminuciones consecutivas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

En la Figura 6.4 se muestran las ventas (en millones de pesos) de juguetes para la temporada navideña durante las últimas ocho semanas del año.

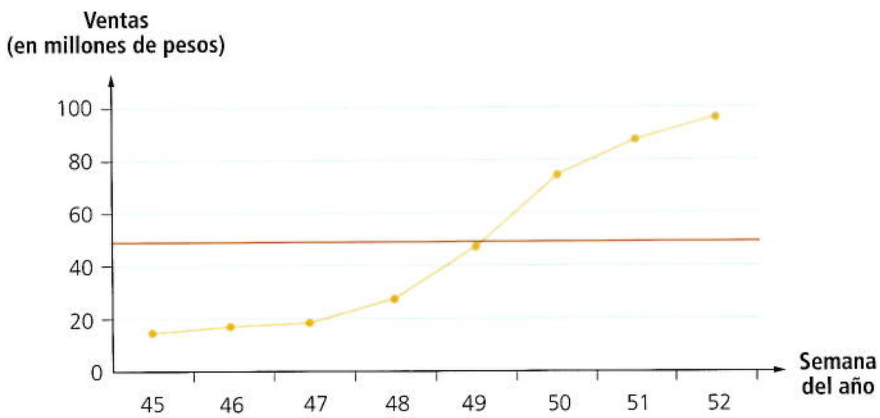


Figura 6.4

En ella se observan los siguientes comportamientos y tendencias:

- Hay cinco comportamientos por debajo de la línea media y tres por encima.
- La tendencia del comportamiento de las ventas de juguetes en la temporada navideña incrementó notablemente en las últimas seis semanas.

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

En una finca ganadera de Bolívar se estudió la producción anual de leche (en litros) de 5 000 vacas durante 10 años para determinar los factores que influyen en la obtención del producto y tomar acciones. Los resultados se muestran en la Tabla 6.22.

Año	Leche (L)
2007	24 000
2008	32 000
2009	39 000
2010	27 000
2011	50 000
2012	40 000
2013	52 000
2014	47 000
2015	49 000
2016	45 000

Tabla 6.22

Construye una gráfica de comportamiento y establece si hay alguna tendencia en los datos.

Evaluación del aprendizaje

Observa la Figura 6.5 y plantea un problema que involucre la información de ella.

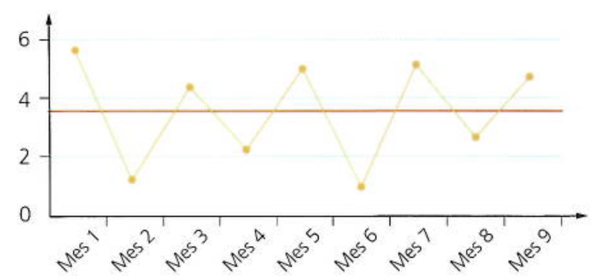


Figura 6.5

a. Determina qué se pudo haber medido.

b. Escribe cuál fue el periodo y los intervalos de tiempo analizados.

c. Determina el valor aproximado de la media de los datos relacionados.

d. Describe las tendencias y comportamientos del problema que planteaste.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

7 Diseño de experimentos aleatorios

Saberes previos

Se sabe que para cultivar cacao la temperatura mínima debe ser 23° C y la óptima es 25° C. ¿Cómo crees que se llegó a esta conclusión? Menciona tres municipios de Colombia en la que sería exitoso un cultivo de cacao.

Analiza

En una investigación agrícola en la que se realizaron cinco repeticiones de cuatro semillas cada una, se evaluó el número de semillas de café germinadas al aplicar diferentes tratamientos.

- Si el ensayo se realizó bajo la estructura de un diseño experimental aleatorio, ¿cuáles son los factores, niveles y tratamientos que se pudieron haber tenido en cuenta en este?

Conoce

Algunos posibles factores que intervinieron en el experimento pudieron ser: el tipo de sustrato (suelo), el acondicionamiento de las semillas, los fertilizantes, entre otros.

Los niveles del tipo de sustrato pudieron haber sido tierra, arena, grava, cascarilla de arroz, etc. La preparación de las semillas se pudo dar por remojo en agua, escarificación (técnica para remover la capa exterior de la semilla), aplicación de calor seco, entre otros. Dentro de los fertilizantes, se pudieron utilizar abonos orgánicos e inorgánicos.

Los posibles tratamientos aplicados a las semillas se forman por la combinación de cada factor con cada nivel. Esto se puede representar mediante el diagrama de árbol de la Figura 6.6.

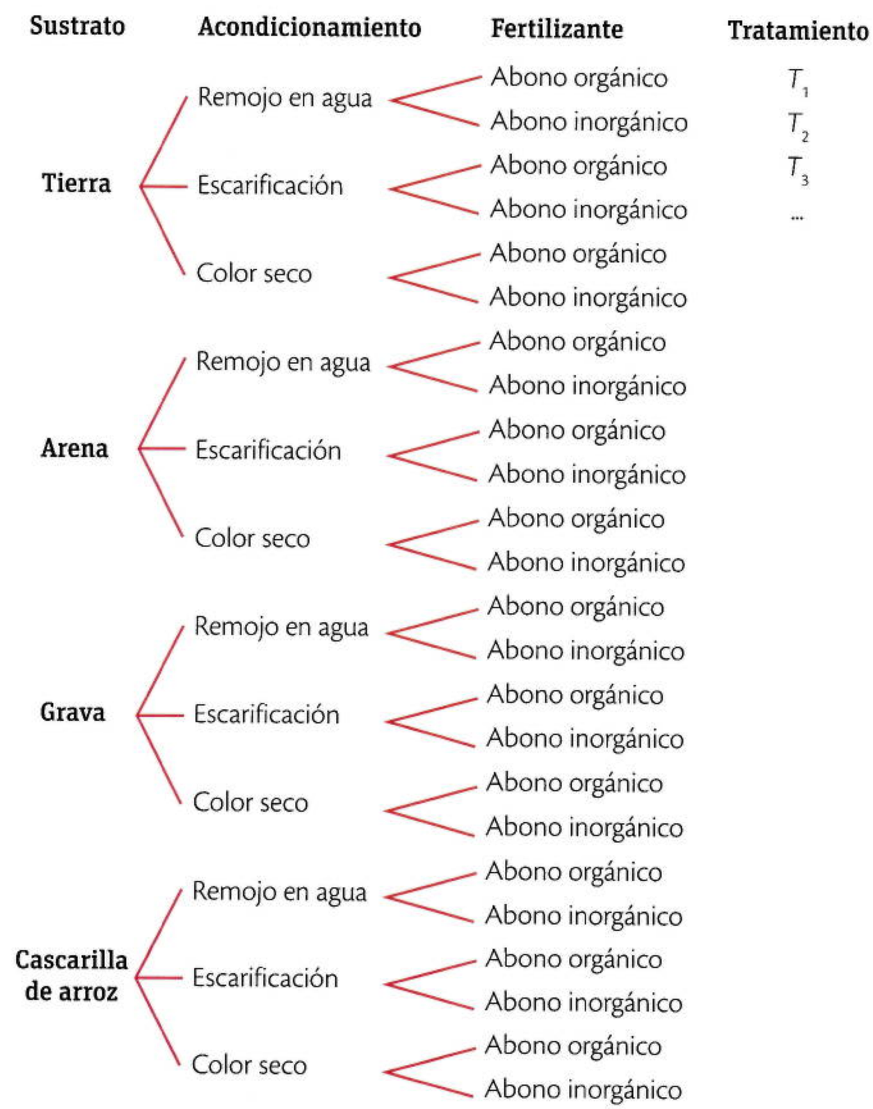


Figura 6.6

Del diagrama de árbol se puede decir que el tratamiento T_7 está compuesto por arena, semilla remojada en agua y abono orgánico. Así mismo, se pueden definir los demás tratamientos.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Un **diseño experimental** es el procedimiento de planeación y conducción de experimentos con el objetivo de obtener conclusiones válidas y objetivas sobre un problema planteado.

Inicia con la formulación de un problema de investigación y la definición de los factores de diseño, de los niveles de cada factor y de los tratamientos a aplicar.

Ejemplo 1

Una empresa textil antioqueña utiliza diversos telares para su producción. Puede existir una variación significativa en la resistencia de los tejidos debida a la utilización de distintos telares. La empresa cuenta con 5 tipos de máquinas con los que analiza la resistencia de la tela.

Este experimento se realiza en orden aleatorio y los resultados se muestran en la tabla 6.23.

Telares	Resistencia
1	51 49 50 49 51 50
2	56 60 56 56 57
3	48 50 53 44 45
4	47 48 49 44
5	43 43 46 47 45 46

Figura 6.23

En este experimento, se han considerado 5 tipos de telares y se han realizado 6, 5, 5, 4 y 6 determinaciones de la resistencia de tela manufacturada con cada uno, respectivamente.

La **variable de interés** en la situación: La resistencia de la tela.

Factores de diseño: Los telares.

Niveles del factor: 5

Los **tamaños de las muestras** son distintos o no balanceados.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1. ¿Por qué es importante realizar repeticiones en un experimento?

Resolución de problemas

2. En un estudio clínico se van a evaluar diferentes tratamientos para una enfermedad de la piel en una muestra de 1 000 personas. Los tratamientos propuestos fueron:
   - Crema hidratante e hidratación cada dos horas.
   - Crema hidratante e hidratación cada cuatro horas.
   - Crema hidratante e hidratación cada ocho horas.

   Diseña el experimento con los datos dados, para ello determina los factores y los niveles de cada factor y define un grupo control, el número de repeticiones y el número de individuos por cada repetición.

3. Diseña un experimento aleatorio con la siguiente información: una compañía algodonera que emplea diversos fertilizantes desea comprobar si estos tienen efectos diferentes sobre el rendimiento de la semilla de algodón.

Evaluación del aprendizaje

En un estudio para evaluar el efecto de un medicamento contra la diabetes, se utilizaron ratas de laboratorio a las que se les aplicó diferentes dosis del mismo (10 ml, 15 ml y 20 ml).

a. ¿Cuál es la unidad experimental?
b. ¿Cuál sería un grupo control en el experimento?
c. ¿Cuál es el factor de diseño?, ¿cuáles son sus niveles?

Educación ambiental

Reúnete con dos compañeros y propon un diseño experimental para evaluar la eficacia de los microorganismos en la descontaminación de un cuerpo de agua. Define:

- Las variables.
- El tipo de muestra.
- El experimento que realizarías.

MATEMÁTICAS © LA ROUSSE

8 Reglas de probabilidad

Saberes previos

En la Universidad Nacional de Bogotá, se asigna un 2 % de los cupos de cada programa curricular a los miembros de las comunidades indígenas. Si a arquitectura ingresaron 70 estudiantes, ¿qué parte del total son indígenas?

Analiza

Se construye el dado de la Figura 6.7 y se definen los sucesos A: "obtener número impar" y B: "obtener número par".

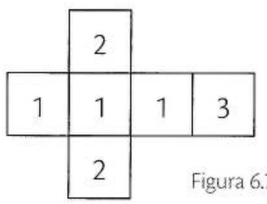


Figura 6.7

- Determina $P(A)$, $P(B)$, $A \cup B$ y $P(A \cup B)$.

Conoce

Para determinar las probabilidades indicadas, se analiza cada suceso.

En el dado, hay cuatro posibilidades de seis para obtener un número impar. Estas son: 1, 1, 1 y 3. Por lo tanto, $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Para obtener un número par, se observa que en el dado hay dos caras de seis que contienen número par. Estas son: 2 y 2. Es decir, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

El suceso $A \cup B$ se interpreta como "obtener un número par o un número impar". Este suceso equivale al espacio muestral, es decir, $A \cup B = E$. Como en el dado hay números pares e impares, hay seis posibilidades de seis para obtener uno de estos números.

8.1 Sucesos compatibles e incompatibles

Si A y B son sucesos del mismo experimento aleatorio y:

- $A \cap B = \varnothing$, entonces A y B son sucesos incompatibles.
- $A \cap B \neq \varnothing$, entonces A y B son sucesos compatibles.

Se llama **probabilidad** a una ley (función o aplicación) que asocia a cada suceso A de un espacio de sucesos un número real que se llama probabilidad de A y se representa por $P(A)$, que cumple los siguientes axiomas:

1.º La probabilidad de un suceso cualquiera está entre 0 y 1.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

2.º La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad:

$$P(E) = 1$$

3.º La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (A \text{ y } B \text{ incompatibles})$$

8.2 Consecuencias de los axiomas

- La probabilidad del suceso $\overline{A}$, contrario de A, se calcula como $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

  Como $A \cup \overline{A} = E$ y además A y $\overline{A}$ son incompatibles, resulta:

  $1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, de donde $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

- La probabilidad del suceso imposible es cero. Es decir: $P(\varnothing) = 0$.

Como el suceso imposible es el contrario del suceso seguro y $P(E) = 1$, aplicando el resultado anterior se obtiene:

$$P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$$

Este resultado se puede generalizar a n sucesos incompatibles:

Si A_1, A_2, ..., A_n son n sucesos incompatibles dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Se lanza un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. Al calcular la probabilidad del suceso A: "obtener un número menor que 5" se tiene que:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Entonces, la probabilidad del suceso contrario es:

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

En este caso, se puede pensar que si fuera un juego, es más probable que caiga un número menor que 5.

Ejemplo 2

Una empresa que fabrica teléfonos móviles tiene comprobado que de cada 300 teléfonos que fabrica, siete tienen algún defecto. Si una persona compra un teléfono de esa compañía, las probabilidades de que sea defectuoso $P(A)$ es:

$$P(A) = \frac{7}{300} = 0{,}02\overline{3}$$

El suceso "el teléfono no es defectuoso" es el contrario que el anterior, así que $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}02\overline{3} = 0{,}97\overline{6}$. Por lo cual es confiable comprarle a la compañía.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 En una urna hay ocho bolas azules y blancas; la probabilidad de sacar una bola azul es $\frac{2}{5}$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?

b. ¿Cuántas bolas blancas contiene la urna?

c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola amarilla?

2 Si la probabilidad del suceso A es 0,3, halla la probabilidad de $\overline{A}$.

Ejercitación

3 Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6. Calcula:

a. La probabilidad de obtener 6.

b. La probabilidad de no obtener 6.

c. Si participaras en este juego, ¿qué podrías predecir de los resultados?

4 De una baraja española de 40 cartas, se extrae una carta. Halla la probabilidad de:

a. Extraer una carta que sea un as.

b. Extraer una carta que no sea un as.

c. Extraer un as o un rey.

Evaluación del aprendizaje

✓ Un grupo de estudiantes está conformado por catorce niños y doce niñas. Considera los sucesos:

A: "seleccionar dos niños".

B: "seleccionar dos niñas".

a. Halla el suceso $A \cup B$ y su probabilidad.

b. Calcula $P(\overline{A})$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

9 Probabilidad de la unión de sucesos

Saberes previos

Si se lanza un dado, ¿es más probable que caiga mostrando un múltiplo de 2 o uno de 3? Explica.

Analiza

Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado cúbico y los sucesos A: "obtener una puntuación par" y B: "obtener una puntuación inferior a tres".

- Calcula la probabilidad de obtener una puntuación par o inferior a tres.

Conoce

Para calcular la probabilidad de $A \cup B$ se determinan los elementos que pertenecen a la unión de A y B. Esto es $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$.

Como hay cuatro casos favorables de seis casos posibles, entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

9.1 Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

La **probabilidad de la unión de *n* sucesos incompatibles** dos a dos es la suma de las probabilidades de estos sucesos. Es decir:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Ejemplo 1

En un dado con tres "1", dos "2" y un "3"se definen los sucesos C: "obtener el número 1" y D: "obtener el número 3".

Las probabilidades de cada suceso son:

$$P(C) = \frac{3}{6} \qquad P(D) = \frac{1}{6}$$

Los sucesos C y D son incompatibles, pues $C \cap D = \varnothing$. Por lo tanto, la probabilidad del suceso $C \cup D$: "obtener el número 1 o el número 3" es:

$$P(C \cup D) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

9.2 Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

La **probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles** A **y** B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección. Es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 2

Para calcular la probabilidad de obtener una número par o inferior a 3 en el lanzamiento de un dado convencional, se consideran los sucesos A: "obtener un número par" y B: "obtener un número inferior a 3".

Como $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2\}$, se tiene que $P(A) = \frac{3}{6}$ y $P(B) = \frac{2}{6}$.

También se sabe que $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, por lo cual $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$.

Ya que los sucesos A y B son compatibles, pues $A \cap B = \{2\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Luego, se verifica que:

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{\frac{4}{6}} = \underbrace{P(A)}_{\frac{3}{6}} + \underbrace{P(B)}_{\frac{2}{6}} - \underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{1}{6}}:$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

En una urna hay diez bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae una bola al azar, se anota su número y se consideran los sucesos A: "salir una bola con número impar", B: "salir una bola con un número primo" y C: "salir una bola con un número múltiplo de tres". Para determinar las probabilidades de los sucesos $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$ se hallan los elementos que forman los conjuntos A, B y C y sus respectivas intersecciones. Esto es:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\quad B = \{2, 3, 5, 7\}$ $\quad C = \{3, 6, 9\}$

$A \cap B = \{3, 5, 7\}$ $\quad A \cap C = \{3, 9\}$ $\quad B \cap C = \{3\}$

Como no hay parejas de sucesos incompatibles, las probabilidades son:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(A \cup C) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(B \cup C) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Se extrae una carta de una baraja española. Considera los siguientes sucesos:

A: "salir una figura".

B: "salir un as".

C: "salir una carta del palo de espadas".

a. ¿Son A y B incompatibles? Calcula $P(A \cap B)$.

b. ¿Son A y C compatibles? Calcula $P(A \cup C)$.

Razonamiento

2 Se lanza un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6, y se anota su puntuación.
Se consideran los sucesos:

A: "salir un número par".

B: "salir un número que es un divisor de 12".

a. ¿Son A y B sucesos incompatibles?

b. Calcula la probabilidad de $A \cap B$.

Resolución de problemas

3 Calcula la probabilidad de $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$, sabiendo que $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}4$, que $P(A) = 0{,}6$ y que $P(B) = 0{,}8$.

Evaluación del aprendizaje

De los 39 estudiantes de una clase, 16 escogieron como idioma el francés, y 27, el inglés. Nueve estudiantes eligieron ambos idiomas y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar a un estudiante de dicha clase, halla las siguientes probabilidades.

a. Escogió francés.

b. Escogió inglés.

c. Escogió ambos idiomas.

d. Escogió francés o inglés.

e. Escogió francés, pero no inglés.

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Según el Instituto colombiano de bienestar familiar (ICBF) en nuestro país se registran 408 nacimientos diarios cuyos padres están en edades entre los 10 y los 19 años.

- ¿Consideras que esta edad es adecuada para tener hijos?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

10 Probabilidad condicionada

Pensamiento aleatorio

Saberes previos

Se sabe que muchos fumadores sufren de hipertensión. ¿Significa eso que si alguien es hipertenso es fumador? Explica tus argumentos.

Analiza

La Tabla 6.24 muestra los resultados de 25 estudiantes de grado once en un examen de matemáticas según si aprobaron o reprobaron y el género del estudiante.

	A: Varones	$\overline{A}$: Mujeres	
B: Aprobados	9	8	17
$\overline{B}$: Reprobados	6	2	8
	15	10	25

Tabla 6.24

- Halla $P(B/A)$.

Conoce

Cuando dos eventos son dependientes; es decir, cuando la realización de un evento condiciona la del otro, se utiliza el concepto de **probabilidad condicional** o **probabilidad condicionada** para denominar la probabilidad de ocurrencia del evento relacionado. La expresión $P(B/A)$ indica la probabilidad que ocurra el evento B, si el evento A ya ocurrió. Se debe tener en cuenta que "B/A" no es una fracción.

La forma de clasificar los datos mediante el empleo de tablas de doble entrada (Tabla 6.23) se denomina **tabla de contingencia**. Obteniendo las frecuencias relativas y teniendo en cuenta que la frecuencia relativa de un suceso, tras una larga serie de pruebas, tiende a la probabilidad, se obtienen las probabilidades de los siguientes sucesos.

A: "ser hombre" $\Rightarrow P(A) = \dfrac{15}{25}$ $\qquad$ B: "haber aprobado" $\Rightarrow P(B) = \dfrac{17}{25}$

$A \cap B$: "ser hombre y haber aprobado" $\Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{9}{25}$

B/A: "haber aprobado condicionado a ser hombre" se denomina **B condicionado al suceso A**. La probabilidad de este nuevo suceso es $P(B/A) = \dfrac{9}{15}$.

A partir de las frecuencias obtenidas se verifica la siguiente igualdad.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{9}{15}$$

Se llama **probabilidad condicionada** del suceso A respecto al suceso B, y se denota por $P(A/B)$, al siguiente cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ si } P(B) \neq 0$$

De estas dos relaciones, se obtiene la llamada fórmula del producto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \qquad P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Ejemplo 1

Se extraen dos cartas de una baraja española. La probabilidad de que sean dos reyes si se devuelve la primera carta a la baraja, o si no hay devolución, se halla como se muestra a continuación.

Primero se consideran los sucesos R_1 = "sacar rey en la primera extracción", R_2 = "sacar rey en la segunda extracción". Luego si la extracción es con devolución, los sucesos R_1 y R_2 son independientes; por tanto:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

Por otro lado, si la extracción es sin devolución, los sucesos R_1 y R_2 son dependientes; se tiene que:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Ejemplo 2

En un experimento se sabe que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$. Con estos datos se puede calcular $P(A/B)$ y $P((A \cap B)/A)$ de la siguiente manera:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}7 = 0{,}6 + 0{,}3 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0{,}2$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = 0{,}\hat{6}$$

Por otro lado, $P((A \cap B)/A) = \dfrac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = 0{,}\hat{3}$

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 En un pueblo se somete a sus vecinos a votación sobre la instalación de una antena de telefonía. Los resultados se muestran en la Tabla 6.25.

	A: Hombres	$\overline{A}$:Mujeres	
B : Sí	317	303	620
$\overline{B}$: No	223	314	537
	540	617	1 157

Tabla 6.25

Se selecciona al azar un vecino. Halla $P(A)$, $P(A/B)$, $P(\overline{B})$ y $P(\overline{B}/A)$.

2 El 60% de los estudiantes de un instituto aprobaron filosofía, y el 70% aprobaron matemáticas. El porcentaje de estudiantes que aprobaron filosofía habiendo aprobado matemáticas es del 80%. Si Juan sabe que ha aprobado filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

Ejercitación

3 En un experimento se sabe que $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. Calcula:

a. $P(A \cap B)$ b. $P(A/B)$

c $P(B/A)$ d. $P(A/(A \cap B))$

Resolución de problemas

4 Se tiene una urna con quince bolas negras y diez blancas, y se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas en los siguientes casos.

a. Con devolución a la urna de la primera bola extraída.

b. Sin devolución.

5 El 80% de los días, un estudiante es llevado en automóvil a la facultad. Cuando lo llevan en auto llega tarde el 20% de los días. Cuando no lo llevan, llega temprano a clase el 10% de los días. Esta información se representa en la Figura 6.8.

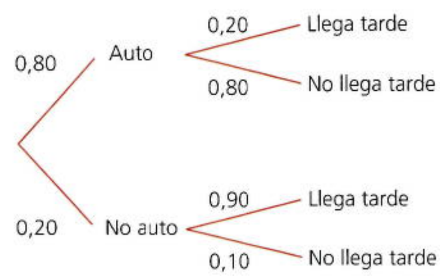


Figura 6.8

Con base en el diagrama de árbol y utilizando la regla del producto, determina:

a. La probabilidad de que el estudiante llegue puntual a clase y lo hayan llevado en automóvil.

b. La probabilidad de que llegue tarde a clase.

c. Si ha llegado temprano a clase, ¿cuál es la probabilidad de que no lo hayan llevado en auto?

Evaluación del aprendizaje

Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es de 0,6; que pase la segunda es de 0,8, y que pase ambas es de 0,5.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que pase al menos una prueba?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

11 Sucesos dependientes e independientes

Saberes previos

Supón que lanzas dos monedas. ¿Es probable que ambas caigan en cara?

Analiza

Se tiene una balotera con 20 bolas negras y quince bolas blancas; se realizan dos extracciones sucesivas de una bola.

Figura 6.9

- Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas si se devuelve a la urna la primera bola extraída y si no hay devolución.

Con devolución

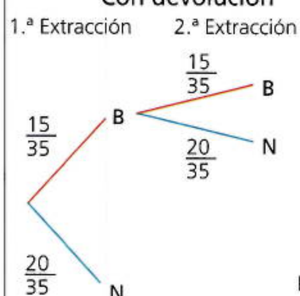


Figura 6.10

Sin devolución

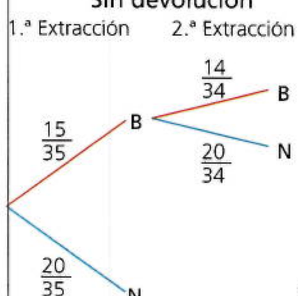


Figura 6.11

Conoce

Para hallar la probabilidad de que las dos bolas extraídas de la urna sean blancas cuando hay o no devolución, es necesario definir los siguientes sucesos:

B_1: "obtener bola blanca en la 1.ª extracción".

B_2: "obtener bola blanca en la 2.ª extracción".

- Si la bola se devuelve a la bolsa después de la primera extracción, la composición de la urna antes de la segunda extracción es igual que al empezar el experimento. Por tanto, la probabilidad de obtener una bola blanca será la misma tanto en la primera como en la segunda extracción. (Figura 6.10).

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cdot P(B_2/B_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{15}{35} \cdot \frac{15}{35} = \frac{9}{49}$$

En este caso, la realización del suceso B_1 no condiciona la realización del suceso B_2 y, por tanto, se dice que los sucesos B_1 y B_2 son **independientes**.
Conviene observar que $P(B_2/B_1) = P(B_2)$.

- Si la bola no se devuelve después de la primera extracción, la urna en la segunda extracción está compuesta por 20 bolas negras y catorce blancas. Las probabilidades en este caso se muestran en la Figura 6.11, con lo que:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{15}{35} \cdot \frac{14}{34} = \frac{3}{17}$$

En este caso, la realización del suceso B_1 condiciona la del suceso B_2 y, por tanto, se dice que los sucesos B_1 y B_2 son **dependientes**.
Conviene observar que $P(B_2/B_1) \neq P(B_2)$.

Dos sucesos A y B son **independientes** si $\mathbf{P(B) = P(B/A)}$.

Dos sucesos A y B son **dependientes** si $\mathbf{P(B) \neq P(B/A)}$.

Otra forma de caracterizar la **independencia de sucesos** es la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ P(B/A) &= P(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$$

Del mismo modo, tres sucesos A, B y C son independientes si se verifica que:

a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, es decir, si son independientes dos a dos.

b. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Y esta definición se puede generalizar a n sucesos.

La independencia de varios sucesos conlleva la de muchos más, ya que, por ejemplo, si A y B son dos sucesos independientes, también lo son A y $\overline{B}$, $\overline{A}$ y B o $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Se extraen dos cartas de una baraja española.

Halla la probabilidad de que sean dos figuras (sota, caballo o rey) en los siguientes casos:

a. Con devolución.

b. Sin devolución.

Razonamiento

2 Se lanza dos veces una moneda equilibrada. Se llama *A* al suceso "salir cara en el primer lanzamiento"; *B*, al suceso "salir cara en el segundo lanzamiento", y *C*, al suceso "en total aparecen una cara y un sello".

a. ¿Son *A*, *B* y *C* independientes dos a dos?

b. ¿Son independientes los tres sucesos?

Resolución de problemas

3 La ruleta de un casino consta de 37 casillas, numeradas del 0 al 36, la casilla del 0 es verde y las demás se distribuyen entre negras y rojas, como se observa en la Figura 6.12.

Figura 6.12

Puesta en marcha la ruleta, se consideran los sucesos:

A: "el resultado es un número del 1 al 9".

B: "el resultado es un número par".

C: "el resultado es un número rojo".

a. Halla la probabilidad $P(C - A)$.

b. Halla la probabilidad de obtener un número del 1 al 9, sabiendo que es rojo.

c. ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Y los sucesos *A* y *C*?

4 Los ciudadanos de un municipio votaron Sí o No a una determinada propuesta que realizó su alcalde. Los resultados por porcentajes vienen reflejados en la Tabla 6.26.

	Hombres	Mujeres	
Sí	25%	40%	65%
No	30%	5%	35%
	55%	45%	

Tabla 6.26

¿Son los sucesos *A*: "ser hombre" y *B*: "votar Sí" independientes?

Evaluación del aprendizaje

Una clase tiene 24 estudiantes y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas, y cuatro reprueban inglés y matemáticas.

a. Realiza una tabla de contingencia con los resultados de esta clase.

b. Calcula la probabilidad de que, al elegir un estudiante de esta clase al azar, resulte que aprueba matemáticas y reprueba inglés.

c. En esta clase, ¿son independientes los sucesos "aprobar inglés" y "aprobar matemáticas"?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Existen diferentes frases sobre el respeto, por ejemplo: "Si quieres que te respeten, respeta a los demás". ¿Crees que en esta frase hay alguna relación de dependencia? ¿Cómo las personas pueden ganarse en respeto de las otras personas?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

12 Probabilidad compuesta o de la intersección de sucesos

Saberes previos

Si se tiene una caja con tres bolas blancas y dos rojas, ¿cuál es la probabilidad de sacar al azar una roja?

Analiza

Se lanza un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y se extrae una bola de una urna que contiene tres bolas rojas y dos azules.

- Se consideran los sucesos *A*: "obtener un 4", *B*: "extrager una bola roja" y *C*: "salir un número par". Calcula la probabilidad de obtener un 4 y extraer una bola roja y la probabilidad de obtener un número par y extraer una bola azul.

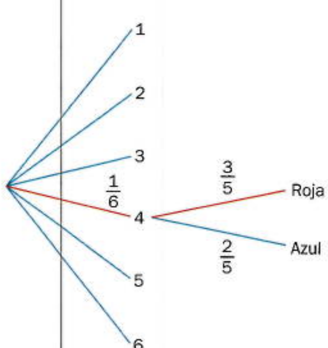


Figura 6.13

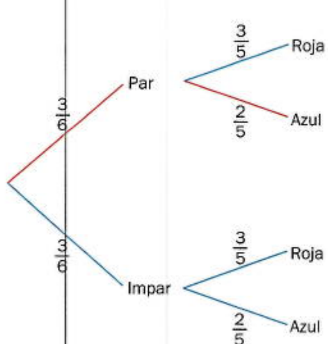


Figura 6.14

Conoce

El experimento de la situación inicial es **compuesto** ya que está formado por dos experimentos simples: lanzar un dado y extraer una bola de una urna. Además, estos experimentos son independientes, es decir, el resultado de cualquiera de ellos no influye en el otro.

12.1 Probabilidad de la intersección de sucesos independientes

La mejor forma de describir el espacio muestral es hacer un diagrama de árbol. Si, además, sobre cada rama del árbol se indica su probabilidad, se tiene que la probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas del camino.

Con base en las figuras 6.13 y 6.14 es posible calcular la probabilidad de los sucesos $A \cap B$ y $C \cap \overline{B}$ de la siguiente manera.

- $A \cap B$: "obtener 4 y extraer bola roja" $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$
- $C \cap \overline{B}$: "obtener un número par y extraer bola azul"

$\Rightarrow P(C \cap \overline{B}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

Este resultado se puede extender al caso general de un experimento compuesto formado por *n* experimentos aleatorios independientes dos a dos.

Considera un experimento compuesto formado por *n* experimentos aleatorios independientes dos a dos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *n* sucesos correspondientes cada uno de ellos a cada uno de los experimentos aleatorios. Entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

La probabilidad de este tipo de sucesos es el producto de las probabilidades de las ramas del diagrama de árbol que forman el camino que da lugar al resultado buscado.

12.2 Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes

La probabilidad de sucesos independientes también corresponde al producto de las probabilidades de las ramas del diagrama de árbol que forman el camino que da lugar al resultado buscado.

Se considera un experimento compuesto formado por *n* experimentos aleatorios dependientes. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *n* sucesos correspondientes cada uno de ellos a cada uno de los experimentos aleatorios. Entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot \ldots P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema de la probabilidad compuesta**.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

En una urna hay seis bolas azules y cuatro naranjas. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento. Para hallar la probabilidad de extraer tres bolas naranjas se debe tener en cuenta que los sucesos son dependientes, ya que la composición de la urna para la segunda y tercera extracción depende del resultado de las extracciones anteriores. Se consideran los siguientes sucesos:

A_1: "extraer una bola naranja en la primera extracción".

A_2: "extraer una bola naranja en la segunda extracción".

A_3: "extraer una bola naranja en la tercera extracción".

A partir del diagrama de árbol de la Figura 6.15 se puede calcular fácilmente la probabilidad pedida:

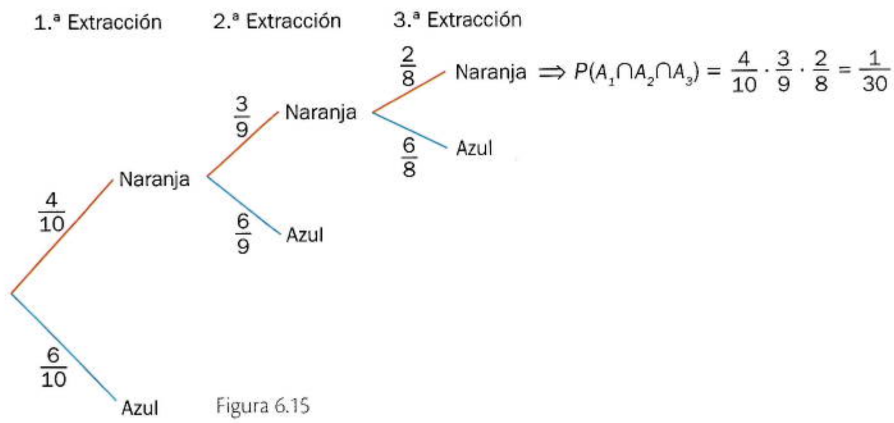


Figura 6.15

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Se extraen cuatro cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que las cuatro cartas sean del mismo palo en cada caso.

a. Con devolución de la carta a la baraja.

b. Sin devolución.

2 Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1% y del 10%, respectivamente. Se tiene mezcladas las piezas que se han fabricado en una hora y se elige una al azar. Halla la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B y no sea defectuosa.

Ejercitación

3 De dos sucesos A y B se sabe que son independientes, que la probabilidad de que ocurra uno de ellos es $\frac{5}{6}$ y que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es $\frac{1}{3}$. Halla las probabilidades de A y B.

Resolución de problemas

4 Pablo, Juan y ocho amigos más se sientan al azar en torno a una mesa circular. Calcula la probabilidad de que Juan y Pablo estén sentados juntos.

Evaluación del aprendizaje

i Un floricultor exporta el 60% de su producción, y el resto lo vende en la nación. De las exportadas, el 80% son rosas y de las que se venden en el país, el 10% son rosas. Si se escoge una flor al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rosa?

ii Para elegir dos representantes de un curso, se introducen papeletas con cada uno de los nombres de quince niños y doce niñas. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer representante seleccionado sea un niño y el segundo representante sea una niña?

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estadística

Comunicación

1 En una cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el de ventas, 200 en el de contabilidad y 100 en el de atención al cliente. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.

a. ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear para que en la muestra estén representados todos los departamentos? Explica tu respuesta.

b. ¿Qué número de trabajadores de cada departamento habrá en la muestra?

Ejercitación

2 La distribución de frecuencias de la Tabla 6.27 corresponde a las edades de algunos habitantes de un conjunto residencial.

Edad	C_k	f_k	f_r
[0, 12)	6	1	0,02
[12, 24)	18	8	0,16
[24, 36)	30	14	0,28
[36, 48)	42	10	0,2
[48, 60)	54	7	0,14
[60, 72)	66	6	0,12
[72, 84)	78	4	0,08

Tabla 6.27

a. ¿Cuál es la población?, ¿cuál es la muestra?

b. Calcula el segundo cuartil y el percentil 38.

c. Escribe tres conclusiones sobre la edad de los habitantes del conjunto residencial.

3 Observa el histograma de la Figura 6.16.

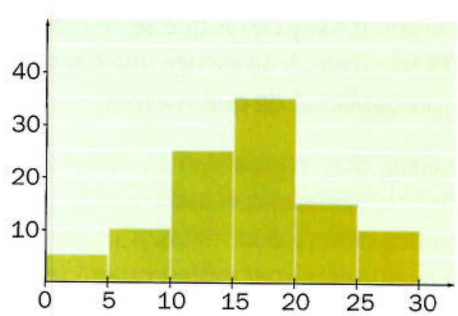


Figura 6.16

- Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Razonamiento

4 Determina la media, la moda, la mediana y los cuartiles Q_1 y Q_3 de la distribución representada en el polígono de frecuencias de la Figura. 6.17.

Figura 6.17

5 ¿Es posible que la media no coincida con ningún valor de la variable?, ¿y la moda? Explica tus respuestas.

Probabilidad

Resolución de problemas

6 En una urna hay ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se anota el número. Considera los sucesos $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 8\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7\}$ y halla la probabilidad de $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, y $\overline{C}$.

7 Sean A y B dos sucesos independientes. La probabilidad de que suceda el suceso B es de 0,6. Si $P(A/B) = 0{,}3$, calcula:

a. La probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

b. La probabilidad de que suceda el suceso A, pero no el B.

8 Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en lanzar dos veces un dado.

a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento?

b. Calcula la probabilidad de obtener primero un 2 y luego un 5.

9 En el armario de Luis hay seis camisetas blancas, cuatro azules, tres negras y dos rojas. Si se sacan consecutivamente dos camisetas, ¿cuál es la probabilidad de cada suceso?

a. Sacar dos camisetas negras.

b. Sacar una camiseta blanca y otra azul.

c. No sacar ninguna camiseta roja.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Elaborar una tabla

Problema

En una clínica nacen 20 niños y doce niñas. De estos, ocho niños y dos niñas nacen prematuramente. ¿Cuál es la probabilidad de que un bebé nazca en el tiempo justo, si se sabe que es un niño?

1. Comprende el problema

- ¿Cuántos niños y cuántas niñas nacen en la clínica?
  R: 20 y 12, respectivamente.
- ¿Cuántas niñas y cuántos niños de los que nacen son prematuros?
  R: 2 y 8, respectivamente.
- ¿Qué se debe averiguar?
  R: La probabilidad de que un bebé nazca en el tiempo justo, sabiendo que es un niño.

2. Crea un plan

- Asigna variables a cada característica dada en el problema.
- Completa una tabla de contingencia.

3. Ejecuta el plan

- Asigna un nombre a cada uno de los eventos del problema.

  A: "Bebé niño" $\overline{A}$: "Bebé niña"

  B: "Prematuro" $\overline{B}$: "No prematuro"

- Completa la Tabla 6.28.

	Prematuro	No prematuro	Total
Niño			20
Niña			12
Total	10		

Tabla 6.28

- Calcula la probabilidad de que un bebé nazca en el tiempo justo sabiendo que es niño.

$$P(A) = \frac{20}{32} = 0{,}625 \qquad P(A \cap \overline{B}) = \frac{12}{32} = 0{,}375$$

$$P(B/A) = \frac{0{,}375}{0{,}625} = 0{,}6$$

R: Hay una probabilidad del 60% de que un bebé nazca en el tiempo justo, sabiendo que es un niño.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la probabilidad de que una niña nazca en el tiempo justo es del 83,3%.

Aplica la estrategia

1 Un estudio de mercadeo permite concluir que, de una muestra de 80 clientes, 25 son ocasionales y los demás son regulares. Entre los regulares, 30 compraron artículos por un valor menor que $ 20 000 y cinco de los ocasionales también. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea ocasional, sabiendo que realizó compras por más de $ 20 000?

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2 Se extraen, una a una (sin devolución), dos bolas de la urna de la Figura 6.18.

¿Cuál es la probabilidad de obtener bola roja, dado que ya salió azul?, ¿y la de obtener bola verde, dado que ya salió roja?

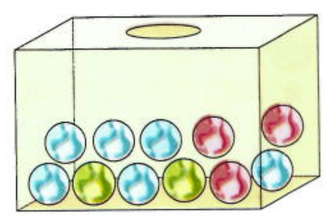


Figura 6.18

Formula problemas

3 Plantea una pregunta que involucre la siguiente información y resuélvela.

En un colegio se seleccionaron 20 niñas de quince años de edad y 30 de doce años. En el primer grupo hay cinco niñas del grado séptimo y en el segundo hay quince.

Enriquece tu vocabulario

- Explica la diferencia entre cada par de expresiones:
  - Población y muestra
  - Suceso compatible e incompatible

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Evaluación del aprendizaje

Conceptos de estadística. Muestreo

Ejercitación

1 Completa la distribución de frecuencias presentada en la Tabla 6.29. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Medidas de 100 tornillos						
Medida (mm)	c_k	f_k	f_r	$f_r\%$	F_k	F_r
[0, 10)	5	10				
[10, 20)		25				
[20, 30)		45				
[30, 40)		15				
[40, 50)		5				

Tabla 6.29

Responde las preguntas.

a. ¿Cuál es la medida menos frecuente?

b. ¿Qué porcentaje del total de tornillos mide menos de 30 mm?

c. ¿Qué porcentaje del total de tornillos mide 30 mm o más?

d. ¿Qué porcentaje del total representa el número de tornillos que miden entre 10 mm y 20 mm?

2 Observa el histograma de la Figura 6.19. Luego, completa en tu cuaderno las frases. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

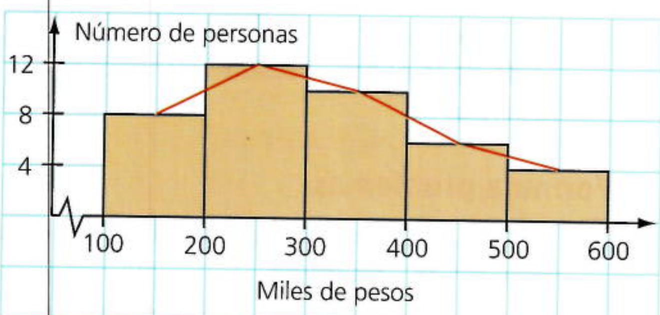


Figura 6.19

a. Los datos están distribuidos en ______ intervalos o clases.

b. El dato con la mayor frecuencia es ______.

c. El dato con la menor frecuencia es ______.

d. El tamaño de la muestra es de ______.

Comunicación

3 Antes de unas elecciones, un periódico llama telefónicamente y de forma aleatoria a 2 000 ciudadanos con derecho a voto y les pregunta por el candidato por el que van a votar. Así, esperan obtener una estimación fiable de los resultados que se van a producir.

a. ¿Cuál es la población? ACTIVIDAD DE REFUERZO

b. ¿Cuál es la muestra?

c. ¿Es realmente aleatoria la muestra?

Razonamiento

4 Alberto trabaja en un tren revisando que los viajeros lleven el billete correcto. Como hoy el tren, cuya capacidad máxima es de 300 pasajeros, va totalmente lleno, no puede comprobar que todos los viajeros llevan el billete correcto. Por ello va a revisar el billete a 75 viajeros que elegirá mediante un muestreo sistemático. Explica cómo lo hará. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Medidas de tendencia central, de dispersión y de posición

Razonamiento

5 Halla las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión, los cuartiles Q_1 y Q_3 y los percentiles P_{45} y P_{68} para cada distribución estadística definida en cada gráfica de las figuras 6.20 y 6.21. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

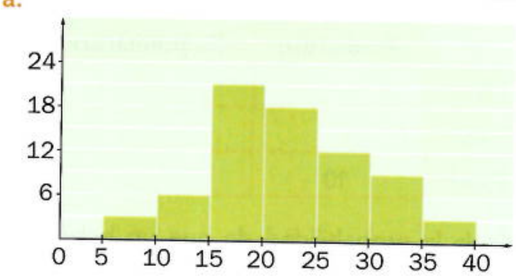


Figura 6.20

b.

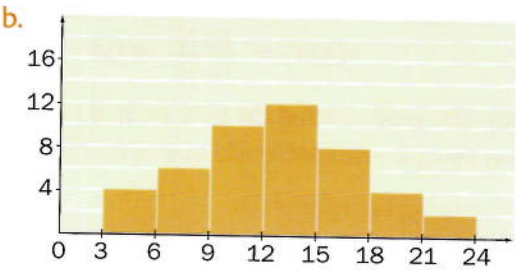


Figura 6.21

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Razonamiento

6 El histograma de la Figura 6.22 representa la edad a la que 50 jóvenes aprendieron a interpretar un instrumento musical. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

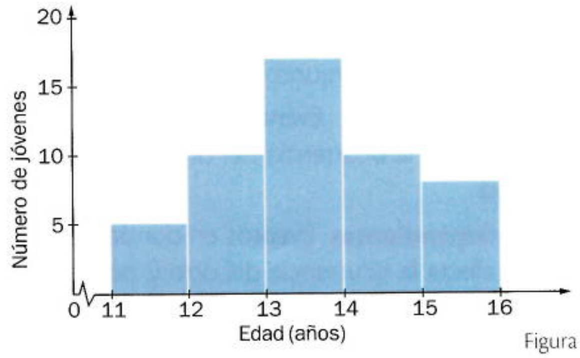


Figura 6.22

¿Cuántos jóvenes están por debajo del cuartil Q_1 y por encima del cuartil Q_3?

Tendencias y análisis de comportamiento

Comunicación

7 El IDEAM observó el comportamiento de la temperatura mínima media durante el año en Riohacha durante los 12 meses de 2015 y obtuvo los siguientes datos: 22° C, 22,4° C, 24° C, 24,5° C, 25° C, 25,5° C, 25° C, 25,2° C, 24,5° C, 24° C, 23,5° C, 23° C. Traza la gráfica de comportamiento de estas temperaturas y escribe 3 conclusiones. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Diseño de experimentos aleatorios

Ejercitación

8 Para la investigación agrícola que se estudió en la página 221, determina La variable de interés en la situación, los factores de diseño, y los niveles del factor. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Reglas de probabilidad.

Razonamiento

9 Decide cuál de las siguientes afirmaciones es cierta. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. Si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces $P(A) + P(B) = 1$.

b. Si A y B son dos sucesos independientes, entonces son también incompatibles.

c. Si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces son también independientes.

Probabilidad condicionada

Ejercitación

10 Completa en tu cuaderno la Tabla 6.30 que muestra la distribución de tres cursos de un colegio. ACTIVIDAD DE REFUERZO

	Niños	Niñas	
901	5		
902		60	100
903			78
	100		232

Tabla 6.30

Si se escoge un estudiante al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña y esté en el curso 902?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que es niña, sea de 903?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niño, sabiendo que pertenece a 901?

Probabilidad condicionada y compuesta

Ejercitación

11 En un experimento se tiene $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Determina:

a. $P(A \cap B)$

b. $P(A/B)$

c. $P(A/(A \cap B))$

Sucesos dependientes e independientes

Razonamiento

12 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{2}{5}$. Calcula, razonadamente, para qué valor de $P(A \cup B)$ los sucesos A y B son independientes. ACTIVIDAD DE REFUERZO

13 Sea A un suceso con $0 < P(A) < 1$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. ¿Puede ser A independiente de su contrario, $\overline{A}$?

b. Sea B otro suceso tal que $A \subset B$. ¿Serán A y B independientes?

c. Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y $\overline{C}$ independientes? Justifica las respuestas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Glosario

A

Aleatorio. ExperAltura de un prisma. Segmento que une las bases de un prisma y es perpendicular a estas.

Altura de una pirámide. Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

Ángulos alternos externos. Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos alternos internos. Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos opuestos por el vértice. Ángulos que tienen un vértice común, y los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

B

Baricentro. Punto en que concurren las medianas de un triángulo.

Binomio. Expresión algebraica que tiene dos términos.

Bisectriz. Recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

C

Circuncentro. Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Coeficiente. Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado perfecto. Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

D

Decimal periódico. Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

Desigualdad. Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

Dominio. Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

E

Ecuación lineal. Ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales, x representa la incógnita y $a \neq 0$.

Esfera. Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Espacio muestral. Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento. Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

Eventos dependientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

Eventos independientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

Expresión algebraica irracional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

Expresión algebraica racional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Fracción algebraica. Es el cociente entre dos polinomios.

Fracción compleja. Es aquella fracción cuyo denominador o numerador, o ambos, presentan una fracción.

Frecuencia relativa. Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realiza el experimento estadístico.

Función. Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B.

Función afín. Función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

Frecuencia cuadrática. Ecuación polinómica de segundo grado, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales. La representación de la función equivale a una parábola.

Función lineal. Función de la forma $y = mx$, donde m es una constante.

I

Incentro. Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Inecuación. Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

L

Logaritmo. Se define como logaritmo en base a de un número b, a otro número c tal que a elevado al exponente c da como resultado el número a: $\text{Log}_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

M

Media aritmética. Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Mediana (estadística). Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

Medidas de tendencia central. Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Moda. Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

N

Notación científica. Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Número irracional. Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

Número racional. Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

Números reales. Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

O

Ortoedro. Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

Paralelepípedo. Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

Pendiente. En la recta dada por la ecuación $y = mx + b$, el valor m corresponde a una constante diferente de cero, denominada pendiente.

Polígono cóncavo. Es aquel en el que la recta que pasa por uno o más lados corta a otro lado del polígono.

Polígono convexo. Es aquel cuyos lados interiores son menores que 180°. Además, la recta que pasa por cualquiera de los lados no corta a ningún otro lado del polígono.

S

Sistemas de ecuaciones lineales. Conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen ambas ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

T

Teorema. Proposición que afirma una verdad demostrable.

Teorema de Pitágoras. Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Término. Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Triángulo acutángulo. Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

Triángulo equiángulo. Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

Triángulo equilátero. Triángulo que tiene todos los lados iguales.

Triángulo escaleno. Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

Triángulo isósceles. Triángulo que tiene dos lados iguales.

Triángulo obtusángulo. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo rectángulo. Triángulo que tiene un ángulo recto.

Triángulos congruentes. Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

V

Valor absoluto. El valor absoluto de un número real c se simboliza $|c|$ y se define como:

Valor numérico de un monomio. Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

Variable algebraica. Cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión.

Variable dependiente. Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente. Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.* Barcelona: Gedisa, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A. Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis, 1995.
- Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones.* Madrid: Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5.* Madrid: Síntesis, 1997.
- Clemens *et al. Geometría* Serie Awli. México: Pearson, 1998.
- De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad.* Málaga: Ágora, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid: Pearson-Addison Wesley V. A. M, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente.* Barcelona: Gedisa, 1995.
- Jouette, André. *El secreto de los números.* Bogotá: Intermedio, 2002.
- Küchemann, D. "The meaning children give to the letters in generalised arithmetic." En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds (2002): 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica.* México: Harla, S. A. de C.V., 1972.
- Mason, J.; Burton, L., y Stacey, K. *Pensar matemáticamente.* Barcelona/Madrid: Labor/MEC, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá, 1998.
- Moise, Edwin, y Downs, Floyd. *Geometría moderna.* Addison Wesley, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa.* Moscú: Mir, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II.* México: Compañía Editorial Continental S. A., 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría.* México: McGraw-Hill, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes, y Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra.* México: Síntesis, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística.* México: McGraw-Hill, 1975.
- Suppes, Patrick, y Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática.* Bogotá: Reverté, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* México: Thomson Editores, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. México: Limusa, 1988.
- Zill, Dennis, y Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría.* México: McGraw-Hill, 2000.

MATEMÁTICAS © LAROUSSE